

فصل دوم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

عین‌حقیق
توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
استناد

ریشه و توان عددهای حقیقی

فعالیت

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه نزدیکی با هم دارند :

۱- با هر تساوی توانی یک تساوی ریشه‌ای بنویسید؛ همچنین متناظر هر تساوی ریشه‌ای یک تساوی توانی بنویسید. مانند

نمونه‌ها :

$$(-3)^2 = -27 \leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt{81} = 9 \leftrightarrow 9^2 = 81$$

$$2^4 = 16 \leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \leftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$(0/25)^2 = 0/0625 \leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \leftrightarrow$$

$$(0/5)^2 = 0/25 \leftrightarrow$$

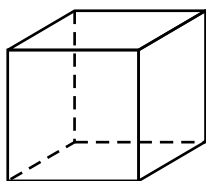
$$\sqrt{100} = 10 \leftrightarrow$$

$$(-9)^2 = 81 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \leftrightarrow$$

۲- در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید. برای بعضی می‌توانید عددهای تقریبی بنویسید.

عدد	۸	۲۰	۲۷	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰
ریشه سوم	۲		۳	۵	۳۵	۱۰



کاردکلاس

۱- حجم مخزن آبی به شکل مکعب برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را

حدس زده و حدس خود را آزمایش کنید.

می‌دانیم که هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد حجم آن برابر a^3 متر مکعب است.

احمد: بنابراین طول ریشه سوم ۲۵ یعنی $\sqrt[3]{25}$ می‌باشد. فکر می‌کنم $\sqrt[3]{25} = 2/8$ چون ۳

$$= \sqrt[3]{27} \text{ آیا}$$

$$(2/8)^3 = 25$$

$$(2/8)^3 = (2/8)^2(2/8) = 21/852 \approx 21/85$$

به ۲۵ نزدیک است!

محسن: باید $\sqrt[3]{25}$ را به دست آوریم؛ چون $25 < 27$ پس $\sqrt[3]{25} < 3$. بهتر است عدد $2/9$ را امتحان کنم.

$$\begin{aligned} (2/9)^3 &= (2/9)^2 (2/9) \\ &= 24/729 \\ &= 24/8 \end{aligned}$$

با تقریب کمتر از ۱/۰ به ۲۵ خیلی نزدیک است پس $2/9 \approx \sqrt[3]{25}$ می گیریم.
دیر: درست است ریشه سوم ۲۵ تقریبی به دست می آید و به طور تقریبی آن را برابر ۲/۹ می گیریم.

$$\sqrt[3]{25} \approx 2/9$$

احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دیر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید می توانید تا چندین رقم اعشار؛ مقدار تقریبی آن را به دست آورید، اما هیچ گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری کاملاً به دست نمی آید. اگر قدرت ماشین حسابتان بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می دهد.
به همین دلیل است که برای مقدار دقیق ریشه سوم از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می کنیم.

$\sqrt[3]{25}$ به جای مقدار دقیق ریشه سوم ۲۵ به کار می رود اما در عمل با مقدارهای تقریبی آن کار می کنیم.

در ریاضیات هر جا بخواهیم با رادیکال ها به جای مقدارهای دقیق کار می کنیم. اما در عمل مقدار تقریبی ۲/۹ را، که محسن به دست آورده بود، برای $\sqrt[3]{25}$ می توانیم در نظر بگیریم.

۲- مقدار تقریبی یا دقیق ریشه ها را محاسبه و روی محور اعداد، مانند نمونه ها، نشان دهید.

$\sqrt{2} = 1/41$	$\sqrt[3]{1} =$	$\sqrt[3]{3} = 1/7$	$\sqrt[3]{4} =$	$\sqrt{5} =$
$\sqrt{7} =$	$\sqrt{8} =$	$\sqrt[3]{9} =$	$\sqrt[3]{-8} =$	$\sqrt{15} =$

۳- مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

الف) چون $36 < 30 < 25$ پس $6 = \sqrt{36} < \sqrt{30} < \sqrt{25} = 5$

ب) $0 < \sqrt{70} < 0$ (ج) $3 < \sqrt{10} < 0$

د) $0 < \sqrt{17} < 0$ (ه) $0 < \sqrt[3]{20} < 0$

۴- کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) $\sqrt{10} \approx 3$ با تقریب کمتر از ۱

ب) $\sqrt{5} = 2/2$ با تقریب کمتر از ۱

ج) $\sqrt{5} = 3$ با تقریب کمتر از ۱/۰

د) $\sqrt[3]{100} = 4$ با تقریب کمتر از ۱

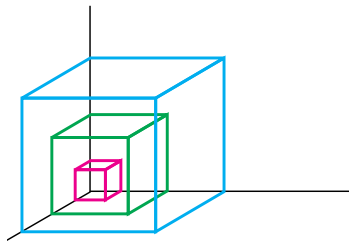
ه) $-6 = \sqrt[3]{-200}$ با تقریب کمتر از ۱/۰

۵- زیر رادیکال (جای خالی) عددی بگذارید که نامساوی ها برقرار باشند.

