فصل هفتم

عبارت های گویا

نگاه کلی به فصل هفتم

اهداف فصل هفتم

1) آشنایی با عبارت های گویا
2) آشنایی با مقدار عددی عبارت های گویا به ازای مقادیر مختلف برای متغیرهای آنها
3) آشنایی با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم عبارت های گویا
4) آشنایی با ساده کردن عبارت های گویا
5) معرفی چگونگی تقسیم یک چندجمله ای بر چندجمله ای
6) آشنایی با عبارت های رادیکالی
7) گویا کردن مخرج کسرهایی که عبارت رادیکالی هستند
8) آشنایی با اعمال جبری ساده روی عبارت های رادیکالی

اهداف کلی رفتاری و عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

1- عبارت های گویا و غیرگویا را از یکدیگر تشخیص دهند.

2- مقادیر عددی عبارت های گویا را به ازای مقادیر مختلف متغیرهای آنها حساب کنند.

3- مقدارهایی از متغیر را که به ازی آنها, مقدار عددی عبارت گویا تعریف نمی شود تعیین کنند.

4- **اعمال جبری ضرب و تقسیم و جمع و تفریق بین عبارت های گویا را انجام دهند.**

5- **در حالت های ساده, صورت و مخرج عبارت های گویا را تجزیه کنند و با حذف عوامل مشترک, عبارتهای گویا را ساده کنند.**

6- **مسائلی را که مدلسازی آنها در بر دارنده عبارتهای گویا است را حل کنند.**

7- **تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای و تقسیم چندجمله ای بر یک جمله ای را انجام دهند.**

8- **خارج قسمت و باقیمانده تقسیم چندجمله ای بر چندجمله ای را به دست آورند.**

9- **بخشپذیری چندجمله ایها بر هم را از طریق تقسیم تشخیص دهند.**

10- **درستی عمل تقسیم چندجمله ایها را با ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه و جمع با باقیمانده بررسی کنند.**

11- **عبارت های جبری رادیکالی را تشخیص دهند.**

12- **مخرج کسرهایی که عبارت رادیکالی هستند را گویا کنند.**

13- **اعمال جبری ساده ضرب و تقسیم و جمع و تفریق روی عبارت های رادیکالی را انجام دهند.**

روش آموزشی فصل هفتم:

این فصل ادامه طبیعی فصل چهارم است, ولی بنا به دلایل آموزشی ارائه آن تا اینجا به تاخیر انداخته شده است. فصلهای چهارم و هفتم بیشترین محاسبات نمادین را دارند و درک معنادار از محاسبات نمادین برای دانش آموزان مشکل است. به همین علت پس از فصل چهارم که دانش آموزان تا حد زیادی درگیر محاسبات نمادین می شوند, بقیه عملیات نمادین تا فصل هفتم به تاخیر انداخته شده است تا دانش آموزان, در طی زمان با فصلهای قبلی آشنایی بیشتری پیدا کنند.

این فصل با طرح یک مسئله و انجام یک فعالیت مرتبط با آن آغاز می شود. هدف از این مسئله و فعالیت, توجیه دانش آموزان است که عبارتهای کسری و تقسیم عبارتهای جبری بر هم به طور طبیعی رخ می دهند و توجه به این عبارتها و کار با آنها ضروری است. این گونه مقدمات برای توجیه دانش آموزان بسیار مهم است, زیرا دانش

آموزان باید درک کنند که مفاهیم ریاضی و عملیات ریاضی بیجهت و برای سرگرمی ساخته نمی شوند و هر کدام اهمیت ویژه ای دارند و بررسی آنها, عملی سودمند و مفید است.

پس از این زمینه سازی, تعریف رسمی عبارت های گویا آورده می شود و هدف بقیه این فصل انجام محاسبات جبری روی این عبارت ها است. ولی در هر کجا که ممکن باشد, مناسب است این عملیات از طریق برقراری ارتباط با مفاهیم هندسی و محیط پیرامونی, ملموس و واقعی شوند.

مفاهیم اساسی این فصل مانند محاسبه مقدار عددی عبارتهای گویا به ازای مقدارهای عددی برای متغیرها, در حالت کلی عبارتهای جبری قبلا تعریف شده است ولی در این فصل ممکن است مقدار عددی این عبارت ها به ازای برخی مقادیر از متغیرها تعریف نشده باشد. این نکته موجب بروز برخی پیچیدگیها در مفهوم عبارت های گویا و ساده کردنها می شود که در کتاب به آن پرداخته نشده است و توصیه می شود معلمان دانش آموزان را وارد این پیچیدگیها نکنند. مگر آن که دانش آموزان توانایی و انگیزه کافی برای ورود به این مطالب را داشته باشند.

اعمال جبری روی عبارت های گویا کاملا شبیه عملیات جبری روی اعداد کسری است و لازم است دانش آموزان نسبت به این عملیات که در فصل چهارم آمده است تبحر کافی به دست آورده باشند.

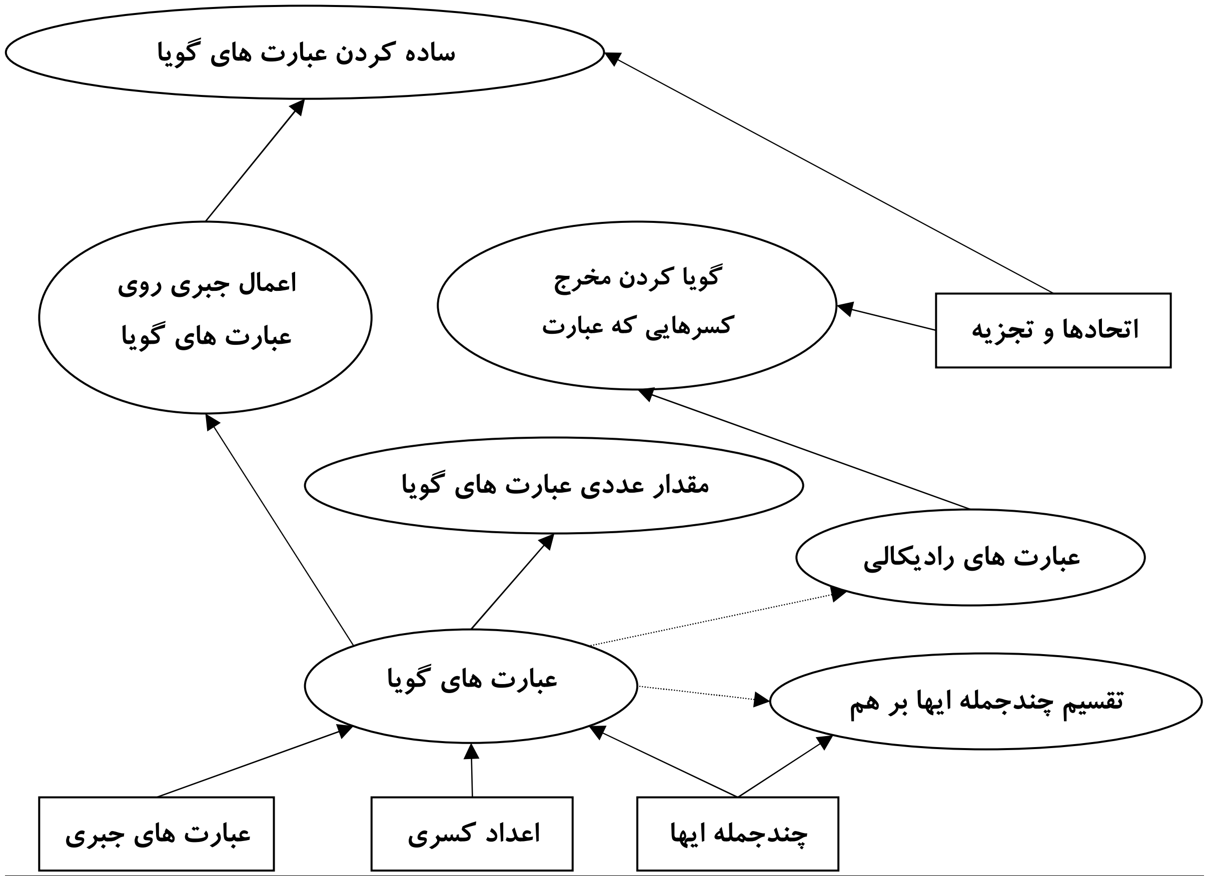
پیش نیازها:

- اعمال جبری روی کسرها
- ساده کردن کسرها
- اتحادها و تجزیه
- محاسبه مقدار عددی عبارتهای جبری به ازای مقدار عددی برای متغیرها

زمانبندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می شود این فصل در 3 هفته تدریس شود.