الف) $4 < \sqrt{\quad} < 5$

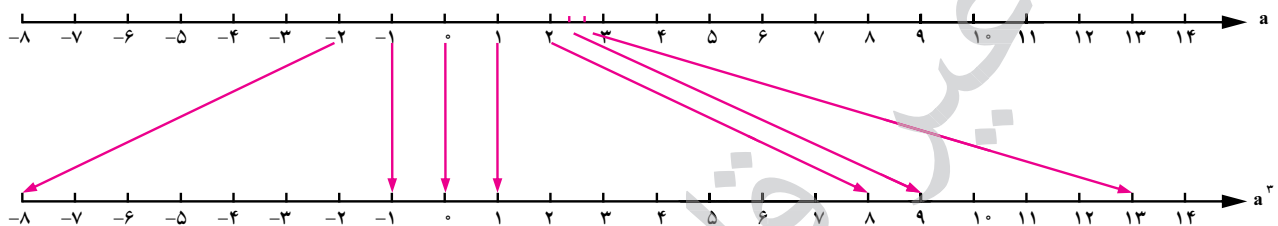
$$2 < \sqrt{\quad} < 5 \quad \text{ب)}$$

$$90 < \sqrt[3]{\quad} < 100 \quad \text{ج)}$$



۶- سه مکعب مانند شکل مقابل به صورت تودرتو واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۲۷ می‌باشد. طول ضلع مکعب میانی چه اعدادی می‌تواند بوده باشد؟

۷- در شکل زیر دو محور اعداد رسم شده است. هر عدد در محور بالا را به مکعب آن عدد در محور پایینی با یک خط نشان وصل کنید. به عکس هر عدد روی محور پایین را به یک عدد در محور بالا نشان کنید.



فعالیت

۱- مشابه آنچه در باب ریشه‌های دوم و سوم گفتیم می‌توانیم ریشه‌های چهارم و پنجم را معرفی کنیم. چون $2^4 = 16$ گوئیم ۲ یک ریشه چهارم ۱۶ است. مشابهاً $(-2)^4 = 16$ ، پس -۲ نیز یک ریشه چهارم ۱۶ است.



ریشه‌های چهارم یک عدد مثبت عددهایی هستند که وقتی به توان چهار می‌رسند برابر آن عدد شوند.

ریشه‌های چهارم را با نماد $\sqrt[4]{\quad}$ نشان می‌دهند و ۴ را فرجه رادیکال می‌نامند. ریشه‌های پنجم را چگونه تعریف می‌کنید؟

ریشه پنجم هر عدد (مثبت یا منفی) عددی است که وقتی به توان ۵ می‌رسد برابر آن می‌رسد برابر آن شود.

چون $2^5 = 32$ پس $\sqrt[5]{32} = 2$. همچنین $(-2)^5 = -32$ ، لذا $\sqrt[5]{-32} = -2$.

۲- جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	۳	-۳	-۴	۴			۰/۵	-۰/۵	-۰/۱	
توان چهارم	۸۱		۲۵۶		۶۲۵	۱۰۰۰۰				۲۰۰

دبیر: ریشه چهارم ۲۵۶ چه عددی است؟

محسن: ۲۵۶ دارای دو ریشه چهارم قرینه است که عددهای ۴ و -۴ هستند.

به هر حال $\sqrt[4]{256}$ را برابر کدام عدد بگیریم؟

دبیر: اگر صحبت از ریشه چهارم عدد مثبت مورد نظر است حاصل $\sqrt[4]{256}$ فقط برابر ۴ است؛ اما اگر سخن از ریشه‌ها باشد

۴ و -۴ را باید در نظر گرفت؛ به عبارت دیگر $\sqrt[4]{256} = 4$.