نقشه مفهومی فصل هفتم



مستطیلها نشان دهنده مفاهیم پیشنیازی هستند که در فصلهای قبل آمده است.

آموزش بخشهای فصل هفتم

بخش اول و دوم: حل یک مسئله و عبارت های گویا

اهداف بخش:

- **درک عبارت های گویا به صورت تقسیم دو چندجمله ای بر هم**
- **یافتن درک معنادار از عبارت های گویا از طریق برقراری ارتباط با مسائل واقعی**
- **درک عبارت های گویا به عنوان عبارتهای جبری خاص و درک مقدار عـددی آنهـا بـه ازای مقدارهای خاص برای متغیرها**

- **توجه به این نکته که مقدار عددی عبارتهای گویا ممکن است به ازای برخی مقدارها تعریف شده نباشد.**
- **آشنایی با اعمال جبری جمع و تفریق و ضرب و تقسیم بین عبارت های گویا**

پیشنیازها:

- **آشنایی با کسرها و عبارت های جبری**
- **آشنایی با مقدار عددی عبارت های جبری**
- **آشنایی با چندجمله ایها و معادلات درجه اول**
- **آشنایی با اعمال جبری بین اعداد کسری**
- **ساده کردن کسرها و هم مخرج کردن کسرها**

واژه های کلیدی :

عبارت گویا – کسر – مقدار عددی عبارتها – اعمال جبری

نگاه کلی به بخش:

این بخش با حل یک مسئله آغاز می شود که هدف از آن درگیر کردن دانش آموزان با مفهوم نسبت و عملیات جبری روی آنها است. سپس از طریق یک فعالیت این مسئله در زمینه ای دیگر به طور نمادین حل می شود تا دانش آموزان مستقیما به وجود آمدن عبارت های گویا را در حل مسائل ببینند.

بعد از این زمینه سازی تعریف رسمی عبارتهای گویا ارائه می شود و در یک تمرین در کلاس این مفهوم تثبیت می شود.

مقدار عددی عبارت های گویا نیز بلافاصله تعریف می شود تا در دانش آموزان ایده عبارتهای نمادین به عنوان اعدادی که با محاسبه روی چند عدد داده شده به دست می آیند تقویت شود.

سپس, اعمال جبری بین عبارت های گویا به صورت دیدن عبارت های گویا همانند اعدادکسری مطرح می شود. قواعد محاسبه با عبارت های گویا دقیقا همان قواعد محاسبه با اعداد کسری است زیرا در آنجا, چگونگی صورت یا مخرج کسرها تاثیری در قواعد محاسبه نداشته است.

ورود به مطلب:

به طور کلی برای ورود به این بخش مناسب است در یک زمینه واقعی مسئله ای طرح شود که برای حل آن لازم شود از نسبت ها به طور نمادین استفاده شود و عبارت های گویا به طور طبیعی ظاهر شوند. سپس می توان وارد تعریف رسمی عبارت های گویا شد.

طرح کتاب مبتنی بر همین ایده است ولی شما می توانید از طرحهای مورد نظر خود هم استفاده کنید. مناسب است که در طرح یک مسئله دانش آموزان فرصت کافی برای فکر کردن و نظر دادن داشته باشند و هر کس نظر خود را در مورد چگونگی حل مسئله بدهد. به ویژه بررسی راه حلهای غلط و رسیدن به اشتباهات بسیار آموزنده است و هر گز مستقیما سراغ راه حل درست نروید زیرا در عمل همواره از طریق همین خطاها است که راه حل درست به دست می آید.

برای طرح اعمال جبری بین عبارت های گویا باید تذکر داده شود که عبارت های گویا همانند اعداد کسری هستند و همان قواعد محاسبه برای آنها نیز قابل به کار بردن است.

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب و طرح مسئله مناسب, سعی شود از طریق مباحثه مانند آنچه که در کتاب پیش بینی شده است حل مسئله انجام شود.

در بالای صفحه 147 یک «*بیندیشیم*» قرار دارد که از دانش آموزان خواسته است «5/14 روز » را معنا کنند. پاسخگویی به این سوال از نقطه نظر به کارگیری ریاضیات در حل مسائل واقعی و تفسیر جوابهای ریاضی در محیط واقعی بسیار مهم است.

ممکن است یک جواب آن باشد که هر روز 24 ساعت است و «5/14 روز» به معنای $5/14\times 24=123/36$ ساعت است, یعنی 5 روز و 3 ساعت و حدودا 21 دقیقه. اما این جواب نشان می دهد که دانش آموز ارتباط درستی بین مفاهیم ریاضی و مفاهیم محیط پیرامونی برقرار نکرده است. در اینجا هر روز به معنای روز کاری است. مثلا اگر یک کارگر در روز 8 ساعت کار می کند, هر روز را باید 8 ساعت حساب کرد. پس «5/14 روز» به معنای 5 روز کاری و یک ساعت و حدودا 7 دقیقه است.

<u>فعالیت صفحه 147</u>

مفاهیم ریاضی این فعالیت دقیقا همان مفاهیم طرح شده در مسئله ابتدای بخش است.

بند (1) **با یک تناسب ساده نتیجه می شود شیر اول به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{a}$ از حوض را پر می کند.**

بند (2): **به طور مشابه شیر دوم به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{b}$ از حوض را پر می کند.**

بند (3): **روشن است که هر دو شیر با هم در یک ساعت $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ از حوض را پر می کنند.**

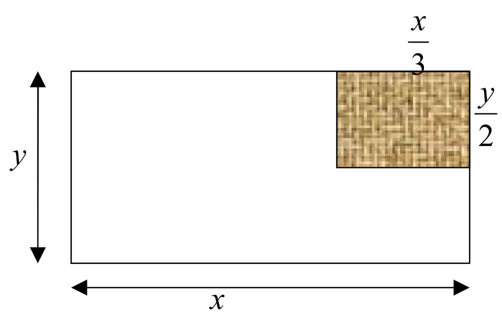
بند (4): **در اینجا نیز همانند بندهای (1) و (2) نتیجه می شود که هر دو شیر با هم در یک ساعت $\frac{1}{x}$ از حوض را پر می کنند.**

بند (5): **با توجه به نتایج بندهای (4) و (3) می توان نتیجه گرفت $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$**

پس از این فعالیت عبارت های گویا رسما معرفی می شوند و مثالهایی ارائه می شود.