۳- آیا ۱۶- ریشه چهارم دارد؟ چرا؟

۴- تکمیل کنید

هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یکدیگرند. عدد منفی ریشه چهارم

کارد کلاس

۱- جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	۲	-۲	۳		-۱/۵	۴	-۱۱			-۵
توان پنجم				-۲۴۳				-۱۰۰۰۰۰	۲۵۰۰	

۲- چه عددهایی ریشه پنجم آنها با خودشان برابر است؟

۳- جاهای خالی را در جدول زیر تکمیل کنید.

عدد	۲۴۳	-۲۴۳		-۳۲		۷۱	۱۹	۲۰	-۳۰	-۱	۱۱۰۰۰۰
ریشه پنجم			-۴		۵	\approx	\approx				

تمرین

۱- محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{-۰/۰۰۰۰۳۲} =$$

$$\sqrt[5]{۰/۰۰۰۰۳۲۲} =$$

$$\sqrt[5]{-۳۱۲۵} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{1000000}} =$$

۲- $a = 0.00243$ و $b = 0.0032$ ؛ $\sqrt[5]{a}$ و $\sqrt[5]{b}$ را محاسبه کنید.

۳- می‌دانیم $0 < a < b < 1$. ابتدا حدس بزنید و سپس در \bigcirc علامت $<$ یا $>$ بگذارید.

$$\sqrt[5]{b} \bigcirc \sqrt[5]{a}$$

۴- این عددها را روی محور مشخص کنید.

$$\sqrt[5]{100}$$

$$\sqrt[5]{-110}$$

$$\sqrt[5]{21}$$

$$\sqrt[5]{-250}$$

۵- می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$ ، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۶- در جاهای خالی یکی از علامت‌های $<$ ، $>$ و یا $=$ قرار دهید.

$$(0.1)^5 \bigcirc (0.1)^3$$

$$(0.1)^5 \bigcirc (0.1)^2$$

$$2^5 \bigcirc 2^3$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^2$$

$$\sqrt[5]{0.00001} \bigcirc 0.1$$

۷- هرگاه $\sqrt[n]{-1} = -1$ ، n چگونه عددی است؟ $\sqrt[n]{a^5} = a$ برای هر مقدار (مثبت یا منفی) a درست است؟

۸- محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{19} \times \sqrt[5]{19^9} =$$

$$\sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{2} =$$

ریشه n ام

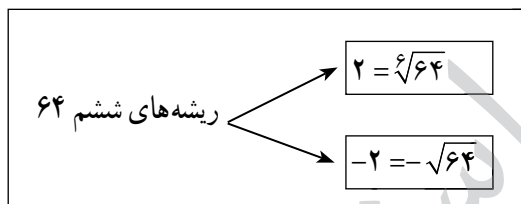
فعالیت

می‌توانید مطابق الگوهایی که برای تعریف ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم عمل کردیم برای سایر ریشه‌ها عمل کنید. مثلاً برای ریشه ششم، از کجا شروع کنیم؟
 احمد: توان ششم را ملاک کار قرار می‌دهیم.
 درست است. مثلاً با مثال $2^6 = 64$ شروع کنید.

ریشه‌های ششم ۶۴ عددی هستند که وقتی به توان شش می‌رسند برابر ۶۴ شوند.

عدد ۲ یکی از آنهاست.

فرهاد: ۲- نیز یک ریشه ششم ۶۴ است زیرا $64 = (-2)^6$ درست است.



پس ۶۴ دو ریشه ششم دارد که قرینه‌اند.

درست است. اما وقتی ریشه ششم موردنظر است آن را برابر ۲ می‌گیریم، به عبارت دیگر $\sqrt[6]{64} = 2$

فرهاد: عیناً مانند ریشه‌های دوم و چهارم می‌باشد.

اینک به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱- آیا ۶۴- هم ریشه ششم دارد؟ توضیح دهید.

۲- برای یک عدد طبیعی و دلخواه مانند n (n می‌تواند ۶، ۷، ۸ و یا هر عدد طبیعی که تصور می‌کنید باشد) ریشه n ام را تعریف

کنید:

هرگاه n عدد طبیعی باشد، ریشه (ریشه‌های) n ام عدد a ، عدد (عددهایی) مانند b هستند به طوری که توان برابر a باشد.

ریشه n ام a را به شکل $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و n را فرجه رادیکال می‌نامیم.

- ۳- n را یک بار زوج و یک بار فرد بگیرید. مشخص کنید که چرا هر عدد مثبت برای وقتی که n زوج باشد دو ریشه n ام دارد. آیا این دو ریشه قرینه‌اند؟ و برای وقتی که n فرد باشد، هر عدد (مثبت یا منفی) یک ریشه n ام دارد؟
- ۴- چرا وقتی n زوج است، عددهای منفی ریشه n ام ندارند؟

کار در کلاس

- ۱- $\sqrt[4]{-2^6}$ و $\sqrt[4]{2^6}$ و $\sqrt[4]{-3^6}$ و $\sqrt[4]{3^6}$ را به دست آورید؟
- ۲- فرض کنیم n عددی زوج است. توضیح دهید که چرا تساوی $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ درست است (a عددی دلخواه است، مثبت یا منفی!).
- ۳- فرض کنیم n عددی فرد باشد، نشان دهید که $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- ۴- آیا تساوی $(\sqrt[n]{a})^n = a$ درست است؟ توضیح دهید.
- با استفاده از این تساوی ثابت کنید برای هر دو عدد مثبت a و b ، $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{b}$.
- ۵- حساب کنید.

$$\sqrt[4]{(1-7)^2} \quad \sqrt[4]{(-16)} \quad \sqrt[4]{3^4} \quad \sqrt[4]{(-\frac{1}{5})^4} \quad \sqrt[4]{(1-\frac{1}{3})^4}$$

۶-

$$\sqrt[4]{0/000000256} \quad \sqrt[4]{256} \quad \sqrt[4]{0/00000128} \quad \sqrt[4]{-128}$$

- ۷- یکی از علامت‌های $<$ ، $>$ و $=$ را بین هر زوج از عددها قرار دهید تا عبارت درست به دست آید.

$$3^4 \bigcirc 3^6 \quad (-\frac{1}{2})^4 \bigcirc (-\frac{1}{2})^6 \quad (\frac{1}{2})^5 \bigcirc (\frac{1}{2})^6$$

$$(\sqrt{2})^2 \bigcirc (\sqrt{2})^2 \quad \sqrt[4]{3} \bigcirc \sqrt[4]{3} \quad \sqrt[4]{0/00032} \bigcirc \sqrt[4]{0/000064}$$

فعالیت

کدام عبارت درست است؟

$$\sqrt{(\sqrt[4]{a})} = \sqrt[4]{a} \quad \text{(ج)} \quad \sqrt[n]{\sqrt{a}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{(ب)} \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(الف)}$$

$$\sqrt[4]{(-2)^{22}} = 4 \quad \text{(و)} \quad \sqrt[4]{2^{22}} \quad \text{(هـ)} \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{(د)}$$

$$\sqrt[4]{100000000} < \sqrt[4]{10000000} \quad \text{(ز)} \quad \sqrt[4]{72} \approx 2 \quad \text{(ح)} \quad \text{با کمتر از ۱ واحد تقریب}$$

تمرین

۱- ثابت کنید تساوی

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{b}$$

برای وقتی که k فرد باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b برقرار است.

۲- ثابت کنید برای هر دو عدد طبیعی m و k ؛

$$\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m \quad (a > 0)$$

۳- ثابت کنید هر گاه n فرد باشد؛

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

۴- ثابت کنید عددهای $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2}$ ، $\sqrt[6]{2}$ با هم برابرند.

۵- مثالی از چند رادیکال از یک عدد همانند مثال‌های پرسش ۴ ارائه دهید که همه رادیکال‌ها با هم برابر شوند.

۶- با توجه به اینکه هر عدد، توان یکم خودش است ($a^1 = a$) از پرسش‌های ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

پیر فابیل استناد

توان های گویا

فعالیت

پدر احمد یک زیست شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می کند. در یک آزمایش یک نوع باکتری کشت داده شد که در شرایط مساعد، وزن این باکتری ها در هر ساعت ۲ برابر می شود. در لحظه شروع ۱ گرم باکتری کشت داده شد. پس در پایان ساعت اول ۲ گرم، پایان ساعت دوم ۴ گرم و در پایان ساعت n ام 2^n گرم وزن این باکتری ها شده است.

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

احمد از پدرش پرسید آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می توانیم وزن باکتری ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟ پدرش گفت: تو فکر می کنی وزن باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر شده است؟ احمد گفت: حدس می زنم وزن آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است. پدرش گفت: $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟ احمد گفت: نمی دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت باکتری ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری ها باید برابر $b \times b = b^2$ شده باشد. اما می دانیم پس از یک ساعت باکتری ها دو برابر می شوند، پس $b^2 = 2$ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است). نتیجه جالبی است! $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. مشابهاً برای نماهای دیگر تعریف می کنیم: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ ، $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ؛ همچنین برای اعداد دیگر، $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ ، $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$ ، $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

کار در کلاس

اکنون با روش مشابه عددهای زیر را با استفاده از نماد رادیکال بنویسید.