تمرین در کلاس صفحه 148

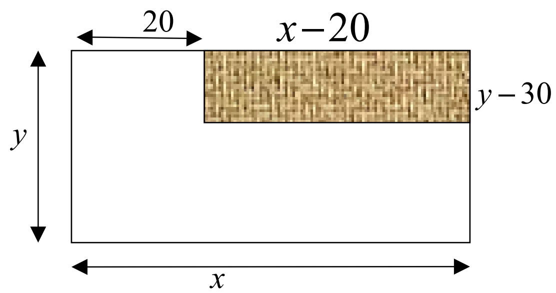
بند (1): **با توجه به شکل, مساحت مستطیل ساخته شده برابر** $\frac{x}{3}\times\frac{y}{2}=\frac{xy}{6}$ **است.**



مساحت کل زمین برابر xy **است و نسبت این دو مساحت برابر است با**

$$\frac{\frac{xy}{6}}{xy}=\frac{xy}{6}\times\frac{1}{xy}=\frac{1}{6}$$

بند (2): **در این بند شکل زمین به صورت زیر خواهد بود.**



در این حالت محیط باغچه برابر است با:

$$2(x-20+y-30)=2(x+y-50)$$

مساحت این باغچه نیز برابر است با :

$$(x-20)(y-30)=xy-20y-30x+600$$

بند (3): **در این بند باید مساحت به دست آمده در بند قبل را بر مساحت زمین تقسیم کنیم.**

$$\frac{xy-20y-30x+600}{xy}$$

بند (4): **این بند ارتباطی با بندهای قبلی ندارد و فقط تمرینی برای تشخیص عبارت های گویا است. غیر از $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ بقیه عبارت های داده شده گویا هستند.**

در ادامه درس, بحث یافتن مقدارهای عددی عبارت های گویا مطرح می شود. دانش آموزان باید متوجه شوند که در این محاسبات ممکن است تقسیم بر صفر پیش آید که بیمعنا است و باید این گونه نتیجه گیری شود که عبارتهای گویا ممکن است به ازای برخی مقدارها برای متغیرهایشان تعریف شده نباشند. توجه داشته باشید که هدف از این قسمت رسیدن به مفهوم دامنه تعریف متغیر نیست ولی دانش آموزان باید تعریف شدگی یا تعریف ناشدگی عبارتهای گویا را به ازای مقدارهای عددی برای متغیرهایشان تشخیص دهند.

<u>تمرین در کلاس صفحه 149</u>

بند (1): **در این بند باید معادله $\frac{x}{x+1}=8$ حل شود که به یک معادله درجه اول تبدیل می شود و جواب آن $x=-\frac{8}{7}$ است.**

بند (2): **در این بند باید معادله $\frac{x}{x+1}=1$ را حل کنیم که برقراری آن به تساوی $0=1$ منجر می شود که تناقض است. پس این معادله جواب ندارد و عبارت $\frac{x}{x+1}$ به ازای هیچ مقداری برابر 1 نمی شود.**

بند (3): **در این قسمت با فرض آن که a عدد داده شده ای است باید معادله $\frac{x}{x+1}=a$ را بر حسب مجهول x حل کنیم. این یک معادله درجه اول برحسب x است و جواب آن $x=\frac{a}{1-a}$ است. البته این جواب با فرض $a\neq 1$ به دست می آید.**

بند (4): **جواب این بند از طریق حل معادله $\frac{4}{m+1}=\frac{2}{m-2}$ به دست می آید. این یک معادله درجه اول است و جواب آن $m=5$ است.**

در قسمت بعد وارد محاسبات جبری بین عبارت های گویا می شویم. پس از زمینه سازی و همانند کردن عبارت های گویا با اعداد کسری, برای تثبیت یادگیری وارد تمرین در کلاس این قسمت می شویم.

تمرین در کلاس صفحه 150

الف) $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ **ب)** $2\times\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$ **ج)** $1+\frac{1}{b}=\frac{b}{b}+\frac{1}{b}=\frac{b+1}{b}$

د) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$ **ه)** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{aa}{ab}+\frac{bb}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ **و)** $1+\frac{a}{b}=\frac{b}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{b}$

برای تمرین بیشتر روی قواعد محاسبه با عبارت های گویا می توانید به عنوان تمرین, از محاسبات روی عبارت های زیر هم استفاده کنید.

1) $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}$ 2) $\frac{2}{2x}-\frac{3}{x}+\frac{1}{3x}$ 3) $1+\frac{a-b}{a+b}$ 4) $2x+\frac{3-2x}{5}$

5) $\frac{1}{3a}-\frac{1}{x}$ 6) $\frac{5}{2ac}-\frac{1}{3ab}-\frac{1}{bc}$ 7) $\frac{2}{a-3}+\frac{3}{a}$ 8) $\frac{a+x}{3}-\frac{5}{a-x}$

9) $\frac{3}{a-b}-\frac{4}{a+b}$ 10) $\frac{1}{a-b}-\frac{a}{a^2-b^2}$ 11) $\frac{3a}{a^2-16}-\frac{2}{a-4}$

تمرین در کلاس صفحه 151

بند (1): **در این بند کافی است ضرب دو عبارت گویای A و B محاسبه شود.**

$$C=A\times B=\frac{x}{x-1}\times\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^3}{(x-1)(x^2+1)}$$

بند (2): **در این قسمت ابتدا باید نتیجه گیری شود** $C = B - A$ **(مثلا با جمع طرفین تساوی با «$-A$») سپس با تفاضل** A **از** B **عبارت** C **به دست می آید.**

$$C = B - A = \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2(x-1) - x(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{x^2+x}{(x^2+1)(x-1)}$$

بند (3): **در این قسمت ابتدا باید نتیجه گرفت** $C = \frac{A}{B}$ **(ابتدا طرفین را در** C **ضرب و سپس طرفین را بر** B **تقسیم می کنیم.) و سپس با تقسیم** A **بر** B **عبارت** C **را حساب می کنیم.**

$$C = \frac{A}{B} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{x}{x-1} \div \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x-1)}$$

مسائل صفحه 151

مسئله 1) الف) $\frac{a^2b}{c} \times \frac{c^2b}{a^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2c} = b^2c$ **ب)** $\frac{a}{2b} \times \frac{3b}{2a^2} \times \frac{4}{a} = \frac{12ab}{4a^3b} = \frac{3}{a^2}$

در این مسئله از قوانین ساده کردن کسرها که در فصلهای قبل با آن آشنا شده اند استفاده کرده ایم. **مسئله 2) اگر عبارت مورد نظر را** A **بنامیم داریم** $A + \frac{x+1}{x-1} = 3$. **با جمع طرفین تساوی با عبارت** $-\frac{x+1}{x-1}$ **داریم:**

$$A = 3 - \frac{x+1}{x-1} = \frac{3(x-1) - (x+1)}{x-1} = \frac{2x-4}{x-1}$$

مسئله 3) اگر عبارت مورد نظر را A **بنامیم داریم** $A \times \frac{x^2-y^2}{4x+y} = x+y$. **در نتیجه با تقسیم طرفین بر عبارت** $\frac{x^2-y^2}{4x+y}$ **داریم:**

$$A = (x+y) \div \frac{x^2-y^2}{4x+y} = (x+y) \times \frac{4x+y}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)(4x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{4x+y}{x-y}$$

مسئله 4) در این مسئله فرض بر آن است که x **و** y **اعداد خاصی هستند به گونه ای که**

$$\frac{2x-y}{x+y}=\frac{2}{3}$$

در این مسئله خواسته شده است که با این فرض, نسبت x به y چقدر خواهد بود. بنابراین باید بررسی کنیم که با توجه به فرض بالا, آیا کسر $\frac{x}{y}$ قابل محاسبه است؟

$$\frac{2x-y}{x+y}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 2(x+y)=3(2x-y) \quad \Rightarrow \quad 2x+2y=6x-3y$$

$$\Rightarrow \quad 5y=4x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{5}{4}$$

***مسئله 5*) فرض کنید شیر دوم در x دقیقه صد لیتر آب را تخلیه کند. شیر اول در هر دقیقه $\frac{100}{90}$ لیتر آب تخلیه می کند و شیر دوم در هر دقیقه $\frac{100}{x}$ لیتر آب تخلیه می کند. هر دو شیر با هم در هر دقیقه $\frac{100}{20}$ لیتر آب تخلیه می کنند. پس $\frac{100}{20}=\frac{100}{90}+\frac{100}{x}$. این معادله به شکل زیر حل می شود.**

$$\frac{100}{x}=\frac{100}{20}-\frac{100}{90}=5-\frac{10}{9}=\frac{45-10}{9}=\frac{35}{9} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{900}{35}=\frac{180}{7}=25\frac{5}{7}$$

مقدار عددی صد لیتر آب, تاثیری در جواب این مسئله ندارد و مناسب است این مسئله را مجددا با همین فرضیات حل کنید که در آن تخلیه کل حجم مخزن گفته شده باشد و برای حجم مخزن یک مقدار نامعین مانند V در نظر بگیرید. پس از حل مسئله در این حالت, می توانید برای دانش آموزان قویتر مسئله را در حالتی حل کنید که زمان تخلیه شیرها به صورت پارامتر داده شده باشند.

ارزیابی یادگیری:

دانش آموزان باید بتوانند عبارت های گویا را از غیرگویا تشخیص دهند و مقدارهای عددی آنها را در صورت تعریف شدگی به دست آورند و تشخیص دهند که یک عبارت گویا به ازای چه مقدارهایی تعریف شده است و به ازای چه مقدارهایی تعریف نشده است. همچنین دانش آموزان

باید بتوانند در مسائلی که عبارت های گویا رخ می دهند, این گونه عبارت ها را تشکیل دهند و محاسبات جبری با آنها انجام دهند و در مورد آنها نتیجه گیری کنند.

محدوده مطالب

برخی عبارت ها در نگاه اول ممکن است عبارت گویا دیده نشوند ولی پس از ساده کردن تبدیل به عبارت گویا شوند. این گونه مثالها در محدوده این کتاب نیستند و لازم نیست دانش آموزان با این پیچیدگیها درگیر شوند. به هنگام یافتن مقدارهای عددی عبارت های گویا, وارد مفهوم دامنه متغیر نمی شویم و در حد همان تعریف شدگی و تعریف ناشدگی می مانیم.

در محاسبات جبری با عبارت های گویا بهتر است در حد محاسبات ساده که نیازمند پیدا کردن کوچکترین مخرج مشترک نباشد باقی بمانیم. در هر صورت در اعمال جبری بین عبارت های گویا, سراغ مفهوم کوچکترین مخرج مشترک نمی رویم و حداکثر پس از محاسبه, عمل ساده سازی را انجام می دهیم تا عبارت های اضافی را حذف کنیم.

چالشهای احتمالی

در تعریف عبارت های گویا گفته شده است که پس از ساده شدن, عبارت جبری باید به صورت تقسیم دو چندجمله ای بر هم باشد. یک سوال اساسی در عمل ساده کردن آن است که پس از این عمل عموما دامنه تعریف عبارت های جدید به دست آمده با دامنه تعریف عبارت های قبلی فرق می کند. آیا ما حق داریم عبارت جدید ساده شده را برابر همان عبارت قبلی بدانیم؟ مثلا عبارت $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$ پس از ساده کردن برابر $\frac{1}{x}$ می شود, اما دامنه تعریف $\frac{1}{x}$ برابر تمام اعداد ناصفر است اما دامنه تعریف $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$ فقط اعدا مثبت را در بر دارد.

تعریف صحیح و دقیق تساوی عبارت های جبری نیازمند وارد شدن در دامنه تعریف عبارتهای جبری و داشتن یک نگاه تابعی به این گونه عبارت ها است. از آنجا که در این کتاب قصد وارد شدن در

مفهوم تابع و دامنه تعریف عبارت ها را نداریم, نمی توان وارد تعریف دقیق عبارت های گویا شد و بهتر است معلمان دانش آموزان را درگیر این پیچیدگیهای اضافی نکنند و در حد مثالهای معمولی و عبارتهایی که رادیکال ندارند با دانش آموزان کار کنند. البته در صورتی که دانش آموزان توانایی کافی برای درک مفاهیم را دارند وارد شدن در تعریف دقیق تساوی عبارت های جبری اشکالی ندارد. اگر بخواهیم وارد تعریف صحیح و دقیق تساوی دو عبارت جبری شویم باید مفهوم تساوی دو عبارت روی زیرمجموعه های اعداد حقیقی را مطرح کنیم:

«دو عبارت جبری یک متغیره را روی یک زیرمجموعه A از اعداد حقیقی مساوی نامیم هرگاه به ازای هر عدد در A, هر دو عبارت تعریف شده باشند و مقدارهای مساوی داشته باشند.»

تساوی در این تعریف به معنای آن است که دو عبارت جبری به عنوان دو تابع با دامنه A با هم مساوی هستند. در این کتاب این تعریف مورد نظر نیست زیرا با این تعریف دو عبارت گویای $\frac{x^2}{x}$ و x روی همه اعداد حقیقی با هم مساوی نیستند زیرا اولین عبارت در صفر تعریف نشده است. برای آن که در این کتاب بتوان عمل ساده کردن را راحتتر انجام داد و وارد این گونه جزئیات نشویم طبق قرارداد: *عبارت های جبری مساوی آنهایی هستند که روی اشتراک دامنه تعریف آنها, این عبارت ها مقدارهای مساوی داشته باشند.*

البته توصیه اصلی ما آن است که دانش آموزان را وارد این جزئیات نکنید و فقط در صورتی که برای برخی دانش آموزان این گونه سوالات به طور جدی مطرح شد آمادگی پاسخگویی دقیق به آن را داشته باشید.

سوالات نمونه:

1. کدام یک از عبارت های زیر عبارت گویا نیستند.

$$x^2-\sqrt{5} \quad , \quad \frac{\sqrt{2}x^3-x-\sqrt{7}}{x+1} \quad , \quad \frac{\sqrt{x^2}-y^2+z}{z+y} \quad , \quad \frac{\frac{x+1}{y-2}}{x}$$

2. در علوم سال گذشته رابطه بین کار ، نیرو, و جابجایی را دیده اید. اگر نیرو را با f و جابجایی را با d نمایش دهیم این رابطه به صورت زیر قابل بیان است:

کار=f . d

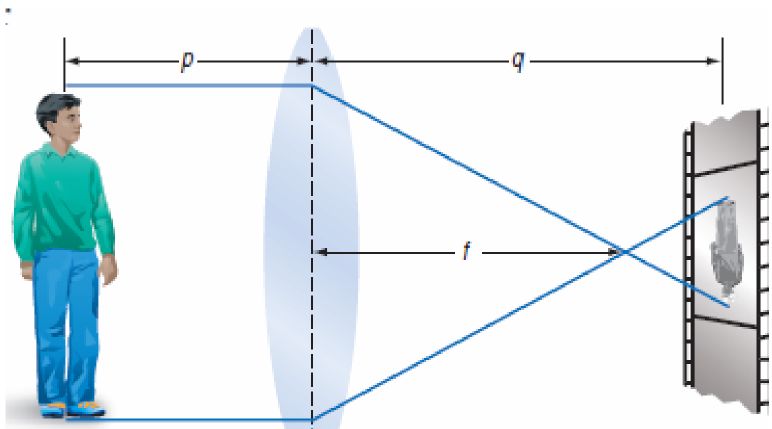
الف) اگر نیرو را نصف کنیم و جابجایی سه برابر شود، کار انجام شده چند برابر می شود (نسبت کار انجام شده در این حالت، به کار انجام شده در حالت اولیه، چقدر است ؟)

ب) اگر 2 واحد از نیرو کم شود و جابجایی 3 واحد بیشتر شود نسبت کار انجام شده در این حالت ، به کار انجام شده در حالت اول، چقدر است ؟

ج) با نیروی اولیه f=5 (5 نیوتن) و جابجایی اولیه d=5/ 5 (5/5 متر) حاصل قسمت قبل را حساب کنید.

3. نشان دهید: "قدر مطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متوالی برابر است با معکوس حاصل ضرب آنها".

4. فاصله کانونی یک عدسی f می باشد. یک شیئ به فاصله p از این عدسی قرار دارد. درصورتی تصویر این شیی روی یک پرده که به فاصله q از عدسی قرار دارد واضح است که رابطه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ بین آنها برقرار باشد:



عدسی

الف) فاصله تصویر تا عدسی را برحسب فاصله کانونی و فاصله شیء تا عدسی به دست آورید.

ب) اگر فاصله کانونی 2 واحد و فاصله شیء تا عدسی 2/5 واحد باشد، فاصله تصویر تا عدسی را به دست آورید.