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3^{\frac{1}{4}} =$$

$$3^{\frac{1}{2}} =$$

$$5^{\frac{1}{2}} =$$

$$5^{\frac{1}{3}} =$$

$$6^{\frac{1}{4}} =$$

فعالیت

اجازه: پس می توانیم نماهای کسری، با کسرهای صورت ۱ را تعریف کنیم؟ درست است:

فرض می کنیم a یک عدد حقیقی مثبت باشد، برای هر عدد طبیعی n ، توان کسری را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

احمد: اگر صورت کسرها عددی غیر از یک باشد، چه می‌شود؟
پرسش بسیار خوبی است. در ریاضیات، برای هر پرسش معقولی باید الگو و تعریفی ارائه دهیم. در توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل می‌کنیم:

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3 \quad (\text{قاعده ضرب نماها})$$

می‌توانیم از این الگو پیروی کنیم

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2} (= \sqrt[3]{4})$$

احمد: خیلی جالب است!

$a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n توان کسری را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

کار در کلاس

۱- تساوی‌های زیر با نماهای کسری را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{4}{5}} = 3^{4 \times \frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$$

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$4^{\frac{1}{5}} =$$

$$4^{\frac{3}{5}} =$$

$$4^{\frac{5}{5}} =$$

$$5^{\frac{2}{4}} =$$

$$6^{\frac{5}{8}} =$$

$$6^{\frac{3}{8}} =$$

۲- رادیکال‌ها را به صورت توان‌های کسری بنویسید.

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[4]{2^5} =$$

$$\sqrt[3]{5^4} =$$

$$\sqrt[5]{19} =$$

$$\sqrt[5]{64} =$$

$$\sqrt[3]{-27} =$$

۳- می‌دانیم توان منفی برابر معکوس توان مثبت است:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

اکنون محاسبه کنید:

$$4^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2 \times 4}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{4}$$

$$25^{-\frac{1}{2}} =$$

$$125^{-\frac{1}{3}} =$$

$$17^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1000^{-\frac{1}{3}} =$$

$$10000^{-\frac{1}{4}} =$$

$$25^{-\frac{2}{4}} =$$

فعالیت

۱- می‌دانیم $a = (\sqrt[k]{a})^k$. با استفاده از این نشان دهید:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

۲- مشابه قاعده توان‌های مکرر برای نمای اعداد طبیعی، $a > 0$ ، m و n طبیعی $(a^n)^m = a^{nm}$

ثابت کنید برای هر دو عدد گویای r و s و هر عدد $a > 0$ ، $(a^r)^s = a^{rs}$

راهنمایی: $r = \frac{m}{n}$ و $s = \frac{p}{q}$ بگیرید

$$(a^{rs})^{nq} = [(a^r)^s]^{nq}$$

اما

$$\begin{aligned}(a^r)^s &= (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} \\ &= \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} \\ a^{rs} &= a^{\frac{m \times p}{n \times q}}\end{aligned}$$

تمرین

۱- هر یک از توان‌های کسری را به صورت رادیکال بنویسید:

$$16^{\frac{1}{3}} =$$

$$5^{\frac{1}{5}} =$$

$$5^{\frac{2}{5}} =$$

$$a^{\frac{2}{5}} =$$

$$3^{\frac{1}{4}} =$$

$$4^{\frac{2}{3}} =$$

$$32^{-\frac{1}{5}} =$$

$$32^{\frac{2}{5}} =$$

$$17^{-\frac{1}{4}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

۲- هر یک از رادیکال‌ها را به صورت توان کسری بنویسید:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{a^4} =$$

$$\sqrt[3]{a} =$$

$$\sqrt[4]{a^3} =$$

$$\sqrt[n]{a^2} =$$

$$\sqrt[n]{a^4} =$$

$$\sqrt[5]{32} =$$

$$\sqrt[5]{32} =$$

$$\sqrt[5]{2^{10}} =$$

$$\sqrt[3]{7^2} =$$

$$\sqrt[6]{a^2} =$$

$$\sqrt[4]{a^4} =$$

در تمرین‌های ۳ تا ۷، a همواره مثبت است.

۳- نشان دهید که تساوی زیر درست است:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$$

$$(a > 0)$$

۴- می‌دانیم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ (خواص کسرها $k \neq 0$). ثابت کنید $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}}$ ($a > 0$).

۵- نشان دهید برای هر دو عدد گویای r, s ($r, s > 0$)

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \neq 0)$$

۶- حساب کنید.

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$$

مسئله حل کنیم

۱- فرض کنیم $0 < a < 1$. نشان دهید $a^n < a^{n-1}$. آیا برای هر عدد طبیعی n ، $a^n < a^{n-1}$.

۲- هرگاه $a > 1$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ،

$$0 < a^{n-1} < a^n$$

۳- ریشه‌های دوم (جذر) و سوم $\sqrt[3]{a}$ و $\sqrt[2]{a}$ را حساب کنید. کدام بزرگ‌تر است؟

۴- هرگاه $0 < a < 1$ و $n \geq 3$ ، ثابت کنید

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n-1]{a}$$

۵- $(a > 0)$ ، ثابت کنید برای هر عدد گویای r (مثبت یا منفی) a^r همواره عددی مثبت است.

پیر فابیل استناد

عبارت‌های جبری

فعالیت

شما در سال گذشته برخی از اتحادهای جبری مهم را فرا گرفته‌اید. از جمله اتحاد اول (مربع مجموع دو عدد)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (*)$$

چرا به این تساوی «اتحاد» می‌گوییم؟

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 \\ &= 4 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

چرا به تساوی بالا اتحاد نمی‌گوییم؟

احمد: تساوی بالا یک نمونه از اتحاد اول است.

درست است؛ اما به هر حال واژه «اتحاد» به چه معنی است؟

فرهاد: اتحاد یک تساوی است که برای همه مقادیر a ، b برقرار باشد. در حالی که تساوی $2x+1=0$ فقط برای یک مقدار

خاص، $x=-\frac{1}{2}$ ، برقرار است که این تساوی را معادله می‌نامیم و عدد $x=-\frac{1}{2}$ را ریشه یا جواب معادله نامیده‌ایم.

درست است شما به جواب خیلی نزدیک شده‌اید. آیا $(*)$ را می‌توانید بدون استفاده از حروف لاتین معنی و بیان کنید؟

فرهاد:

مربع مجموع هر دو عدد برابر است با مربع عدد اول به علاوه دو برابر حاصل ضرب آن دو عدد به علاوه مربع عدد دوم.

بسیار خوب: ما در ریاضیات برای آنکه عبارت‌های زبانی (کلامی) را مختصرتر و دقیق‌تر بیان کنیم از حروف استفاده می‌کنیم.

اکنون شما حاصل $(a-b)^2$ را بنویسید.

فرهاد: چون $(*)$ برای هر دو عدد a و b برقرار است، می‌توانیم به جای b ، $-b$ قرار دهیم (در سرتاسر اتحاد):

$$(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (**)$$

و یا

گاهی هر دو اتحاد $(*)$ و $(**)$ را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

اکنون شما حاصل $(a+b)^3$ را پیدا کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= \dots\dots\dots (a+b) = \dots\dots\dots$$

با جمع جملات متشابه، ساده تر می شود.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(۱)

و این اتحاد به نام اتحاد مکعب مجموع معروف است. باز چون اتحاد است، b را در سرتاسر اتحاد، به $-b$ تبدیل کنید و اتحاد دیگری به دست آورید؛

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + \dots$$

و یا، اگر درست عمل کرده باشید، به دست می آوریم

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(۲)

– یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل یعنی اتحاد $(**)$ به دست آورید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

کار در کلاس

اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه را بنویسیم، مانند

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

(۳)

گوییم عبارت سمت چپ را به حاصل ضرب تجزیه کرده ایم. «تجزیه» یعنی به صورت «ضرب» نوشته ایم، زیرا

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$

در واقع عبارت سمت چپ (۳) به صورت حاصل ضرب سه عبارت تجزیه شده است.

مانند آنکه در برخی محاسبات عددی ناچاریم یک عدد را به حاصل ضرب چند عدد تجزیه کنیم، در جبر عبارت های جبری نیز

در مواردی لازم است که عبارت را به عبارت های کوچک تر (با درجه کمتر) تجزیه کنیم.

۱- اکنون شما عبارت $a^3 + b^3$ را به حاصل ضرب تجزیه کنید: از اتحاد مکعب مجموع استفاده کنید:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a+b)^2(a+b) - \dots \\ &= \end{aligned}$$

۲- در اتحاد

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

(۴)

b را با $-b$ جایگزین کنید و اتحاد دیگری به دست آورید!

$$a + (-b)^3 = \dots$$

(۵)

۳- دو اتحاد (۴) و (۵) را با هم بنویسید.

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) (\quad)$$

فعالیت

۱- عبارت های جبری $x^3 + 1$ و $x^3 - 1$ را تجزیه کنید.

$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 =$$

۲- کدام یک از تساوی‌ها درست و کدام نادرست‌اند؟

(الف) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

(ب) $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

(ج) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(د) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$

(هـ) $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) = a^4 + b^4$

۳- وقتی عبارتی برابر حاصل ضرب دو عبارت جبری دیگر است، برای مثال

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

گوییم $a^2 - b^2$ یک مضرب $a-b$ است. هم‌چنین $a^2 - b^2$ یک مضرب $a+b$ نیز می‌باشد. مانند تجزیه در اعداد، هر یک از عامل‌های $a-b$ و $a+b$ را یک مقسوم‌علیه $a^2 - b^2$ می‌نامیم. لذا $a^2 - b^2$ مضرب مشترک $a-b$ و $a+b$ است. - اکنون شما دو مضرب دیگر برای $a-b$ نام ببرید.

- سه مضرب دیگر برای $a+b$ نام ببرید.

- آیا $a-b$ و $a+b$ مضرب مشترک دیگری دارند؟ نام ببرید.

- یک مضرب مشترک $a+b$ و $a^2 + b^2$ برابر کدام است؟

(الف) $a+b$ (ب) $a^2 + b^2$ (ج) $a^2 + b^2$ (د) $a^2 - b^2$

- کدام یک از عبارت‌ها مضرب مشترک $a-b$ و $a^2 - b^2$ نمی‌باشد؟

(الف) $a^2 + b^2$ (ب) $(a-b)(a^2 - b^2)$ (ج) $a^2 - b^2$ (د) $5(a^2 - b^2)$

مانند حساب اعداد، برای جبر عبارت‌ها، تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

هر دو عبارت جبری دارای مضرب مشترک‌های زیادی هستند، اما مضرب مشترکی که کوچک‌ترین درجه حروف را داراست به نام کوچک‌ترین مضرب مشترک آن دو عبارت نامیده می‌شود.

برای مثال، $a^2 - b^2$ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $a-b$ و $a+b$ است. اما $(a-b)(a^2 - b^2)$ گرچه مضرب مشترک $a-b$ و $a^2 - b^2$ است، اما کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عبارت نمی‌باشد.

فرهاد: اجازه؟ می‌توانیم بگوییم هر مضرب مشترک بر هر یک از عبارت‌های مربوطه قابل قسمت است؟

دبیر: درست است. $a^2 - b^2$ هم بر $a-b$ قابل قسمت است و هم بر $a^2 - b^2$.

زیرا $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

و هر عبارت بر خودش قابل قسمت است.

احمد: چگونه یک عبارت جبری بر عبارت جبری دیگر تقسیم می‌شود.

دبیر: دو عبارت را از بزرگ‌ترین درجه از چپ به راست مرتب می‌کنیم. سپس عبارت با درجه بزرگ‌تر را بر عبارت با درجه

کوچک‌تر مانند تقسیم اعداد، تقسیم می‌کنیم. به تقسیم فکر کنید و جزئیات را یادداشت کنید.

$2x^2$ بر x تقسیم می‌شود.

$$2x^2 = 2x^2 \div x$$

علامت‌ها قرینه می‌شود :

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 4x^2 + 1 \mid x + 1 \\ \underline{2x^2 - 6x + 6} \\ -2x^3 + 2x^2 \\ \underline{-6x^2 + 1} \\ \pm 6x^2 \pm 6x \\ \underline{6x + 1} \\ -6x \pm 6 \\ \underline{-5} \end{array}$$

در نتیجه (*) $2x^3 - 4x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - 6x + 6) - 5$ اگر سمت راست را ضرب کنید باید سمت چپ به دست آید.
- پس خارج قسمت $2x^2 - 6x + 6$ و باقیمانده -5 می‌باشد. اکنون این تقسیم‌ها را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x + 3 \mid x - 1 \\ 2x^5 + x \mid x - 1 \end{array}$$

در هر مورد عبارت تقسیم را مانند (*) نوشته و تقسیم را آزمون کنید.
- جمع و تفریق عبارت‌های جبری کسری همانند جمع و تفریق عبارت‌های عددی با استفاده از مضرب مشترک برای مخرج‌ها انجام می‌شود.
به عنوان مثال حاصل عبارت جبری زیر را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3-1}$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک x^3-1 و $x-1$ برابر x^3-1 است. هم‌چنین کوچک‌ترین مضرب مشترک x^3+1 و $x+1$ برابر x^3+1 است. پس کوچک‌ترین مضرب مشترک (مخرج مشترک) را برابر $(x^3+1)(x^3-1)$ می‌گیریم:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{(x^3+1)(x^3-1)}$$

مخرج کسر جدید را به ترتیب بر مخرج هر یک از کسرهای سمت راست تقسیم کرده و خارج قسمت را در صورت آن کسر ضرب می‌کنیم؛ علامت جلو کسرها فراموش نشود:

$$(x^3-1)(x^3+1) = (x-1) \underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{اولین خارج قسمت}} (x^3+1)$$

$$(x^3-1)(x^3+1) = (x+1) \underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{دومین خارج قسمت}} (x^3+1)$$

$$(x^3-1)(x^3+1) = (x^3+1) \underbrace{(x^3-1)}_{\text{سومین خارج قسمت}}$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x^3 - 1) \underbrace{(x^3 + 1)}_{\text{چهارمین خارج قسمت}}$$

$$A = (x^3 + x + 1)(x^3 + 1) - (x^3 - x + 1)(x^3 - 1) + x^3 - 1 - (x^3 + 1) \\ = 2x^3 + 2x^3 = 2(x^3 + x^3)$$

$$\text{حاصل} = \frac{2(x^3 + x^3)}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}$$

اکنون شما هر یک از عبارت‌ها را حل کرده و حاصل را حتی المقدور ساده کنید :

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x - 1} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{2}{x + y} + \frac{3}{5} \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{1}{x^4 - y^4} + \frac{2}{x^2 - y^2} + \frac{3}{x + y} \quad \text{(د)}$$

کار در کلاس

۱- عبارت $x^4 + y^4$ پس از تجزیه با کدام عبارت برابر است؟

$$(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 - y^2 + \sqrt{2}xy) \quad \text{(الف)}$$

$$(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy) \quad \text{(ب)}$$

$$(x + y)(x^2 - x^2y + xy^2 + y^3) \quad \text{(ج)}$$

$$(x - y)(x^2 + x^2y + xy^2 + y^3) \quad \text{(د)}$$

۲- $x + y$ مقسوم علیه کدام یک از زوج عبارت‌ها است؟

$$x^2 - y^2, x^2 + y^2 \quad \text{(الف)} \quad x^2 - y^2, (x + y)^2 \quad \text{(ب)}$$

$$2(x + y), x^2 + y^2 \quad \text{(ج)} \quad x^2 - y^2, (x - y)^2 \quad \text{(د)}$$

۳- یک مقسوم علیه مشترک دو عبارت $(x^2 - y^2)^3$ و $18(x^6 - y^6)$ را پیدا کنید.

۴- در صورت امکان هر کسر را ساده کنید.

$$\frac{(a + b)^3}{a^3 + b^3} \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{(a + b)^3}{a^3 - b^3} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{(a - b)^3}{a^3 - b^3} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} \quad \text{(و)}$$

$$\frac{a^4 + b^4}{a + b} \quad \text{(هـ)}$$

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = \quad \text{(د)}$$

۵- با مخرج مشترک گیری کسرها را جمع و تفریق کنید.

$$\frac{1}{x^4-1} + \frac{5}{x^2+1} - \frac{6}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8}$$

۶- تجزیه کنید

الف) $x^{16}-16$

ب) x^2+27

ج) x^5-2

راهنمایی: $(2 = (\sqrt[5]{2})^5)$

تمرین

۱- عبارت ها را تا حد امکان تجزیه کنید.

ج) $(x^2+(a+b)x+ab)(x-a)(x-b)$

ب) x^8-1

الف) x^8-3

۲- عبارت های عددی را طوری ساده کنید که رادیکال در مخرج نداشته باشند. (گویا کردن کسرها گنگ)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}}$$

۳- می دانیم $2 = (\sqrt{2})^2$. حال اگر با استفاده از یک ماشین حساب ساده $\sqrt{2} = \dots$ می گیریم. به جای $\sqrt{2}$ در تساوی بالا قرار

دهید و به توان ۲ برسانید.

- چرا برابر ۲ نمی شود؟ چه مقدار برای $\sqrt{2}$ اختیار کنیم تا توان دوم آن برابر ۲ شود؟

فرهنگ نوشتن

○ سه عدد ۳، ۴ و ۵ را یک سه تایی فیثاغورثی می نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$