5. **مستطیلی را در نظر بگیرید که طول و عرض آن اعداد x و y باشند. دایره ای را در نظر بگیرید که محیط آن برابر محیط این مستطیل باشد. نسبت مساحت این دایره به مساحت این مستطیل را به صورت یک عبارت جبری بنویسید. آیا این عبارت جبری یک عبارت گویا است؟ در حالتی که مستطیل بالا مربع باشد, نسبت مساحت آن دایره به مساحت مربع به چه شکل در می آید؟**

6. **عبارت گویایی بسازید که صورت و مخرج آن چندجمله ای درجه 1 با متغیر x باشند و در صفر تعریف شده نباشد و به ازای $x = 2$ مقدار آن برابر 5 باشد. چند تا از این عبارت های گویا می توانید بسازید؟**

7. **دو عبارت گویای $\frac{x-1}{x}$ و $\frac{x}{x-1}$ را در نظر بگیرید. آیا ممکن است این دو عبارت به ازای مقدارهایی از x مقدارهای مساوی داشته باشند؟ چه مقادیری؟**

8. **دو عبارت گویا بسازید که چندجمله ای نباشند ولی جمع آنها چندجمله ای باشد.**

9. **دو عبارت گویا بسازید که چندجمله ای نباشند ولی ضرب آنها چندجمله ای باشد.**

10. **اگر x و y اعدادی باشند که نسبت x به y برابر $\frac{3}{7}$ باشد, در این صورت نسبت $5x-6y$ به $2x+y$ چقدر است؟ آیا می توانید نسبت x^2-y^2 به x^2+3y^2 را نیزتعیین کنید؟**

بخش ساده کردن عبارت های گویا

اهداف بخش:

1- **آشنایی با عبارت های گویای مساوی و ساده کردن عبارت های گویا**

2 – **آشنایی با تقسیم چندجمله ایها برهم**

3- **آشنایی بـا مفـاهیم مقسـوم و مقسـوم علیـه و خـارج قسـمت و باقیمانـده در تقسـیم چندجمله ایها و رابطه بین آنها**

پیش نیاز ها:

- **آشنایی با اتحادها و تجزیه**
- **آشنایی با توان و تقسیم عبارت های توان دار**
- **آشنایی با جمع و ضرب چندجمله ایها و ساده کردن آنها**

واژه های کلیدی:

ساده کردن – تقسیم کردن – مقسوم – مقسوم علیه – خارج قسمت – باقیمانده

نگاه کلی به بخش:

این بخش با یک فعالیت شروع می شود که در آن مقادیر عددی دو عبارت گویا بررسی می شوند که با وجود ظاهر متفاوت, مقدارهای یکسانی به وجود می آورند. در این فعالیت دلیل ایـن واقعـه ارائـه می شود و از طریق این مشاهدات مفهوم عبارت های گویای مساوی و عمل ساده کردن توضـیح داده می شود.

مفهوم عبارتهای گویا (یا جبری) مساوی باید به این صورت ارائه شود که این عبارت ها در جاهایی که هر دو آنها مشترکا تعریف شده اند, مقدارهای مساوی دارند.

تقسیم چندجمله ایها از طریق عبارت های گویایی ارائه شده است که در واقع قابل ساده شدن هستند و حاصل یک چندجمله ای است. از این طریق وارد مفهوم تقسیم چندجمله ایها بر هم و بخشپذیری چندجمله ایها بر هم می شویم.

در تقسیم چندجمله ایها بر هم, فقط روش انجام این عمل به طور مرحله به مرحله ارائه می شود و رابطه اساسی بین مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت و باقیمانده بیان می شود.

ورود به مطلب:

هدف این بخش درک تساوی بین عبارت های گویا و دلیل این تساویها است. مناسب است دو عبارت گویای کاملا متفاوت, اما مساوی, برای دانش آموزان ارائه کنیم و با تقسیم کلاس به دو گروه از آنها بخواهید مقدارهای عددی این عبارتها را به ازای چند مقدار حساب کنند. هر گروه مقدار عددی یکی از این عبارتها را حساب کند. با مقایسه نتایج به دست آمده, از دانش آموزان بخواهید این واقعه را تفسیر کنند و یک نتیجه گیری ارائه کنند و یک حدسیه بسازند. با بررسی درستی حدسیه خود به طور تجربی, سپس سعی کنند یک دلیل منطقی برای این واقعه به دست آورند.

نتیجه این کنکاشها رسیدن به مفهوم تساوی عبارت های گویا و چگونگی تشخیص این تساویها و عمل ساده کردن خواهد بود.

برای ورود به بحث بخشپذیری و تقسیم چندجمله ایها می توان از عبارتهای گویایی استفاده کرد که در واقع ساده می شوند و حاصل یک چندجمله ای است. با بررسی این گونه عبارت ها می توان بخشپذیری و مفهوم تقسیم چندجمله ایها بر هم را به دست آورد.

فعالیت آموزشی:

در ابتدای این بخش یک فعالیت آورده شده است که هدف آن درک مفهوم تساوی عبارت های گویا است.

فعالیت صفحه 152

***بند 1*) در این بند محاسبه مقدار عددی این دو عبارت گویا به ازای اعداد داده شده انجام می شود که اعداد یکسانی از این دو عبارت باید به دست آید. مقایسه این مقادیر, تساوی آنها را باید نشان دهد.**

***بند 2*) در این بند نیز همان عملیات بند (1) باید انجام شود ولی به ازای مقادیر اختیاری و دلخواه خود دانش آموزان. نتیجه به دست آمده همچنان همان تساوی مقدارهای عددی آن دو عبارت است.**

***بند 3*) نتیجه گیری بندهای قبلی باید این باشد که به ازای هر مقداری برای متغیر, دو عبارت مقدارهای یکسانی دارند و باید بتوان با محاسبات, تساوی آنها را نتیجه گرفت. مثلا صورت و مخرج عبارت اول را در x ضرب کنید.**

***بند 4*) با توجه به راهنمایی انجام شده در این بند, با تجزیه صورت و مخرج عبارت دوم آن را به صورت $\frac{x(x+1)}{x(x-1)}$ می نویسیم و با حذف x از صورت و مخرج و ساده کردن آن به عبارت اول می رسیم.**

پس از این فعالیت در چند مثال مفهوم ساده کردن عبارت های گویا توضیح داده شده است و شما می توانید با مثالهای بیشتری مانند مثالهای زیر این مهارت را بهتر آموزش دهید.

1) $\frac{x^2+x}{x^2}$ 2) $\frac{x^2-1}{x+1}$ 3) $\frac{x^3}{x^2+x}$ 4) $\frac{a-b}{b-a}$

5) $\frac{ax+x^2}{ab-bx}$ 6) $\frac{b+b^2}{a+ab}$ 7) $\frac{12x^2-2xy}{16x^3}$

8) $\frac{a^2-2a+1}{a-1}$ 9) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$

در صورتی که با دانش آموزان قویتری سر و کار دارید مناسب است از مثالهایی مانند زیر استفاده کنید.

1) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$ 2) $\dfrac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$

3) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}$ 4) $\dfrac{x^4-9x^2}{x^4-x^3-6x^2}$ 5) $\dfrac{a+b+c}{c^2-(a+b)^2}$

6) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$ 7) $\dfrac{1+\frac{2}{x-1}}{\frac{3}{2x-2}-5}$ 8) $\dfrac{9-m^2}{m^2-7m+12}$

تمرین در کلاس صفحه 153

الف) $\dfrac{a^2-4}{a+2}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{a+2}=a-2$

ب) $\dfrac{ax^3+x^3a}{2a^2x+2ax^2}=\dfrac{2ax^3}{2ax(a+x)}=\dfrac{x^2}{a+x}$

ج) $\dfrac{y^2-4y+3}{y^2+2y-3}=\dfrac{(y-1)(y-3)}{(y-1)(y+3)}=\dfrac{y-3}{y+3}$

مسائل صفحه 153

***مسئله 1*) این مسئله به صورت چند گزینه ای طرح شده است ولی هدف کتاب آموزش سوالات چندگزینه ای نیست و فقط تنوع نوع سوالات مطرح است.**

$$(\frac{1}{r}+\frac{1}{s})\times\frac{s}{r+s}=\frac{s+r}{rs}\times\frac{s}{r+s}=\frac{s(r+s)}{rs(r+s)}=\frac{1}{r}$$

***مسئله 2*)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{6+3+2}{6x}=\dfrac{12}{6x}=\dfrac{2}{x}$

***مسئله 3*)**

الف) $\dfrac{2a^2x^3}{4ax^2}=\dfrac{1}{2}ax$ **ب)** $\dfrac{3x^2-9x}{x^2-9}=\dfrac{3x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{3x}{x+3}$

ج) $\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x-7)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-7}{x+1}$ **د)** $\dfrac{y^2z+y^3}{z^2y+z^3}=\dfrac{y^2(z+y)}{z^2(y+z)}=\dfrac{y^2}{z^2}$

***مسئله 4*)**

الف) $\frac{x^2-1}{x^2-x}\times\frac{4x^2}{x+1}=\frac{4x^2(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=4x$

ب) $\frac{x+1}{x^2-4}\div\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{x+1}{x^2-4}\times\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}=\frac{1}{(x+2)(x-1)}$

ج) $\frac{4x^2-25y^2}{2x^2y+5xy^2}\div\frac{6x^2-15xy}{9x^2y^2}=\frac{4x^2-25y^2}{2x^2y+5xy^2}\times\frac{9x^2y^2}{6x^2-15xy}=\frac{9x^2y^2(2x-5y)(2x+5y)}{xy(2x+5y)\times 3x(2x-5y)}=3y$

مسئله 5)

$$\frac{x^2-4}{10x}\times\frac{5x^2}{x^2-2x}=\frac{5x^2(x+2)(x-2)}{10x\times x(x-2)}=\frac{x+2}{2}$$

مسئله 6) **در این تمرین اشتباهات رایج دانش آموزان مورد توجه قرارگرفته است. حل این تمرین دقت دانش آموزان را بالا می برد. علاوه بر این در صورتی که دانش آموزان در برخی عملیات جبری روی عبارت ها گویا, مشکلاتی داشته باشند, در این تمرین این مشکلات آشکار می شوند و معلمین می توانند سوء فهم های احتمالی را برطرف کنند. حل این تمرین و مشابه های این گونه تمرینات اکیدا توصیه می شود.**

الف) در این تمرین حذف عوامل مشترک در صورت و مخرج باعث شده است دانش آموز جای آنها صفر بگذارد و حاصل را صفر بنویسد.

ب) در این تمرین دانش آموز در تاثیر علامت منفی عبارت دوم فقط آن را روی 1 اثر داده است و روی جمله دوم اثر نداده است.

ج) در این تمرین در قسمت آخر محاسبه, دانش آموز در محاسبه توان دوم x ضریب -1 را نیز به توان دوم رسانده است.

در قسمت بعد به مفهوم تقسیم چندجمله ایها می رسیم. اگرچه این مبحث در فصل چهارم هم قابل ارائه بود ولی برای آن که دانش آموزان مدت بیشتری را با محاسبات نمادین کار کنند و این مفاهیم در ذهن آنها مانوس تر شود, بسیاری از این مباحث تا این فصل به تاخیر انداخته شده است.

پس از زمینه سازیهای لازم برای درک مفهوم تقسیم چندجمله ایها, مناسب است این عمل را با تقسیم اعداد طبیعی بر هم مقایسه کنید و روش تقسیم اعداد طبیعی بر هم را مرور کنید. روش تقسیم چندجمله ایها برهم, مرحله به مرحله ارائه شده است. در مرحله اول تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای مطرح شده است که قوانین آن همان قوانین تقسیم عبارت های توان دار است.

در مرحله دوم, تقسیم چند جمله ایها بر یک جمله ایها ارائه شده است که نکته کلیدی آن تساوی $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ است. با یادآوری این تساوی و این که به جای نمادهای a و b و c هر عبارتی را می توان قرار داد؛ تقسیم چندجمله ایها بر یک جمله ایها را به تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای تبدیل کنید.

اگر مثالهای کتاب برای دانش آموزان کلاس شما سنگین است بهتر است با مثالهای ساده تری مانند مثالهای زیر این مرحله را آموزش دهید.

$$\frac{y^4-y^2}{2y^2}\ ,\ \frac{2x^3+4x^2-6x}{x}\ ,\ \frac{4x+8x^2}{2x}\ ,\ \frac{x+x^2}{x}$$

در آخرین مرحله, تقسیم چندجمله ای بر چندجمله ای مطرح می شود که در اینجا آلگوریتم یا روش تقسیم ارائه شده است. مناسب است که این آلگوریتم در چند مثال بیان شود و این مثالها به گونه ای باشند که به ترتیب در یک مرحله و در دو مرحله و در سه مرحله به جواب برسندو در این مثالها باقیمانده ای وجود نداشته باشد.

سپس مثالهایی که در یک مرحله تمام می شوند ولی باقیمانده دارند ارائه شود و مفهوم باقیمانده در همان مثال توضیح داده شود که درجه آن از درجه مقسوم علیه کمتر است و زمانی که به این حالت می رسیم عمل تقسیم پایان یافته است. نهایتا رابطه اساسی بین مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت و این که باقیمانده یا صفر است یا یک چندجمله ایی است که درجه آن اکیدا از درجه مقسوم علیه

کمتر است بیان شود.

در مثالها, دانش آموزان را به این نکته توجه دهید که در آلگوریتم تقسیم, چندجمله ایها باید به شکل استاندارد نوشته شوند و تعمدا مثالهایی را بنویسید که چندجمله ایها به صورت استاندارد نوشته نشده باشند تا اگر دانش آموزان به این نکته توجه نداشتند آنها را به این نکته متذکر شوید.

***توصیه مهم:* از بیان نکات تستی در ابتدای آموزش مفاهیم, اکیدا خودداری کنید. این عمل یادگیری دانش آموز را مختل می کند و درک او را از مفاهیم سطحی می کند و دانش آموز قادر نخواهد بود از این گونه مفاهیم در زمینه های دیگر استفاده کند.**

تمرین در کلاس صفحه 157

هدف از این تمرین استفاده از آلگوریتم تقسیم است و حتما دانش آموزان باید مرحله به مرحله عمل تقسیم را انجام دهند.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4+(5-3a)x^3-5ax^2-x+a & x-a \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^4+3ax^3} & 3x^3+5x^2-1 \\
\quad 5x^3-5ax^2-x+a & \\
\quad \underline{-5x^3+5ax^2} & \\
\qquad -x+a & \\
\qquad \underline{x-a} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

مسائل صفحه 157

***مسئله 1*) الف)** $\dfrac{24x^2y^2}{4xy^2}=6x$ **ب)** $\dfrac{6x^3b^2+3x^2b}{3x^2b}=\dfrac{6x^3b^2}{3x^2b}+\dfrac{3x^2b}{3x^2b}=2xb+1$

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2+x & x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3+x^2} & x \\
\quad x &
\end{array}$$

ج) **خارج قسمت این تقسیم برابر** x **و باقیمانده آن نیز برابر** x **است و**

داریم $x^3-2x^2+x=(x^2-x)x+x$

***مسئله 2*) عمل تقسیم را انجام می دهیم. چون مقسوم علیه چندجمله ای درجه 1 است, باقیمانده یک عدد خواهد بود.**

$$\begin{array}{l|l} -2x^2+4x+7 & x-2 \\ \cline{2-2} & -2x \\ \underline{2x^2-4x} & \\ 7 & \end{array}$$

پس باقیمانده 7 است. این مسئله راه حل کوتاهتر هم دارد ولی هدف این مسئله انجام عمل تقسیم و دیدن مستقیم باقیمانده است.

***مسئله 3*) عمل تقسیم را انجام می دهیم و باقیمانده را حساب می کنیم. در این مسئله نمی خواهیم از راههای میانبر استفاده کنیم و می خواهیم عمل تقسیم انجام شود.**

$$\begin{array}{l|l} x^3+a & x+1 \\ \cline{2-2} & x^2-x+1 \\ \underline{-x^3-x^2} & \\ -x^2+a & \\ \underline{x^2+x} & \\ x+a & \\ \underline{-x-1} & \\ a-1 & \end{array}$$

بنابراین باقیمانده برابر $a-1$ است و برای صفر شدن آن لازم است $a=1$.

***مسئله4*) راه حل مستقیم این مسئله انجام عمل تقسیم است. یک راه حل دیگر می تواند این باشد که یکی یکی چندجمله ایهای داده شده را در مخرج عبارت ضرب کنیم و ببینیم کدامیک از این حاصلضربها برابر صورت این عبارت می شود.**

$$
\begin{array}{r|l}
y^3 - y^2 - y + 1 & \underline{-y+1} \\
\underline{-y^3 + y^2} & -y^2+1 \\
-y + 1 & \\
\underline{y + 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

بنابراین $\frac{y^3 - y^2 - y + 1}{1 - y} = 1 - y^2$.

ارزیابی یادگیری:

دانش آموزان باید بتوانند اعمال ساده سازی کسرها را در مثالهای ساده از طریق تجزیه هایی که در محدوده این کتاب بحث شده است انجام دهند. به ویژه از عمل تقسیم چندجمله ایها, در ساده سازیها استفاده کنند. همچنین دانش آموزان باید بتوانند تساوی دو عبارت گویا را بررسی کنند.

محدوده مطالب:

کار با عبارتهای پیچیده و راههای میانبر تستی خارج از اهداف این بخش است و لازم است دانش آموزان بتوانند با ابزارهای مطرح شده درکتاب به سوالات و مسائل جواب دهند. ساده سازی عبارتهایی که محتاج تجزیه های پیچیده است و در محدوده بحث تجزیه این کتاب نیستند خارج از بحث این بخش است.

سطح بالاتر:

برای دانش آموزان قویتر که تبحر بیشتری در محاسبات نمادین و کار با کسرها دارند می توانید از مثالهای پیچیده تر هم استفاده کنید. در عمل تقسیم نیز می توانید تقسیم چندجمله ایهای چند متغیره

را هم مطرح کنید که یکی از متغیرها باید متغیر اصلی باشد و بقیه مانند پارامتر باشند.

همچنین می توانید سعی کنید که آلگوریتم تقسیم را با شیوه های استدلالی به دست آورید.

سوالات نمونه:

- عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2+(1-y)x-y}{x^2+y^2-2xy} \quad , \quad \frac{a^2x^2-b^2}{2a^2x^2+4abx+2b^2} \quad , \quad \frac{y^2-9}{y^2+2y-3}$$

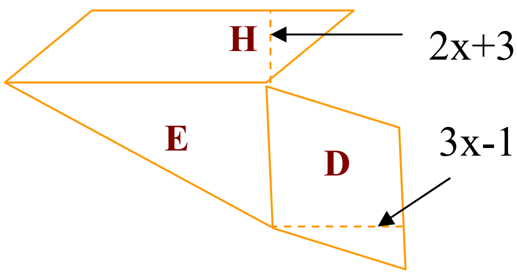
- اشتباه ساده سازی زیر در کجا است؟

$$\frac{4x^2-2(y+z)x+yz}{4x^2-y^2}=\frac{(2x-y)(2x-z)}{(2x-y)(2x+y)}=\frac{2x-z}{2x+y}=-\frac{z}{y}$$

- یک چندجمله ای درجه 4 بسازید که بر x^2+1 بخشپذیر باشد و مقدار عددی آن به ازای $x=0$ برابر 5 شود. چند تا از این چندجمله ایها می توان ساخت.

- در چند جمله ای $ax^3+(1-a)x^2+3$ مقدار a چقدر باشد تا این چندجمله ای بر $x+1$ بخشپذیر باشد.

- مساحت متوازی الاضلاعی $\left(2x^2-3x-2\right)$ واحد مربع است اگر قاعده این متوازی الاضلاع $x-2$ واحد باشد ارتفاع آن را به دست آورید.
- در چند ضلعی زیرمساحت متوازی الاضلاع H عبارت است از $8x^2+10x-3$ واحد مربع و ارتفاع این متوازی الاضلاع $2x+3$ واحد است . مساحت متوازی الاضلاع D برابر $6x^2+13x-5$ واحد مربع و ارتفاع آن : $3x-1$ واحد می باشد مساحت مثلث قائم الزاویه E را بدست آورید.



- **شیب خطی که از دو نقطه** $A\left(\frac{2}{m}, \frac{3}{n}\right)$ **و** $B\left(\frac{6}{n}, \frac{1}{m}\right)$ **می گذرد را به دست آورید و آن را ساده کنید.**

- **باقیمانده تقسیم چند جمله ای** $4x^3+5x^2+x-m$ **بر** $x+2$ **عدد 4 است . مقدار** m **را به دست آورید.**

بخش عبارت های رادیکالی

اهداف بخش:

- **آشنایی با عبارت های جبری که در آنها از ریشه گیری استفاده شده است.**
- **آشنایی با اعمال جبری روی عبارت های رادیکالی**
- **آشنایی با گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها عبارت رادیکالی است.**

پیشنیازها:

- **آشنایی با محاسبات جبری روی رادیکالها**
- **آشنایی با محاسبات جبری روی عبارت های گویا و کسری و ساده کردن**
- **آشنایی با اتحادها و تجزیه**

واژه های کلیدی

عبارت رادیکالی – گویا کردن مخرج کسرها – اعمال جبری

نگاه کلی به بخش:

در این بخش عبارت های رادیکالی به عنوان نوعی از عبارت های جبری معرفی می شوند که در آنها از عمل ریشه گیری هم استفاده شده است. سعی شده است رخ دادن این گونه عبارت ها به طور

طبیعی در مثالهای هندسی نشان داده شود. بقیه مطالب همان محاسبات جبری روی این گونه عبارت ها است که تحت قوانین مربوط اعمال جبری بین اعداد و اعداد کسری و عمل ریشه گیری انجام می شود. در این بخش مفهوم خاص گویا کردن مخرج کسرها نیز آمده است که در برخی کاربردها و محاسبات با این گونه عبارت ها اهمیت دارد.

ورود به مطلب :

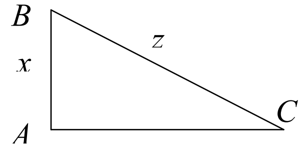
عبارت های رادیکالی نوع خاصی از عبارتهای جبری هستند و قبلا هم در معرفی عبارت های جبری به آنها برخورد کرده ایم. برای رسیدن به عبارتهای رادیکالی مناسب است در زمینه ای واقعی و محاسباتی طبیعی, رخ دادن این گونه عبارت ها آشکار شود و سپس این گونه عبارت ها را به عنوان عبارت های رادیکالی نامگذاری کنیم. مثلا استفاده از مسائلی که در ارتباط با مثلثهای قائم الزاویه باشند و لازم باشد طول وتر را بر حسب طول اضلاع دیگر به دست آوریم, می تواند زمینه مناسبی برای این کار باشد.

فعالیت آموزشی :

این بخش با تعریف ساده ای از عبارت های رادیکالی آغاز می شود و پس از ورود به مطلب به یک تمرین در کلاس می رسیم.

تمرین در کلاس صفحه 158:

بند(1): **ابتدا طول ضلع دیگر را به دست می آوریم.**



$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 = z^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{z^2 - x^2}$$

مناسب است تذکر داده شود که چون طول یک پاره خط عددی مثبت است, در بالا فقط ریشه دوم مثبت $z^2 - x^2$ در نظر گرفته شده است. حالا می توانیم بنویسیم:

$$\text{محیط مثلث} = x + z + \sqrt{z^2 - x^2}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} x\sqrt{z^2 - x^2}$$

بند(2): **در این بند طول اولیه ضلع مربع $\sqrt{z}$ است و طول ضلع مربع در حالت بعد $x + \sqrt{z}$ خواهد بود. پس مساحت مربع در حالت دوم برابر $(x + \sqrt{z})^2$ خواهد بود و میزان افزایش مساحت برابر است با**

$$(x + \sqrt{z})^2 - z = x^2 + z + 2x\sqrt{z} - z = x^2 + 2x\sqrt{z}$$

محاسبات جبری بین عبارت های رادیکالی در حالت کلی تعریف می شود و مناسب است مثالهایی در این زمینه مانند زیر ارائه کنید.

$$\sqrt{z} + 2\sqrt{z} = 3\sqrt{z} \quad , \quad \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad , \quad (\sqrt{z} + y)(\sqrt{z} - y) = z - y^2$$

سپس بحث گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها عبارت رادیکالی هستند مطرح می شود و در چند مثال چگونگی این عمل بررسی می شود. البته مثالهای مورد بررسی نباید پیچیدگی داشته باشند و با یک کاربرد مستقیم اتحادها باید این عمل قابل انجام باشد. توجه داشته باشید که قبلا در فصل سوم گویا کردن کسرهای عددی طرح شده بود و در آنجا گویا کردن به معنای آن بود که در مخرج عدد رادیکالی نداشته باشیم, اما در اینجا عبارت های جبری مطرح هستند و در مخرج, عبارت جبری رادیکالی نباید داشته باشیم. توجه کنید که حضور اعداد رادیکالی به معنای عبارت جبری رادیکالی نیست. مثلا $\sqrt{2}x - 1$ عبارت رادیکالی محسوب نمی شود.

مسائل صفحه 160

مسئله 1) الف) $\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{x\times\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\times\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{xy}}{y}$ **ب)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1\times\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{1\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ **د)** $\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}=\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a-1}$

ه) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

مسئله 2) اگر این عبارت را A **بنامیم داریم** $A\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a^2-b^2$ **بنابراین**

$$A=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a^2-b^2)\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{(a-b)(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

مسئله 3)

الف) $\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\sqrt{a}-1-(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{-2}{a-1}=\frac{2}{1-a}$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}+(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=\frac{x+1-x}{x+\sqrt{x}}=\frac{1\times(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$

$$=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$$

ج) $1+\sqrt{y}+\frac{y}{1-\sqrt{y}}=\frac{(1+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})+y}{1-\sqrt{y}}=\frac{1-y+y}{1-\sqrt{y}}=\frac{1\times(1+\sqrt{y})}{(1-\sqrt{y})(1+\sqrt{y})}=\frac{1+\sqrt{y}}{1-y}$

ارزشیابی یادگیری:

دانش آموزان باید بتوانند عبارت های جبری رادیکالی را شناسایی کنند و در مثالهای واقعی این گونه عبارت ها را تشکیل دهند و روی آنها محاسبات جبری انجام دهند. به ویژه باید بتوانند در حالتهای ساده عمل گویا کردن مخرج کسرها را انجام دهند.

محدوده مطالب:

در این قسمت نیز محاسبات پیچیده مورد نظر نیستند و محاسبات باید در یک یـا دو مرحلـه کامـل شوند. علاوه بر این, نیاز مثالها و مسائل مورد بررسی به اتحادها و تجزیه, باید در حد بیـان شـده در کتاب باشد. مثلا گویا کردن عبارت ها باید در حد عبارت هایی به شکل زیر باشد.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{y}-1} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}\pm 1} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

چالشهای احتمالی

برخی عبارت های رادیکالی ممکن است پس از ساده کردن به صورت عبارت گویا یـا چندجملـه ای درآیند. مثلا $\sqrt{x^4}$ در واقع همان x^2 است, پس باید آن را یک چندجمله ای حساب کنـیم. بنـابراین به نظر می رسد که در تعریف عبارت های رادیکالی نیز باید یادآور شویم که پس از ساده شدن اگر در آن, عمل ریشه گیری وجود داشت آن را یک عبارت رادیکالی بنامیم. البته شیوه بهتر تعریـف آن است که دسته جدید عبارتهای تعریف شده, دسته قبلی را در بر داشته باشد. مـثلا اعـداد خودشـان یک جمله ای هم محسوب می شوند و یک جمله ایها خودشان چندجمله ای هم محسوب می شوند و چندجمله ایها خودشان عبارت گویا هم محسوب می شوند. پس مناسب تر آن است که عبارت هـای رادیکالی هم کلیترین عبارتهای جبری باشند که شامل عبارتهای گویا هم باشند. البته در کتـاب وارد این دقتهای در تعریف نشده ایم و لزومی ندارد دانش آموزان را وارد ایـن چالشـها کنـیم. امـا بـرای خودمان می توانیم تعریف کنیم که عبارت های رادیکالی آن دسته از عبارتهـای جبـری هسـتند کـه برابر هیچ عبارت گویایی نیستند. با این تعریف, برای تشخیص رادیکالی بودن یک عبارت, حتما پس از ساده شدن باید به آن عبارت نگاه کنیم و رادیکالی بودن یا نبودن را تشخیص دهیم.

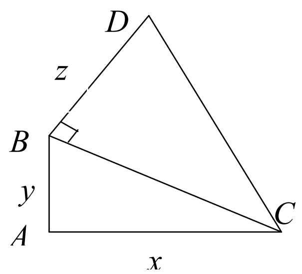
دامنه تعریف عبارت های رادیکالی عموما برابر تمامی اعداد حقیقی نیست و در محاسبات با این گونه عبارت ها, حتما به دانش آموزان متذکر شوید که این محاسبات با فرض تعریف شده بودن آن عبارت ها انجام می شود.

سطح بالاتر

برای دانش آموزان قویتر می توان مثالهای پیچیده تری از عبارت های رادیکالی را در زمینه های هندسی و فیزیکی نیز مطرح ساخت و برای آنها محاسبات پیچیده تری را مطرح نمود.

سؤالات نمونه:

- **در شکل زیر دو مثلث قائم الزاویه روی هم قرار گرفته اند.**



$AC = x \ , \ AB = y \ , \ BD = z$

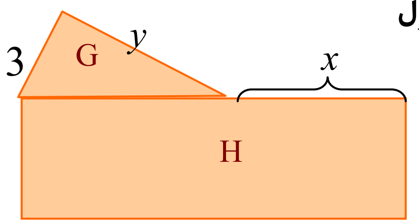
محیط چهارضلعی $ABCD$, مساحت چهارضلعی $ABCD$, نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت مثلث ABC را به صورت عبارت های جبری بنویسید.

اگر مساحت این دو مثلث مساوی شده باشند, ضلع BD را به صورت یک عبارت جبری بر حسب x و y به دست آورید.

- **یک عبارت جبری بر حسب متغیر x بنویسید که جمع آن با عبارت $x^3-\sqrt{x^2+1}$ یک چندجمله ای باشد و به ازای $x=2$ مقدار عددی آن $1+\sqrt{5}$ باشد.**

- **یک عبارت جبری بر حسب متغیر x بنویسیدکه ضرب آن $\sqrt[3]{x}-1$ یک چندجمله ای باشـد و مقدار عددی آن به ازای $x=0$ برابر 2 باشد.**

- **عبارت $\frac{x+\sqrt{y}}{y-x^2}$ را به صورت کسری بنویسید که صورت آن عدد 1 باشد.**



•شکل مقابل را در نظر بگیریدوتر مثلث قائم الزاویه G بخشی از طول مستطیل H است ، اگر مساحت مستطیل 4 واحد مربع باشد:

الف) عرض مستطیل را به دست آورید.

ب) محیط مستطیل را برحسب x,y بنویسید: