

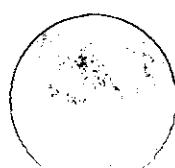
نویسندها: روبرت مکینتاش و دنیس جرت
متجمان: زهرا گلک
مدرس مرکز تربیت معلم الزهرا - زنجان
زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

آموزش حل مسئله ریاضی: تحقیق یک چشم انداز، مروری بر ادبیات تحقیق

اشاره

آزمایشگاه آموزشی منطقه‌ای شمال غرب در پورتلند ایالت اورگان^۱، یک سازمان تحقیقی غیرانتفاعی است که برای آموزشگران و سیاست‌گذاران در ایالت‌های شمال غربی آلاسکا^۲، آیداهو^۳، مونتانا^۴، اورگان و واشنگتن^۵، خدمات و منابع ارایه می‌دهد. این مرکز، برای معلمان ریاضی و علوم، از پیش‌دستانی تا پایه‌ی دوازدهم، خدمات تکنیکی و فرستادهای پیشرفته‌ای، تحقیقات بر مبنای کلاس درس، دسترسی به کتابخانه‌ای که منابع تدریس و محصولاتی مانند ویدئو، نشریات، کتب‌های آموزشی و مدل‌های تدریس برای حمایت از تدریس استاندارد محور را امانت می‌دهد، فراهم می‌کند.

در سال ۱۹۹۹، مرکز آموزش ریاضیات و علوم^۶، یک مدل حل مسئله‌ی ریاضی ابداع کرد که معلمان، از پیش‌دستانی تا پایه‌ی دوازدهم، می‌توانند از آن برای تقویت تدریس و برنامه‌ی درسی خود با استفاده از حل مسئله‌ی باز-پاسخ، کمک بگیرند. این مدل شامل تکلیف‌های کلاسی، راهنمای تصحیح برای ارزیابی عملکرد دانش آموزان نسبت به آن تکلیف‌ها، و نمونه‌ی کاری دانش آموزان است. این تکلیف‌ها، دانش آموزان را به طور فعال، درگیر مسائلی مانند نظریه‌ی اعداد، محاسبات، هندسه، تخمین زدن، احتمالات، آمار و جبر می‌کند. راهنمای تصحیح، برای تدریس آگاهی بخش است و معلمان را در ارزیابی عملکرد دانش آموزان در زمینه‌ی مشخصه‌های اصلی حل مسئله، یاری می‌کند. این مشخصه‌ها شامل درک مفهومی راهبردها و نحوه‌ی استدلال، محاسبه و اجرا، بصیرت‌های ریاضی و ارتباطات هستند. این مدل، هم‌چنین، شامل توسعه‌ی حرفة‌ای فشرده نیز می‌باشد. این مقاله، به مرور ادبیات مربوط به مشخصه‌ها و ویژگی‌های اصلی فرایندهای یادگیری و آموزش ریاضیات از طریق حل مسئله‌ی باز-پاسخ^۷ می‌پردازد. ادبیات پژوهشی و تحقیق در مورد حل مسئله‌ی مؤثر، برای طراحی مدل حل مسئله‌ی ریاضی NWREL، آگاهی بخش بود.



مقدمه

«یک مسأله ضرورت‌با به دست آوردن پاسخ صحیح حل نمی‌شود. یک مسأله به راستی حل نشده است مگر این که بادگیرنده بفهمد که چه کرده است و بداند چرا آن کارها مناسب بوده است.»
ویلیام آ. بروتل، سنجش فهم و درک^۹ (۱۹۴۶)

مورد حل مسأله‌ی باز-پاسخ

باز-پاسخ، و این که بنهایین راه تدریس و ارزشیابی آن چگونه است، وجود ندارد.

این موضوع‌ها، عنوان این تک‌نگاشت^{۱۰} می‌باشد. این مقاله، با مرور تحقیق‌ها و ادبیات رایج درباره روشهای مؤثر برای آموزش حل مسأله، دیدگاهی درباره معنی و مفهوم حل مسأله‌ی باز-پاسخ در ریاضیات مدرسه‌ای، فراهم می‌کند.

حل مسأله‌ی باز-پاسخ چیست؟

در حل مسأله‌ی باز-پاسخ، مسأله، چندین پاسخ احتمالی خواهد داشت که می‌توان آن‌ها را به چندین روش به دست آورد و تمرکز نه بر روی پاسخ مسأله، بلکه بر شیوه‌های رسیدن به پاسخ است. حل مسأله‌ی واقعی، مستلزم مسأله‌ای است که کمی فراتر از سطح مهارت‌های دانش آموزان باشد به طوری که او به طور خوب به خودی نداند که از کدام روش حل مسأله استفاده کند. مسأله باید برای دانش آموز غیرمعمولی، چالش برانگیز و ناآشنا بوده و در عین حال ناامیدکننده نباشد (بکر^{۱۱} و شیمادا^{۱۲}، ۱۹۹۷).

در حل مسأله‌ی باز-پاسخ، دانش آموزان مستول اتخاذ بسیاری از تصمیماتی هستند که در گذشته مسئولیت این تصمیم‌گیری‌ها به عهده‌ی معلمان و کتاب‌های درسی بود.

دو دهه از زمانی که شورای ملی معلمان ریاضی^{۱۳} (NCTM) در بیانیه‌ای برای عمل^{۱۴} (۱۹۸۰) توصیه کرد که حل مسأله باید نقطه‌ی تمرکز اصلی آموزش ریاضی باشد، گذشته است. شورای ملی معلمان ریاضی در استانداردهای برنامه‌ی درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه‌ای (۱۹۸۹)، هدف اصلی آموزش ریاضی را توسعه‌ی قدرت ریاضی دانش آموزان بدین گونه معرفی کرد: «توانایی فرد در کشف کردن، حدسیه سازی، استدلال منطقی، به اضافه‌ی تووانایی استفاده‌ی مؤثر از روشهای گوناگون ریاضی برای حل مسأله‌های غیرمعمولی».

با توجه به نتایج ضعیف دانش آموزان امریکایی در بخش حل مسأله‌ی سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضیات و علوم^{۱۵} (TIMSS) می‌توان اقتضاؤت کرد که دانش آموزان هنوز انتظارات جامعه‌ی آموزش ریاضی را برآورده نکرده‌اند (پیک^{۱۶}، ۱۹۹۶، ۱۹۹۷؛ تاکاهیرا^{۱۷}، گونزالس^{۱۸}، فریز^{۱۹} و سالگانیک^{۲۰}، ۱۹۹۸). با وجود تقاضاها و درخواست‌های راه رسانی برای حل مسأله در آموزش ریاضی، انتقال از آموزش حقایق و رویه‌های ریاضی به آموزش همراه با تأکید بر فهم و درک ریاضی و مهارت‌های فکر، کند و مشکل بوده است. بسیاری از معلمان مجبوب نشده‌اند که شیوه‌های سنتی باید کنار گذاشته شوند. اکثر آن‌هایی هم که مایل به تغییر هستند، اطمینان ندارند که چگونه باید این کار را انجام دهند. یکی از مشکلات این است که اجتماعی براین که منظور از حل مسأله چیست - به خصوص در

بفهمیم^{۱۰} (شورای ملی تحقیق^{۱۱}، ۱۹۸۹).

یادگیری ریاضی به وسیلهٔ درگیر شدن با مسائلهای چالش برانگیز و باز-پاسخ، در خدمت انواع یادگیری‌های واگر است. ماهیت فعل و متنوع حل مسئله، به دانش آموزانی که شیوه‌های یادگیری مختلفی دارند، کمک می‌کند تا فهم و درک ریاضی خود را گسترش داده و آن را نشان دهند (مویر^{۱۲}، کی^{۱۳} و گرامپ^{۱۴}، ۱۹۹۷). رویکردهای یادگیری سنتی که تکیه بر یادگیری طوطی وار و راهبردهای تدریسی معلم-محور^{۱۵} دارند، اغلب توانایی پاسخ‌گویی به نیازهای آموزشی بسیاری از دانش آموزانی را که شاید یادگیرنده‌های فعالی باشند یا نیازمند راههای متنوعی برای وارد شدن به برنامه‌ی درسی هستند، ندارند. یادگیری از طریق حل مسئلهٔ باز-پاسخ، به دانش آموزان کمک می‌کند تا فهم و درکی را که منعطف بوده و می‌تواند با موقعیت‌های جدید سازگار شود و برای یادگیری چیزهای جدید استفاده شود را توسعه دهند (هیبرت^{۱۶}، کارپتر^{۱۷}، فینما^{۱۸} و فیوسن^{۱۹}، وین^{۲۰}، موری^{۲۱}، اولویر^{۲۲} و هیومن^{۲۳}، ۱۹۹۷). آن‌ها توضیح می‌دهند که یادگیری مفهومی، بهترین روش برای یادگیری در یک جهان در حال تغییر و غیرقابل پیش‌بینی است. با این وجود، مفیدبودن تنها دلیل برای یادگیری مفهومی نیست. یاد گرفتن مفهومی و در عین حال به طور علمی و دقیق، باریاضیات به عنوان یک موضوع هماهنگی دارد. هیبرت می‌گوید: «زمانی که ما قواعد کار کردن با نشانه‌ها را در یک صفحه به خاطر می‌سپاریم ممکن است چیزی یاد بگیریم، ولی ریاضیات را یاد نمی‌گیریم. دانستن یک موضوع به معنای رفتن به درون آن و مشاهده‌ی چگونگی کارکرد اجزا، چگونگی ارتباط اجزا با یکدیگر و این که چرا این گونه کار می‌کنند، می‌باشد».

بنابه اظهار هیبرت و همکاران (۱۹۹۷)، وقتی دانش آموزان با ایده‌های ریاضی مواجه می‌شوند که علاقه و چالش را در یک زمینه‌ی حل مسئلهٔ باز-پاسخ بر می‌انگذزد، احتمال بیشتری هست که انواع پاداش‌های درونی را تجربه کنند و این احساس آن‌ها را با جریان حل مسئله، فعلانه درگیر می‌کند. اما دانش آموزانی که به حفظ کردن روى می‌آورند، قادر فهم و درک بوده و احتمالاً احساس رضایت اندکی خواهد داشت و شاید به طور کامل از یادگیری دست بکشد. به گفته‌ی هیبرت، در حقیقت شواهد نشان می‌دهند که اگر دانش آموزان، با تکرار و به شکل طوطی وار، به حفظ کردن و تمرین کردن رویه‌ها پردازند، برایشان مشکل خواهد بود که در آینده دوباره به این مفاهیم برگشته

دانش آموز برای تصمیم گیری در این خصوص، که کدام روش یا رویه برای حل مسئلهٔ باز-پاسخ باید درنظر گرفته شود، به دانش و تجربه‌های قبلی خود درباره مسائلهای مرتبط متکی خواهد بود. او باید رویه‌ی خود را بسازد و یکی یکی آن‌ها را امتحان کند تا این که به پاسخ برسد. سپس این موارد را بررسی کرده و برای دیگران، تجربه‌ی حل مسئلهٔ خود را شرح دهد و فرایند تفکر خود را ببرخی از آن‌ها مفید و برخی نامفید هستند. این مرحله‌ی بررسی، باعث فهم عمیق و درک او از مسئله شده و به شفاف شدن تفکر او در خصوص شیوه‌های مؤثر حل مسئله و چگونگی ارتباط مسئله و شیوه‌های مورد استفاده ای او با سایر مسائلهای ای حوزه‌های ریاضی، کمک خواهد کرد.

یکی از مسئولیت‌های کلیدی معلمان هم، انتخاب و ارایه‌ی مسائلهای مناسب است. معلم با انتخاب مسائلهای «خوب»، شرایط مناسب را برای دانش آموزان فراهم می‌کند تا آن‌ها درگیر فرایند معنادار حل مسئله شوند. این بدان معناست که مسئله باید: ● باز-پاسخ باشد، یعنی شیوه‌های متنوع حل و پاسخ‌های چندگانه را ارائه کند؛

- به مفاهیم مهم ریاضی اشاره کند؛
- دانش آموزان را جذب کرده و به چالش بکشد؛
- با یادگیری قبلی دانش آموز مرتبط باشد.

چرا باید حل مسئلهٔ باز-پاسخ آموزش داده شود؟

برای کمک به جوانان، برای این که مسئله حل کن‌های بهتری باشند، علاوه بر این که باید آن‌ها را برای ریاضی وار فکر کردن آماده نمود، باید آن‌ها را آماده کنیم که به چالش‌های زندگی، با اطمینان به توانایی حل مسئلهٔ خود نگاه کنند. تفکر و مهارت‌های ضروری برای حل مسائلهای ریاضی، به سایر حوزه‌های زندگی هم گسترش می‌باید. نویسنده‌گان گزارش تکان دهنده‌ی «همه کس به حساب می‌آید: گزارشی به ملت درباره‌ی آیینه‌ی آموزش ریاضی» این مسئله را این گونه بیان کرده‌اند:

«تجربه باشیوه‌های گوناگون تفکر ریاضی، قدرت ریاضی را می‌سازد. یک ظرفیت ذهنی بالازش فزاینده در این دوره‌ی فن آوری که هر فرد را قادر به مطالعه‌ی نقادانه، شناسایی نارسانی‌ها، تشخیص یک سویه‌نگری‌ها، ارزیابی خطرات، و ارایه‌ی پیشنهادهای بدیل می‌کند. ریاضیات این قدرت را به ما می‌دهد که جهان اشباع شده از اطلاعاتی را که در آن زندگی می‌کنیم، بهتر

زمینه مدار (از دنیای واقعی) برانگیخته شود. [از این گذشته]، حل مسأله به عنوان یک سرگرمی^{۳۸}، یک فعالیت تفریحی که اغلب به عنوان پاداش یا فراغت از مطالعات معمولی مطرح می‌شود، مورد استفاده قرار گرفته است. [بالآخره]، حل مسأله به عنوان یک تمرین^{۳۹}، که احتمالاً رایج ترین نوع استفاده است، برای تقویت مهارت‌ها و مفاهیمی که به صورت مستقیم آموزش داده می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

زمانی که حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تأکید بر یافتن تکلیف‌ها و مسأله‌های جالب توجهی است که به آشکار ساختن یک مفهوم یا رویه‌ی ریاضی کمک می‌کند. برای استفاده از حل مسأله به عنوان زمینه، به عنوان مثال، [تصور کنید که] معلمی می‌خواهد مفهوم کسرها را نشان دهد و برای این کار از گروه‌هایی از دانش آموزان می‌خواهد که دو نکه آبنبات کشی را به نحوی تقسیم کنند که به هر کدام سهم مساوی برسد. با ارایه‌ی این زمینه‌ی حل مسأله، معلم اهداف چندگانه‌ای را دربال می‌کند که عبارت اند از ایجاد فرستاده‌ای برای دانش آموزان جهت کشف مفاهیم کسر با استفاده از یک وسیله‌ی آشنا و مطلوب (انگلیزش)؛ کمک به درک عینی تر مفاهیم (تمرین)؛ و ارایه‌ی یک دلیل منطقی برای یادگیری مفهوم کسر (توجیه کردن).

حل مسأله به عنوان یک مهارت. طرفداران این دیدگاه، مهارت‌های حل مسأله را به عنوان یک موضوع جدگانه در برنامه‌ی درسی می‌بینند نه این که آن را در سرتاسر برنامه و نه در طول آن به عنوان ابزاری برای توسعه‌ی درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای بینند. آن‌ها مجموعه‌ای از رویه‌های عمومی (یا قواعد سرانگشتی) را برای حل مسأله به دانش آموزان تدریس می‌کنند. نظر کشیدن یک تصویر، بازگشت به عقب، تهیه‌ی یک فهرست و نظایر آن – و به آن‌ها تمرین‌هایی می‌دهند تا بتوانند از این رویه‌ها برای حل مسأله‌های معمولی استفاده کنند. با این حال، زمانی که حل مسأله به عنوان مجموعه‌ای از مهارت‌ها درنظر گرفته می‌شود، این مهارت‌ها اغلب در سلسله مراتبی قرار می‌گیرند که در آن، از دانش آموزان انتظار می‌رود ابتدا در حل مسأله‌های معمولی به مهارت بررسند و پس به مسأله‌های غیرمعمولی پردازند. درنتیجه به جای آن که حل کردن مسأله‌های غیرمعمولی به تمام دانش آموزان آموزش داده شود، اغلب تنها به دانش آموزان سطح بالا آموزش داده می‌شود. [پس] وقتی که اهداف آموزشی حل مسأله تعریف می‌شود، معلمان تمایل دارند که از تمایز بین آموزش حل مسأله به

و درک عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی که در پس آن رویه‌ها قرار دارد، پیدا کنند. دو پژوهشگر به نام‌های جرج بکر و شیگرو شیمادا (۱۹۹۷) نتیجه گیری می‌کنند که «دروس مبتنی بر حل مسأله‌ی باز-پاسخ که این مسأله‌ها مضمون اصلی آن‌ها باشند، بالقوه بزرای بهبود تدریس و یادگیری ریاضی غنی هستند».

با قبول اهمیت حل مسأله برای یادگیری ریاضی، راهبران آموزشی در دو دهه‌ی گذشته، حل مسأله را به تمرکز اصلی در اصلاح استانداردها تبدیل ساخته‌اند. در بهار ۲۰۰۰، شورای ملی معلمان ریاضی، هنگام انتشار اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای که در واقع تجدید گزارش ۱۹۸۹ این شورا در مورد استانداردهای ارزیابی و برنامه‌ی درسی برای ریاضیات مدرسه‌ای بود، تعهد خود را نسبت به حل مسأله، دوباره تجدید کرد (NCTM ۲۰۰۰). مانند گزارش اصلی، استانداردهای به روز شده‌ی این شورا، حل مسأله را به عنوان یک مؤلفه‌ی اصلی آموزش ریاضی برای تمامی دوره‌های تحصیلی شناخته است.

به علاوه، بسیاری از ایالت‌ها، محتوا و استانداردهای اجرایی و ارزیابی‌های مبتنی بر استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی را که شامل تأکید بر حل مسأله است، پذیرفته‌اند، در حالی که ایالت‌های شمال غربی در مراحل مختلفی از فرایند به کارگیری استانداردها و ابداع نظام‌های ارزیابی قرار دارند، اکثر آن‌ها راجع به اهمیت یادگیری و ارزیابی استدلال کردن، گفتمان ریاضی، ایجاد ارتباط و اتصال و به کار بردن دانش در موقعیت‌های مسأله که شعارهای کلیدی حل مسأله هستند، بحث می‌کنند.

نقش حل مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای

استانیک^{۴۰} و کیل پاتریک^{۴۱} (۱۹۸۹) سه مضمون عمومی را که به طور تاریخی نقش حل مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای را روشن می‌کند، شناسایی کرده‌اند که عبارتند از حل مسأله به عنوان زمینه، حل مسأله به عنوان مهارت و حل مسأله به عنوان هنر.

حل مسأله به عنوان زمینه. نویسنده‌گان، حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای انجام ریاضی را به چندین زیرمقوله تقسیم می‌کنند. در این دیدگاه از حل مسأله به عنوان توجیهی^{۴۲} برای تدریس ریاضی استفاده شده است و برای مقاعده ساختن دانش آموزان نسبت به ارزش ریاضی، محتواهای آن با تجربه‌های حل مسأله‌های واقعی زندگی مرتبط شده است. هم‌چنین، از حل مسأله برای ایجاد انگلیزش^{۴۳} در دانش آموزان استفاده شده تا علاقه‌ی آن‌ها به یک موضوع خاص ریاضی یا یک رویه، از طریق عرضه‌ی یک مثال

قبل نمی‌دانند. به خوبی انجام دادن این کار، بدون دانستن همه‌ی پاسخ‌ها، مستلزم تجربه، اعتماد به نفس و خودگاهی می‌باشد. بورکهارد^{۴۵} (۱۹۸۸)، نقل شده در شونفیلد، (۱۹۹۲)، حتی با پافشاری بیشتری تأکید می‌کند که تدریس حل مسأله برای معلمان از بعد ریاضی، از بعد پدآگوژیکی^{۴۶} و از بعد شخصی مشکل است. معلمان باید در زمینه‌ی ریاضی آن خبرگی را داشته باشند تا رویکردهای متفاوتی را که دانش آموزان ممکن است برای حل مسأله انتخاب کنند، بفهمند و تشخیص دهند چگونه آن رویکردها می‌توانند امیدوارکننده باشند. بسیاری از معلمان دوره‌ی ابتدایی، آموزش‌های عمومی داشته‌اند و اغلب فاقد زمینه‌ی ریاضی قوی هستند که لازمه‌ی آموزش ریاضی با رویکرد حل مسأله است. از بعد پدآگوژیکی، معلمان باید تصمیم‌های مهم و پیچیده‌ای درباره‌ی سطح مشکل بودن مسأله‌های تعیین شده برای حل، زمان ارایه‌ی کمک و چگونگی ارایه‌ی کمک اتخاذ کنند به طوری که هم متضمن موفقیت دانش آموز باشد و هم اطمینان حاصل کنند که احساس مالکیت دانش آموزان را نسبت به استراتژی‌های حل مسأله‌ی آن‌ها حفظ می‌کنند. از بعد شخصی، معلمان گاهی خود را در وضعیت ناخوشایند ندانستن راه حل مسأله خواهند دید. بازی نقش «خبره» که معلمان به طور سنتی به ایفای آن پرداخته‌اند، نیازمند تجربه، اعتماد به نفس و خودگاهی است. اغلب از معلمان خواسته می‌شود ریاضیاتی را تدریس کنند که هرگز در مدرسه با آن روبرو نشده بودند و به شیوه‌ای تدریس کنند که مغایر با آموزش خود آن‌ها بوده است. به این دلایل، معلمان ممکن است علاوه بر

این‌ها، به
آموزش

هیبریت می‌گوید: «زمانی که ما
قواعد کار کردن با نشانه‌ها را در یک
صفحه به خاطر می‌سپاریم ممکن است
چیزی یاد بگیریم، ولی ریاضیات را یاد
نمی‌گیریم. دانستن یک موضوع به معنای رفتن
به درون آن و مشاهده‌ی چگونگی کارکرد آنرا،
چگونگی ارتباط آنرا با یکدیگر و این‌که چرا
این‌گونه کار می‌کنند، می‌باشد»

عنوان یک مهارت جداگانه با قرار دادن حل مسأله در سرتاسر برنامه‌ی درسی برای توسعه‌ی درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای، آگاهی یابند.

حل مسأله به عنوان هنر. جرج پولیا^{۴۷} (۱۹۴۵)، در کتاب کلاسیک خود با عنوان «چگونه مسأله را حل کنیم»، این ایده را معرفی کرد که حل مسأله می‌تواند به عنوان یک هنر عملی مانند نواختن پیانو یا شنا کردن، آموزش داده شود. پولیا حل مسأله را به عنوان عمل اکتشاف می‌دانست و عبارت «رهیافت‌های مدرن»^{۴۸} (هنر تحقیق و اکتشاف) را برای توضیح توانایی‌های لازم جهت بررسی و تحقیق موفقیت‌آمیز مسأله‌های جدید معرفی کرد. او مشوّق این بود که ریاضی نه به صورت یک مجموعه‌ی تمام شده از حقایق و قواعد، بلکه به عنوان یک علم آزمایشی و استقرایی ارایه شود. هدف از آموزش حل مسأله به عنوان هنر این است که توانایی‌های دانش آموزان توسعه یابد تا مسأله حل کن‌های ماهر و مشتاقی شوند؛ متفکران مستقلی که قادر به درگیر شدن با مسأله‌های باز-پاسخ بد-تعريف شده^{۴۹} باشند.

چالش‌های آموزش حل مسأله

هرچند که پولیا بیش از ۵۰ سال قبل، چارچوبی مبتنی بر جست‌وجوگری برای آموزش حل مسأله ارایه کرد، اما هنوز لزوم به کارگیری گسترشده‌ی ایده‌های او در کلاس‌های درس ایالات متعددی بر سر راه انجام این انتقال در تدریس ریاضی، وجود دارد. آموزش حل مسأله‌ی غیرمعمول مشکل است. حل مسأله همان قدر که برای معلم وقت‌گیر و سخت است برای دانش آموزان نیز وقت‌گیر و سخت است. تسلط بر هنر آموزش ریاضی تها در مدت زمان طولانی ممکن است (تامسپون^{۵۰}، ۱۹۸۹). به گفته‌ی شونفیلد^{۵۱} (۱۹۹۲)، آموزش حل مسأله مشکل است زیرا معلمان:

- باید پیامدهای اخذ رویکردهای گوناگون توسط دانش آموزان را درک کنند و بدانند آیا ممکن است این رویکردها به نتیجه برسند و اگر نه، چه چیزی باعث می‌شود که با اخذ آن، رویکردهای دانش آموزان به نتیجه برسد؟

- باید بدانند چه موقع مداخله کنند و وقتی که اساساً حل مسأله را به عهده‌ی دانش آموزان می‌گذارند، چه پیشنهادهایی می‌تواند به آن‌ها کمک کند و چگونه این کار را با هر دانش آموز انجام دهد؟

- گاهی باید در موقعیتی قرار گیرند که [گویی] حل مسأله را از

جدیدی در محتوا و نظریه‌ی ریاضی و نیز در شیوه‌های آموزش حل مسأله نیاز داشته باشد.

مسأله‌های غیرمعمولی برای دانش آموزان مشکل است.

مسأله‌های غیرمعمولی و باز پاسخ به دلیل ماهیتی که دارند، اغلب

برای بسیاری از دانش آموزان مشکل هستند. شانون^{۲۷} و

زاویوسکی^{۲۸} (۱۹۹۵)، مطالعه‌ی کوچکی انجام دادند که در آن،

سختی تکلیف‌های حل مسأله را بدون ارایه سرنخ‌ها و گام‌های

رویه‌ای به دانش آموزان، نشان دادند. در این مطالعه،

تکلیف‌های مشابهی به دو گروه از دانش آموزان ارایه شد. در

تکلیفی به نام «چرخ‌های سوپرمارکت»، به دانش آموزان گروه اول،

یک مقیاس رسم که از ۱۲ چرخ (گاری) خرید که داخل هم رفته

بودند تشکیل شده بود، داده شد و از آن‌ها خواسته شد تا فرمولی

برای تعیین طول انباری مورد نیاز برای تعداد دلخواهی از چرخ‌ها و

تعداد چرخ‌هایی که در یک انباری داده شده می‌گردیدند، پیدا

کنند. در واقع تمام اطلاعاتی که به دانش آموزان داده شد، همین

بود. به دانش آموزان گروه دوم، تکلیفی به نام «چرخ‌های خرید»

داده شد که شامل چندین نکته یا زیرمسأله بود که آن‌ها را به سمت

حل مسأله هدایت می‌کرد. در این تکلیف از دانش آموزان خواسته

شده بود که طول یک چرخ خرید را پیدا کنند و بینند که وقتی چرخ‌ها

را داخل هم قرار می‌دهند، چقدر از هر چرخ بیرون می‌مانند و طول

۰ چرخ خرید را پیدا کنند و حساب کنند در یک فضای ۱۰ متری

چند چرخ خرید قرار می‌گیرد. سپس از آن‌ها خواسته شد که دو

فرمولی را که در تکلیف مربوط به «چرخ‌های سوپرمارکت» از آن‌ها

خواسته شده بود به دست آورند.

پژوهشگران گزارش کردند دانش آموزانی که اقدام به حل مسأله «چرخ‌های سوپرمارکت» کردند، در دانستن این که چگونه حل مسأله را شروع کنند، با مشکل مواجه بودند. فقط تعداد اندکی از دانش آموزان با موفقیت فرمول‌های خواسته شده را به دست آورند. از سوی دیگر، هیچ یک از دانش آموزانی که اقدام به حل مسأله «چرخ‌های خرید» کردند، برای شروع با مشکلی مواجه نشدند و همگی به استثنای یک گروه از آن‌ها، توانستند با موفقیت، فرمول‌های خواسته شده را به دست آورند. مؤلفان نتیجه گیری کردند که «حس دست و پنجه نرم کردن دانش آموزان در مسأله‌ی چرخ‌های سوپرمارکت، بیش تر از مسأله‌ی چرخ‌های خرید بود». برای معلمان، دیدن این دست و پنجه نرم کردن کلافه کننده‌ی دانش آموزانشان، اغلب دشوار است. دانستن این که چه زمانی به دانش آموزان راهنمایی کنید و چقدر به آن‌ها کمک کنید، مستلزم ایجاد تعادل ظرفی است که از طریق تجربه و دانستن قابلیت‌های دانش آموزان حاصل می‌شود.

معلمان نسبت به تمام کردن محتوا درس دغدغه دارند.

پژوهش تیمز (TIMSS)، برنامه‌ی درسی

ایالات متحده را در مقایسه با

برنامه‌های درسی ریاضی

سایر کشورها،

برنامه‌ای با



اول از همه، یک دیدگاه پویا و مسئله-محور نسبت به ریاضی وجود دارد که ریاضی را یک حوزه‌ی روبه گسترش خلق و ابداع بشری می‌داند به طوری که در آن، الگوها ایجاد می‌شوند و سپس به صورت دانش تقطیر می‌شوند. بنابراین، ریاضی فرایندی از تجسس، رسیدن به آگاهی و افزودن بر مجموعه‌ی دانش است. ریاضی یک محصول تمام شده نیست، زیرا نتایج آن همواره در معرض تجدیدنظر هستند (دیدگاه حل مسئله^{۵۱}).

دوم، دیدگاهی از ریاضی وجود دارد که آن را بدنی‌ای از دانش ایستاد پیچارچه می‌بیند، یک قلمرو شفاف از ساختارها و حقایق به هم پیوسته که با رشتہ‌هایی از منطق و معنا به هم متصل شده‌اند. بنابراین، ریاضی یک مفهوم پیچارچه، ایستاد و غیرقابل تغییر است؛ ریاضی کشف می‌شود نه این که خلق شود (دیدگاه افلاطونی^{۵۲}). سوم، دیدگاهی است که ریاضی را شیوه‌ی جعبه‌ی ابزار می‌بیند که از انبوهی از حقایق، قوانین و مهارت‌ها ساخته شده است و توسط کارگران با مهارت برای رسیدن به بعضی اهداف خارجی به کار برده می‌شود. پس ریاضی، مجموعه‌ای از قواعد و حقایق نامرتبط ولی مورد استفاده است (دیدگاه ابزارگرایی^{۵۳}).

هر کدام از این دیدگاه‌ها، ماهیت ریاضی را به نحو متفاوتی تصور می‌کنند. دیدگاه ابزارگرایی، ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از ابزارها می‌نگرد. انتظار می‌رود معلمانی که دیدگاه ابزارگرایی دارند، در کلاس‌های درس خود، بر قواعد، حقایق و رویه‌ها تأکید کنند. کلاس‌های آن‌ها تمایل به معلم-محوری^{۵۴} و تأکید بر تکرار و تمرین‌های معمولی دارد. دیدگاه افلاطونی ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از دانش در نظر می‌گیرد. معلمانی که این دیدگاه را بر می‌گزینند، بر ارتباط‌های درونی، مفاهیم زیربنایی و منطق درونی رویه‌های ریاضی متمرکز می‌شوند. دیدگاه حل مسئله بر فرایند جستجوگری متمرکز است. معلمان با دیدگاه حل آن‌ها ساخت و سازگرایی است. آن‌ها، دانش آموزان رافعالانه در کشف مفاهیم ریاضی، خلق استراتژی‌های حل مسئله و ساختن معانی شخصی در یک محیط غنی حل مسئله درگیر می‌سازند (تامسون، ۱۹۹۲).

هم چنین، باورهای دانش آموزان درباره‌ی ماهیت ریاضی به میزان زیادی تحت تأثیر باورهای معلمانشان قرار دارد. بررسی باورهای دانش آموزان درباره‌ی ریاضی آشکار می‌سازد که اغلب دانش آموزان فکر می‌کنند باید یک روش حاضر و آماده برای حل مسئله وجود داشته باشد و این روش، باید به سرعت به یک پاسخ

عرض یک مایل و عمق یک اینچ توصیف کرد (پیک، ۱۹۹۶، ۱۹۹۷؛ تاکاها، ۱۹۹۸). در ایالات متحده، عموماً از معلمان انتظار می‌رود که هر سال، حوزه‌های گسترده‌ای از محتوا درسی را پوشش دهند. با این حال، حل مسئله‌های چالش برانگیز و غیر معمولی، زمان‌بر است. اغلب، حل یک مسئله می‌تواند تمام یک جلسه از کلاس درس یا پیش‌تر را اشغال کند. بنابراین ضروری است که محتوا و مهارت‌ها در یک زمینه‌ی حل مسئله با هم تلفیق شوند. با انتخاب تکالیف غنی، درگیرکننده و ارزشمند، معلمان می‌توانند مطمئن شوند که از زمان به خوبی استفاده کرده‌اند. کتاب‌های درسی، مسئله‌های غیر معمولی اندکی عرضه می‌کنند. اگرچه کتاب‌های درسی در حال بهبود هستند، بیشتر آن‌ها تعداد مناسبی از مسئله‌های غیر معمولی که معلمان بتوانند از آن‌ها انتخاب کنند، ارایه نمی‌دهند. بسیاری از معلمان، از دیدگاه‌ها و توالی مطالب ارایه شده در کتاب‌های درسی احساس راحتی نمی‌کنند، ولی آن‌ها باید اعتماد به نفس خود را توسعه دهند و در جست‌وجوی سایر موارد آموزشی به عنوان مکمل کتاب‌های درسی خود باشند.

تغییر عمل یک فرد: آمادگی معلمان

رویکرد یک معلم به تدریس ریاضی، بازنای باورهای او درباره‌ی چیستی ماهیت ریاضی به عنوان پاسخ‌های صحیح و رویه‌های ابطال ناپذیر مشکل از عملیات حسابی، رویه‌های جبری، قضیه‌ها و اصطلاحات هندسی در نظر بگیرد، احتمال دارد که رویکرد تدریس وی نیز بر ارایه‌ی مفاهیم، رویه‌ها، قوانین و معادلات ریاضی همراه با تمرکز و تمرین و به خاطر سپاری دانش آموزان تأکید داشته باشد. ممکن است معنا و زمینه‌ی بسیاری از این قضیه‌ها و رویه‌ها را به مسئله‌های جنبی برنامه‌ی درسی مرتبط کرد. اما اگر او ریاضی را به مثاله‌ی یک تلاش فعال و خلاق در نظر بگیرد که شامل جستجوگری و کشف است، احتمالاً بر فعالیت‌های تأکید می‌کند که دانش آموزان را درگیر تولید، بازیابی معانی و ایجاد اتصال و ارتباط می‌کند. این معلم نقش خود را به عنوان یک تسهیل‌کننده می‌بیند که دانش آموزان را برای فکر کردن و زیر سوال بردن یافته‌ها و مفروضات به چالش می‌کشاند. ارنست^{۵۵} (۱۹۸۸)، سه تصور از ریاضی را به طور خلاصه بیان می‌کند که هر کدام بر تأکیدات متفاوتی در تدریس توجه می‌کنند:

هستند تا سنت‌ها را در کلاس درس حفظ کنند. از طرف دیگر، تحت فشارهای وارد شده از طرف سیاست‌گذاران برای تدریس استاندارد محور هستند (همراه با انتظارات تعارض آمیز که دانش‌آموزان در آزمون‌های استاندارد که مهارت‌های پایه را می‌سنجد، عملکرد بالای داشته باشند، نه آن‌که در مواد استاندارد محور عملکرد بهتری داشته باشند).

مسیر معلم برای تغییر باید با تصدیق تجارب پیشین او شروع شود. او از طریق بازتاب بر تجارب قبلی و در پرتو ایده‌های جدید درباره‌ی راهبردهای مؤثر تدریس، بر آن تجارب تکیه خواهد کرد (ریچاردسون^{۵۷}، ۱۹۹۰). وسیع تر کردن ادراک معلمان درباره‌ی ماهیت حل مسأله و توانایی بالقوه‌ی آن به عنوان یک ابزار تدریس، مستلزم آن است که معلمان نیز به نوعی خود مشغول حل مسأله‌ی باز-پاسخ شوند. این به معنای صرف وقت برای حل مسأله‌های با تنوع وسیع و بازتاب بر تلاش‌های اشان برای حل این مسأله‌هاست.

تغییر عمل تدریس یک فرد، زمانی تسهیل می‌شود که تکنیک‌های تدریس مؤثر در کلاس درس توسط یک کارورز که در تدریس حل مسأله ماهر است، مدل‌سازی شود. این مدل‌سازی باید با مباحثه بین معلمان درباره‌ی انتخاب و استفاده از استراتژی‌های حل مسأله ذمیال شود. مدل‌سازی و بحث، یک نمایش عینی از نقش معلمان در تدریس حل مسأله ارایه می‌کند نیز در عمل تدریس خود، تغییر ایجاد کنند (تامسون، ۱۹۸۹). مطالعه‌ی ادبیات مربوط به نظریه و عمل تدریس حل مسأله می‌تواند معلمان را تحت تأثیر قرار دهد تا آن‌ها به گفته‌ی بال^{۵۸} (۱۹۹۶)، بررسی مشتاقانه و بدینانه تحقیقات نشان می‌دهد که معلمان می‌توانند دریافت‌ها و پیش‌های آموزشی را بدون تأکید فراوان بر نتایج آن‌ها، به دست آورند. آن‌ها می‌توانند اصلاحات گسترده‌ی معروفی شده را که برای منحیط بومی جرح و تعديل شده‌اند، به عنوان منبعی برای نوآوری‌ها مورد استفاده قرار دهند.

حقیقت این است که معلمان به طور مستمر، تغییر می‌کنند تا پاسخ‌گوی نیازهای در حال تغییر دانش‌آموزانشان باشند و ایده‌هایی را که از سایر معلمان شنیده‌اند، به کار می‌برند. معلمان، مرجعیت خود را در تعریف آن‌چه که در کلاس درس رخ می‌دهد، نشان می‌دهند. زیرا ایده‌ی مرجعیت، نقش اساسی در مفهوم سازی و ایجاد تغییر در معلم ریاضی ایفا می‌کند (ویلسون^{۵۹} و لیوید^{۶۰}، ۲۰۰۰). معلمان باید خودشان در قضاوت کردن

منتھی شود (شونفیلد، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲). شونفیلد (۱۹۹۲)، به یک تحقیق در سال ۱۹۸۳ که توسط ارزیابی ملی پیشرفت تحصیلی^{۵۵} (NAEP) انجام گرفته است اشاره می‌کند که در آن نیمی از دانش‌آموزان پاسخ دهنده، اعتقاد داشتند «یادگیری ریاضی بیش از همه به خاطر سپاری حقایق است». سه چهارم دانش‌آموزان پاسخ دهنده بالین عبارت موافق بودند که «انجام ریاضی مستلزم تمرینات فراوان برای چگونگی استفاده از قواعد است». درحالی که ۹۰ درصد از آن‌ها با این عبارت موافق بودند که «برای حل مسأله‌های ریاضی، همیشه یک قاعدة وجود دارد». دانش‌آموزانی که چنین باورهایی دارند، ممکن است برای حل مسأله‌ای که خیلی پیچیده است یا به نظر نمی‌رسد که یک رویکرد الگوریتمی سرراست ارایه کند، حتی کمترین تلاشی هم نکنند.

از این گذشته، شونفیلد (۱۹۹۲)، تذکر می‌دهد که اغلب دانش‌آموزان باور دارند که تمام مسأله‌ها دارای جواب هستند؛ هم چنین باور دارند که برای هر مسأله تنها یک جواب درست و یک راه حل صحیح وجود دارد؛ و معتقدند که از دانش‌آموزان عادی نمی‌توان انتظار داشت که ریاضی را درک کنند، بلکه آن‌ها صرفاً رویه‌های ریاضی را به روش مکانیکی به خاطر می‌سپارند و آن را به کار می‌بنند. این باورها عمدتاً به تجاربی مربوط هستند که دانش‌آموزان از کلاس‌های ریاضی خود و از طرز تلقی و باورهای معلمانشان کسب می‌کنند.

پس رویکرد حل مسأله به تدریس ریاضی، می‌تواند به گسترش درک ریاضی دانش‌آموزان از یک نظام مبتنی بر حقایق و قواعد به سوی درک همراه با جستجوگری، عدم قطعیت، و خلاقیت کمک کند. اما نخست، معلم خود باید به تغییر دنیای ذهنی خویش (Paradigm) پیروزد، و این کار نیازمند رودرورو شدن وی با باورهای عمیق خود درباره‌ی تدریس و یادگیری و تمایل او برای خطرپذیری و ابتکار است (دیرکز^{۶۱}، ۱۹۹۳).

بسیاری از معلمان برای اتخاذ رویکرد حل مسأله به تدریس ریاضی، احسان عدم آمادگی می‌کنند. تعداد زیادی از معلمان، ریاضی را به این روش یاد نگرفته‌اند. حتی اگر آن‌ها در درس‌های روش تدریس دوره‌ی دانشگاهی خود با حل مسأله مواجه شده باشند، وقتی که در کلاس درس هستند، به همان روش‌های سنتی که در بیش تر مدارس وجود دارد، تدریس می‌کنند. تبدیل شدن به عامل تغییر، هنگامی که فرد در محاصره‌ی باورهای عمیقاً محکم نسبت به تدریس و یادگیری است، مشکل است. امروزه معلمان، اغلب بین فشارهای روزانه از طرف همکاران، والدین، و دیگران

- تصدیق نتیجه؛
- جستجو برای روش‌های بدیل حل‌ها؛
- مشخص ساختن اعتبار یک بحث؛
- به کار بستن نتیجه یا راه حل مسأله در مسائلهای دیگر؛
- تفسیر نتیجه؛
- تعمیم راه حل‌ها؛
- تولید مسائلهای جدید برای حل کردن.

شاید مهم ترین جنبه‌ی تدریس حل مسأله، دوباره‌نگری باشد، زیرا برای دانش آموزان، فرستادگیری را دوباره‌ی فرایندهای حل مسأله و این که یک مسأله چگونه با سایر مسائلهای مرتبط است، ایجاد می‌کند. شونفیلد (۱۹۸۵) و دیگران نشان دادند که مشخصه‌های اصلی که باعث تمایز بین مسأله حل‌کن‌های خبره از افراد عادی می‌شود، توانایی آن‌ها در مرتبط کردن ویژگی‌های ظاهری به ساختارهای زیربنایی مسائلهای و توانایی آن‌ها در خود-نظمی^{۲۰} و تشخیص این است که چه زمانی یک رویکرد یا تاکتیک غیرمولده است. هر چند که معلمان و پژوهشگران گزارش کرده‌اند که ایجاد تمایل در دانش آموزان برای تداوم یافته‌های قبلی در یافتن پاسخ صحیح یک مسأله سخت است، ولی توسعه‌ی خودآگاهی و بازتاب، برای تقویت حل مسأله ضروری است.

تدریس خصیصه‌های کلیدی حل مسأله

طبق آن‌چه که ادبیات پژوهشی حوزه‌ی حل مسأله و پژوهش‌های انجام شده در این حوزه نشان می‌دهند، بعضی از خصیصه‌های کلیدی وجود دارند که نشان‌دهنده‌ی عملکرد سطح بالای دانش آموزان در حل مسأله هستند. مدل حل مسأله‌ی ریاضی NWREL، بر پایه‌ی پژوهش انجام گرفته مبتنی بر خصیصه‌های زیر است: درک-مفهومی، راهبردها و استدلال کردن، ارتیاطات، مجاسبه و اجرا، و بیان‌های ریاضی. این خصیصه‌ها با جزئیات بیشتری در زیر شرح داده می‌شوند و به دنبال آن‌ها یک سؤال کلیدی مطرح می‌شود که معلمان می‌توانند در هنگام ارزیابی توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش آموزان، هم‌چنین هنگامی که آن‌ها را هدایت می‌کنند تا حامی تلاش‌های حل مسأله‌ی آن‌ها باشند، بر این سؤال بازتاب داشته باشند.

درک-مفهومی-دانش آموزان درک-مفهومی را از طریق تفسیر اصول ریاضی در یک مسأله و ترجمه‌ی این ایده‌ها به یک بازنمایی منسجم ریاضی با استفاده از حقایق مهم مسأله به نمایش

درباره‌ی این کدام تغییر ارزشمند و معنادار است، دخالت داشته باشد (Ricardson، ۱۹۹۰).

به دنبال اهداف اصلاحات، معلمان اغلب نسبت به اثربخشی دانش خود، احساس اضطراب می‌کنند. حرکت در جهت اصلاحات ریاضی، به معنی رویارویی نزدیک با عدم قطعیت‌ها، ابهام‌ها و پیچیدگی‌های واقعی «فهم و درک» و «یادگیری» است. وقتی از دانش آموزان می‌خواهیم تا نظرات خود را در یک زمینه‌ی حل مسأله ابراز کنند، باید این مخاطره را پذیریم که بفهمیم آن‌ها چه چیزهایی را می‌دانند و چه چیزهایی را نمی‌دانند. این کشفیات زمانی می‌توانند ناراحت کنند باشند که دانش آموزان نشان دهنند بسیار کمتر از سطح انتظار معلم یا بیش تراز حدی که معلم برای مواجهه با آن آمادگی دارد، می‌دانند (بال، ۱۹۹۶).

تدریس مسأله-محور و سؤال-محور، مستلزم توانایی‌های فراتر از مهارت و دانش ریاضی است. ویژگی‌های شخصی نظری صبر و حوصله، کنجکاوی، سخاوت، اعتماد، اطمینان و قدرت تخیل، ارزش فراوانی دارند. علاقه‌مندی به نگریستن به دنیا از دیدگاه فردی دیگر، لذت بردن از طنز، همدلی با ابهام و ملاحظه‌ی سردرگمی و شرم‌مندگی دیگران، سایر ویژگی‌های مهمی هستند که می‌توانند در ایجاد یک محیط یادگیری برای تقویت توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش آموزان، کمک کنند (بال، ۱۹۹۶). بنابر نوشته‌ی بال، «هم‌چنان که معلمان فهم و درک رابطه‌ی خود را با ریاضی می‌سازند، دوره‌های جدید ریاضی را با دانش آموزان خود، تدارک می‌بینند و هم‌چنان که با دانش آموزان خود به سمت مسیر جدیدی حرکت می‌کنند، فهم و درک خود آن‌ها از ریاضی نیز، دچار تغییر می‌شود».

حل مسأله به عنوان یک استراتژی در تدریس به پیشنهاد پولیا (۱۹۴۵)، حل مسأله شامل چهار مرحله‌ی فهم مسأله، طراحی نقشه، اجرای نقشه و دوباره‌نگری (بازگشت به عقب) است. لازوای^{۲۱} (۱۹۹۲) حل مسأله‌ی ریاضی را به صورت مدل‌سازی مسأله و صورت‌بندی و تصدیق فرضیه‌ها از طریق جمع‌آوری و تفسیر داده‌ها با استفاده از تحلیل الگو، رسم نمودار، کامپیوتر یا ماشین حساب تعریف می‌کند. این تعریف بر فرایندهای صورت‌بندی، جستجو و تصدیق متمرکز است، ولی در برگیرنده‌ی عناصر با اهمیت دخیل در مرحله‌ی دوباره‌نگری پولیا که مشتمل بر ارزیابی و تفسیر روش‌ها و نتایج می‌باشد، نیست. مرحله‌ی دوباره‌نگری شامل فعالیت‌هایی مانند موارد زیر است:

وقتی دانش آموزان با ایده های ریاضی مواجه می شوند که علاقه و چالش را در یک زمینه‌ی حل مساله‌ی باز-پاسخ برمی انگیزد، احتمال بیشتری هست که انواع پاداش‌های درونی را تجربه کنند و این احساس آن‌ها را با جریان حل مساله، فعالانه درگیر می‌کند. اما دانش آموزانی که به حفظ کردن روی می‌آورند، قادر به درک بوده و احتمالاً احساس رضایت اندکی خواهند داشت و شاید به طور کامل از یادگیری دست بکشند.



ایشان تلفیق شده، دانش آموزان بر پیشرفت خود نظرات داشته و در صورت نیاز، جرح و تعديل های لازم را انجام داده، کار را تأیید کرده یا اثبات درستی آن را ارایه می‌دهند (هیررت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹؛ ۲۰۱۰؛ شونفیلد، ۱۹۸۹؛ ۱۹۹۲؛ گرین وود، ۱۹۹۳؛ بکر و شیمنادا، ۱۹۹۷؛ پولیا، ۱۹۴۵، ۱۹۶۵؛ استیسی، ۱۹۶۲؛ و گروز، ۱۹۸۵).

سؤال کلیدی: آیا شواهدی وجود دارد که دانش آموز برا ساسن یک طرح، حل مساله را شروع کرده، راهبردهای متناسب را به کار برده و یک فرایند منطقی و قابل تأیید در جهت دست یابی به یک راه حل را دنبال کرده باشد؟

راهنمایی هایی برای کمک به دانش آموزان، برای شروع حل مساله، می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا رسم یک شکل یا یک نمودار یا ساخت یک مدل می‌تواند به حل این مساله کمک کند؟
- آیا سازمان دهی اطلاعات در یک نمودار، یا جدول، یا فهرست سازمان دهی شده به شما کمک می کند؟

می گذارند. دانش آموزان زمانی درک مفهومی خوبی از ریاضی را در یک مسأله نشان می‌دهند که بازنمایی مناسب را انتخاب کرده و از اطلاعات مرتبط استفاده کنند، اصطلاحات ریاضی را بادقت به کار بزنند و رویه های ریاضی قابل کاربرد را انتخاب نمایند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۹۲؛ ۱۹۸۹؛ شونفیلد، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰؛ گرین وود، ۱۹۹۳؛ ۱۹۹۲).

سؤال کلیدی: آیا تفسیر دانش آموز از مسأله با استفاده از رویه ها و بازنمایی های ریاضی، به طور صحیح مفاهیم کلیدی ریاضی را منعکس می کند؟

راهنمایی هایی که ممکن است معلم برای کمک به دانش آموز برای تفسیر اطلاعات مسأله ارایه دهد شامل موارد زیر است:

● مسأله در مورد چیست؟ مسأله را به زبان خودتان دوباره نویسی کنید.

● [در مورد مسأله]، چه می دانید؟
● مسأله از شما می خواهد که چه چیزی را پیدا کنید؟
● حقایق، و اعداد مهم در مسأله کدامند؟ آیا برخی اطلاعات برای حل کردن مسأله غیرضروری هستند؟

● آیا اصطلاحات ریاضی در درک و حل مسأله به شما کمک می کند؟
● پاسخ مسأله شیوه چیست (واحدهای اندازه گیری، میزان دقت مورد نیاز، شکل پاسخ)؟
● توصیه هایی به دانش آموزان برای کمک به درک مفاهیم ریاضی مربوط به مسأله می تواند شامل موارد زیر باشد:

● چه نوع محاسباتی برای حل مسأله مورد نیاز خواهد بود؟
● چگونه سی توان مسأله را نمایش داد تا درک آن ساده تر شود؟
● کدام ایده ها و مهارت های ریاضی می توانند در نمایش و حل مسأله به شما کمک کنند (مانند رسم نمودار، شناسایی الگوها، افزودن کسرها و نظایر این ها)؟

راهبردها و استدلال کردن- دانش آموزان توانایی خود را در استفاده از راهبردها و استدلال کردن از طریق جستجو و انتخاب راهبردهای مناسب حل مسأله و اجرای یک فرایند منطقی خوب طراحی شده و خوب حمایت شده که آن ها را به یک راه حل منطقی برسانند، نشان می دهند. تمام انواع بازنمایی ها با راه حل

ارتباطات خوب، بستگی به داشتن یک راهبرد و طرح مسأله‌ی خوب سازمان یافته، واضح و روشن دارد. و اداشتن دانش آموزان به توضیح کلامی راهبردهایشان پیش از نوشتن آن‌ها، می‌تواند در توسعه‌ی مهارت در برقراری ارتباطات مفید باشد.

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش آموزان در تبادل ارتباط با تفکر خودشان می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا از جدول‌ها، نمودارها، کلمات یا ترکیبی از این‌ها، در توضیح و گسترش تفکر توان استفاده می‌کنید؟

● اولین کاری که کردید چه بود؟ چرا؟ بعد از آن چه کردید؟ این کار به شما برای رسیدن به هدفتان چه کمکی کرد؟

● چگونه به این نتیجه رسیدید که...؟ از حل این مسأله چه چیزی یاد گرفتید؟

● آیا نشان دادید که چگونه پاسخ‌خان را تصدیق می‌کنید؟

● توضیح خود را برای فرد دیگری بخوانید تا مطمئن شوید که این توضیحات، فرایند حل شما را به طور شفاف بیان کرده و درک آن ساده است.

محاسبه و اجرا-مهارت‌های پایه‌ای و درک مفهومی باید به همراه هم پیشرفت کنند. برای یادگیری مهارت‌ها به نحوی که فرد بتواند آن‌ها را به خاطر بسپارد، هنگام لزوم آن‌ها را به کار بیرد و بتواند آن‌ها را برای حل مسأله‌های جدید تعديل کند، باید آن‌ها را همراه با فهم و درک یاد بگیرد. اگر از دانش آموزان خواسته شود تا از رویه‌های خود برای پاسخ دادن به مسأله‌های حسابی استفاده کنند و به طور مثال، رویه‌های خود را با دیگران در میان بگذارند، درک ریاضی آن‌ها از طریق اجرا، بحث و بازنگاری (هیئت و همکاران، NCTM ۱۹۹۷؛ ۱۹۹۲ و ۲۰۰۰؛ شونفیلد ۱۹۸۹ و ۱۹۸۹).

دانش آموزان خبرگی خود را در محاسبات از طریق اجرای صحیح تمام رویه‌ها، کاربرد صحیح تمام بازنمایی‌های بصری مسأله و مشخص کردن هر یک (نمودارها، جدول‌ها، شکل‌ها و غیره) و نشان دادن استفاده‌ی صحیح از تکنولوژی یا دست ورزی‌های قابل دسترسی، به نمایش می‌گذارند.

سؤال کلیدی: با در نظر گرفتن رویکردی که دانش آموز برای حل مسأله اتخاذ کرده است، آیا راه حل (شامل تمام گام‌های فرایند) به شیوه‌ای صحیح و کامل اجرا شده است؟

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش آموزان جهت بهبود مهارت‌های محاسباتی می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا به موازات پیشرفت خود، محاسبات خود را دوباره کنترل

● آیا حدس زدن، بررسی و تتعديل انجام شده، به حل این نوع مسأله کمک می‌کند؟

● آیا باید دنبال یافتن الگوهایی در اطلاعاتتان باشید؟

● آیا این کار کمک می‌کند که ابتدا مسأله را با استفاده از اعداد ساده‌تر حل کنید؟

● آیا می‌توانید با حرکت رو به عقب، از جایی که می‌خواهید به آن برسید کار را شروع کنید و به جایی که می‌خواهید از آن جا آغاز کنید برسید؟

توصیه‌هایی به دانش آموزان جهت تفکر در مورد راه حل آن‌ها می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا راهبرد مورد استفاده‌ی شما کارآمد است؟ اگر نه، آیا می‌توانید روش کارآمدتری برای حل مسأله پیدا کنید؟

● آیا می‌توانید مثال‌هایی برای حمایت از راه حلتان ارایه دهید؟

● آیا طرح و راهبردتان را آن قدر خوب درک کرده‌اید که آن را برای فرد دیگری شرح دهید؟

● آیا روش‌های دیگری برای نزدیک شدن به این مسأله وجود دارد؟

● آیا این مسأله شبیه مسأله‌های دیگری است که شما حل کرده‌اید؟

● آیا می‌توانید از آموخته‌های خود برای حل مسأله‌های دیگر نیز استفاده کنید؟

ارتباطات- اگر بدانیم که چگونه مطلبی با سایر مطالبی که آن‌ها را می‌دانیم رابطه یا پیوند برقرار می‌کند، آن را درک می‌کنیم. ارتباطات همراه بازنگاری، روابط و پیوندهای جدید تولید می‌کنند. دانش آموزانی که بر آن چه انجام می‌دهند، بازنگاری می‌کنند و در مورد آن، با سایرین ارتباط برقرار می‌کنند، در بهترین موقعیت برای ایجاد ارتباط و اتصال در ریاضی قرار دارند (هیئت و همکاران، ۱۹۹۷). دانش آموزان زمانی ارتباطات خوب را نشان می‌دهند که

به وضوح، آن چه را که انجام داده‌اند و عمل آن کار را، شرح دهند و این توضیح در یک توالی منطقی و روان انجام شود.

ارتباطات خوب؛ مستقیم، هدفمند و خوب سازمان یافته است و خواننده ناچار به استنباط نیست، زیرا توضیحات شفاف بوده و فاقد هرگونه خلاط است (هیئت و همکاران ۱۹۹۷؛ NCTM ۱۹۸۹ و ۱۹۸۹؛ ۲۰۰۰؛ شونفیلد ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲؛ منوچهری^۱ و اندرسون^۲، ۱۹۹۹؛ فنزرووست^۳ و ایسارت^۴، ۱۹۹۸؛ بوش من^۵، ۱۹۹۵).

سؤال کلیدی: آیا فرد دیگری می‌تواند به آسانی تفکرات دانش آموز را درک کند یا این که به استنباط و حدس زدن در مورد آن چه که دانش آموز در صدد انجام آن است، نیاز می‌باشد؟

- آیا راه حل شما تنها راه حلی است که برای این مسأله وجود دارد؟
- آیا می توانید فرایند یا فرمولی بیابید که بتواند برای حل شکل های مختلف این مسأله مورد استفاده قرار گیرد؟
- چگونه این مسأله با سایر مسأله هایی که قبل‌آیده اید با با موقعیت های زندگی واقعی، شباهت دارد؟

کرده اید؟ (به خاطر داشته باشید همیشه هنگام استفاده از ماشین حساب، پاسخ خود را تخمین بزنید).

- آیا قاعده یا فرمول استفاده شده را نشان داده اید؟

● آیا از طریق حل مسأله به روشنی متفاوت یا از طریق گذاشتن جواب داخل مسأله برای این که ببینید آیا این جواب معنادار است یا خیر، جواب خود را تصدیق کرده اید؟

● آیا شکل ها یا نمودارهایتان را کنترل کرده اید تا مطمئن شوید توضیحات آن ها صحیح است؟ (در صورتی که از شکل ها یا نمودارها استفاده کرده اید).

● آیا در محاسبات و روشی های مورد نیاز مسأله تبحر دارید؟ در غیر این صورت قبل از تلاش برای حل مسأله آن ها را مرور و تمرین کنید.

● آیا کنترل کرده اید تا مطمئن شوید که جواب شما با آن چه که مسأله می خواهد، منطبق است؟

بصیرت های ریاضی - دانش آموزان زمانی نسبت به یک مسأله بصیرت نشان می دهند که بتوانند اهمیت مسأله را در ارتباط با سایر مسأله های ارتباط با سایر دیسپلین ها یا کاربردهای آن در «جهان واقعی» تشخیص دهند. با تشخیص الگوهای مستتر در مسأله، کشف رویکردهای راه حل های چندگانه یا خلق یک قاعده یا فرمول کلی، دانش آموزان بصیرت خود را از طریق ساختار زیربنایی مسأله به نمایش می گذارند (هیبریت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹ و ۱۹۸۰؛ شونفیلد ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲؛ بکر و شیمادا، ۱۹۹۷؛ درکز^۱، ۱۹۹۳؛ بولیا، ۱۹۴۵ و ۱۹۶۲-۶۵) .

سؤال کلیدی : آیا دانش آموز به ساختار اصلی مسأله دست یافته و می بیند چگونه فرایند مورد استفاده برای حل این مسأله، آن را به سایر مسأله ها و کاربردهای جهان واقعی پسند می دهد؟

کلید توسعه ی بصیرت دانش آموزان، رفتن به فراسوی راه حل مسأله و تفکر در مورد کاربردهای مسأله در سایر موقعیت هاست. راهنمایی هایی جهت تقویت بصیرت می تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا این مسأله شبیه هیچ یک از مسأله هایی که قبل‌آیده اید می باشد؟ در این صورت آن شباهت ها کدام ها هستند؟

● آیا در حین حل مسأله، الگویی پیدا کرده اید؟

● برای حل کردن مسأله از چه مفروضاتی استفاده کرده اید؟

● آیا می توانید مسأله ای بسازید که از جهاتی با این مسأله مشابه باشد و از جهات دیگری متفاوت باشد؟

انتخاب مسأله‌ی «خوب»

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) و جامعه‌ی پژوهشی دائمًا اعلام می کنند که دانش آموزان با مسائل ناآشنا و چالش برانگیز درگیر شوند (NCTM، ۱۹۸۹؛ شونفیلد، ۱۹۸۵ و هیبریت و همکاران، ۱۹۹۷؛ اسمیت^۲ و استین^۳، ۱۹۹۸). انتخاب مسأله های «خوب»، کلید تدریس مؤثر حل مسأله است، ولی معلمان غالب در مورد این که چه مسأله ای یک مسأله «خوب» است، چهار سردرگمی هستند. لغت نامه امریکایی آکسفورد (ارلیش^۴ و فلکسنز^۵، ۱۹۸۰)، تعاریف زیر را برای واژه مسأله ارایه می دهد:

تعريف اول: چیزی که سروکار داشتن با آن یا درک آن مشکل است؟

تعريف دوم: یک تمرین در یک کتاب درسی یا در یک امتحان.

هر دو تعريف، در حیطه‌ی کاربرد عمومی هستند. معلم ممکن است به دانش آموزان کلاس بگوید که مسأله های شماره‌ی ۱ تا ۶۰ انتهای فصل را برای تمرین [بیشتر]^۶ حل کنند. این مورد، مثال روشنی از دو مین تعريف است. اگر معلم به مسأله به مفهوم تعريف اول اشاره کرده بود، احتمال داشت که با شورش دانش آموزان مواجه شود، زیرا حل کردن «مسأله‌ی واقعی مشکل»، یک تکلیف درسی غیرواقع گرایانه است.

یک جنبه‌ی مهم دیگر از تعريف «مسأله»، ماهیت نسبی آن است. آن چه که برای دانش آموزی مسأله است، ممکن است برای دانش آموز دیگری صرفاً یک تمرین باشد. شونفیلد (۱۹۸۵) ماهیت نسبی مسأله را چنین بیان می کند:

مسأله بودن، ویژگی ذاتی یک تکلیف ریاضی نیست. بلکه رابطه‌ی خاص بین فرد و تکلیف است که آن تکلیف را برای وی، به یک مسأله تبدیل می کند. در اینجا، واژه‌ی مسأله با این معنای نسبی به کار رفته است که برای فردی که تلاش می کند آن را حل کند، مشکل است. به علاوه، این مشکل باید از نظر ذهنی باشد نه یک مشکل محاسباتی.

شده در کلاس‌های درس ریاضی در مدارس دارد که در آن، ریاضی مجموعه‌ای ایستا و متاهمی (هرچند بسیار بزرگ) از حقایق، قواعد، و رویه‌هاست که باید آن‌ها را به خاطر سپرد و تمرین کرد. معلمان می‌خواهند بین (۱) استفاده از حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای تدریس، (۲) تدریس استراتژی‌های حل مسأله و (۳) تدریس و ارزیابی حل مسأله‌ی دانش آموزان خود، تمایز قائل شوند. در هنگام ارزیابی توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش آموزان، باید به آن‌ها تکلیف‌های ناآشنا داد، تکلیف‌هایی که برای انجام آن‌ها یک روش یا رویه‌ی از پیش آماده را نیاموخته باشند. تکلیف‌ها باید در سطح توانایی حل مسأله‌ی دانش آموزان ولی در عین حال، برای آن‌ها مشکل و چالش برانگیز هم باشند.

در حقیقت، تکلیف‌ها اساس آموزش حل مسأله را تشکیل می‌دهند. بازتاب و ارتباطات تنها زمانی امکان‌پذیرند که تکلیف‌ها به طور مناسبی مسأله‌ساز باشند. طبق گفته‌ی هیررت (Hirert و همکاران، ۱۹۹۷)، تکلیف‌های مناسب دارای سه جلوه هستند:

- تکلیف‌ها موضوع را برای دانش آموزان مسأله‌ساز می‌کنند؛
- دانش آموزان هم تکلیف‌ها را یک مسأله‌ی جالب می‌بینند.
- تکلیف‌ها باید از دانش و مهارت‌هایی که قبلًا داشته‌اند، برای ایجاد یک روش برای تکمیل تکلیف‌ها استفاده کنند.
- تکلیف‌ها باید فرصت‌هایی برای دانش آموزان ایجاد کنند تا برایده‌های مهم ریاضی بازتاب داشته باشند. با ابداع و آزمودن روش‌هایی برای حل مسأله‌های ریاضی، دانش آموزان درک ریاضی خود را گسترش می‌دهند. تکلیف‌ها در ایجاد توانایی در دانش آموز برای درک ریاضی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند (هیررت و همکاران، ۱۹۹۷).

تکلیف حل مسأله‌ی «خوب» دارای ویژگی‌های زیر است:

- دانش آموز را درگیر و علاقه‌مند می‌سازد؛
- ✓ قابل کاربرد در جهان واقعی است،
- ✓ با علاقه دانش آموز مرتبط است،
- ✓ مساوات را رعایت می‌کند زیرا همه‌ی دانش آموزان را دربر می‌گیرد،
- ✓ درگیری فعالانه را ارتقا می‌بخشد،
- ✓ حاوی محتوای ریاضی مهمی است،
- ✓ با سایر مسأله‌ها و مفهوم‌های ریاضی مرتبط می‌شود،
- ✓ در راستای برنامه‌ی درسی جاری ریاضی است،

به خاطر نسبی بودن مسأله‌ها، مهم است هنگام تدریس و ارزیابی حل مسأله‌ی دانش آموزان، تکالیف با دقت انتخاب شوند به نحوی که سطح مشکل بودن آن‌ها برای دانش آموزان مناسب باشد؛ از این گذشته، لازم است مسأله‌ها در حدی مشکل باشند که برای دانش آموزان چالش ایجاد کنند، اما سختی مسأله‌ها نباید به اندازه‌ای باشند که آن‌ها را تبدیل به یک معماه غیرقابل حل کنند.

بولیا (۱۹۶۵-۶۹) تأکید دارد که دانستن ریاضی به معنای توانایی در انجام ریاضی است، یعنی حل کردن مسأله‌های مشکل. هدف آموزش مدرسه‌ای، تقویت توانایی تفکر در دانش آموزان است.

در حالی که مسأله‌های معمولی در خدمت یاددادن چگونگی به کاربردن رویه‌های خاص به دانش آموزان است، تنها از طریق استفاده‌ی خردمندانه از مسأله‌های غیرمعمولی که «بیازمند درجاتی از استقلال، قضاؤت، اصلاح و خلاقیت» هستند، می‌توان توانایی حل مسأله‌ی آن‌ها را توسعه داد. هالموس^{۶۷} (۱۹۸۰) در مقاله‌اش تحت عنوان «قلب ریاضیات» بیان می‌کند که «دلیل اصلی وجود ریاضی دان، این است که مسأله حل کند و بنابراین آنچه واقعاً ریاضی از آن تشکیل شده، مسأله‌ها و راه حل‌ها می‌باشد». این دیدگاه، فاصله‌ی زیادی با دیدگاه به تصویر کشیده

در حقیقت شواهد نشان می‌دهند که اگر

دانش آموزان، با تکرار و به شکل طوطی وار، به حفظ

کردن و تمرین کردن رویه‌ها بپردازند، برایشان مشکل خواهد

بود که در آینده دوباره به این مفاهیم برگشته و درک

عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی که در پس آن رویه‌ها

قرار دارد، پیدا کنند

تحقیقات زیادی راجع به اثربخشی برنامه‌های به اصطلاح بدیل که بر حل مسأله تأکید دارند، در مدارس ابتدایی و در درس حساب انجام شده است. هیبرت (۱۹۹۹)، این پژوهش‌ها را تحلیل کرده و جلوه‌های مشترکی را که مشخص کننده‌ی اغلب این برنامه‌های است، شناسایی کرده است. این برنامه‌ها:

- بر دانش و مهارت‌های قبلی دانش آموزان تکیه دارند؛
- فرصت‌هایی هم برای ابداع و هم برای تمرین ایجاد می‌کنند؛
- بر تجزیه و تحلیل روش‌های چندگانه برای حل مسأله‌ها متوجه‌کنند؛
- از دانش آموزان می‌خواهند توضیحاتی ارایه دهند؛
- بر توسعه‌ی مفهومی تأکید دارند بدون آن که ایجاد مهارت را قربانی این کار کنند؛
- بر آموزش مفهوم‌ها و مهارت‌های جدید در حین حل مسأله‌ها تأکید می‌کنند.

به جای این که معلم تنها به عنوان منبع اطلاعات و ارزیاب صحیح بودن آن‌ها باشد، بر انتخاب و توالی مسأله‌های مناسب، در میان گذاشتن اطلاعات، و ایجاد فرهنگی در کلاس که در آن، دانش آموزان به طور فردی و تعاملی روی مسأله‌های بدیع کار می‌کنند، تأکید می‌ورزد. معلم بر فعالیت‌های حل مسأله‌ی بازتابی و عادی دانش آموزان تکیه می‌کند تا آن‌ها یاد بگیرند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷).

مخصوصه‌ی تعیین این که چه موقعی در جریان حل مسأله‌ی دانش آموز مداخله کنید بدون آن که برای ساخت و ساز و فهم و درک وی مزاحمتی ایجاد کنید، به خصوص هنگامی که از رویکرد حل مسأله استفاده می‌کنید، همیشه یکی از جنبه‌های [مهم] تدریس است. معلمان می‌توانند به شیوه‌هایی مداخله کنند و تفکر دانش آموزان را برانگیخته و آن‌ها را توسعه دهند و هم‌زمان، خود مختاری دانش آموزان را به شیوه‌های زیر تقویت کنند:

- انتخاب تکالیفی هدفمند در ذهن (در انتخاب تکالیف مناسب، دانش ریاضی و درک و تفکر دانش آموزان اساسی است)؛
- ارایه‌ی اطلاعات مرتبط (قراردادهای ریاضی، روش‌های بدیل، شرح و بسط ایده‌ها و روش‌های اخذ شده توسط دانش آموزان)؛
- رهبری توسعه‌ی فرهنگ کلاسی (تمرکز بر روش‌ها، به کارگیری موقعیت‌های مناسب برای اعمال مرجعیت) (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷)؛

که با سایر حوزه‌های موضوعی تلفیق می‌شود.

- باز-پاسخ و غیر معمولی است؛
- امکان استفاده از رویکردها و راه حل‌های چندگانه را ایجاد می‌کند،
- به سادگی با استفاده از یک رویه‌ی از پیش آموخته شده، قابل حل نیست.
- چالش برانگیز و در عین حال قابل دست‌یابی توسط دانش آموزان است؛
- نیازمند پافشاری است،
- امکان ورود به مسأله را می‌دهد.
- به خوبی طرح شده است؛
- حاوی واژه‌های شفاف و بدون ابهام است،
- انتظارات را شرح می‌دهد،
- پاسخ‌های قابل نمره‌دادن را برمی‌انگیزد.

محیط کلاس درس

محیط کلاس درس، باورهای دانش آموزان را درباره‌ی ریاضی شکل می‌دهد، همان‌طور که باورهای فرهنگی و تعامل با سایرین را هم شکل می‌دهد. شونفیلد (۱۹۹۲) بیان می‌کند که «اگر می‌خواهیم بفهمیم که افراد چگونه دیدگاه‌های ریاضی خود را می‌سازند، باید از نقطه نظر جامعه‌ی ریاضی که دانش آموزان در آن زندگی می‌کنند و نوع اعمالی که در آن جامعه رخ می‌دهد، به این موضوع نگاه کنیم». سه جلوه‌ی یک فرهنگ اجتماعی که دانش آموزان را تشویق می‌کند تا با تکالیف ریاضی به عنوان مسأله‌های بالرzes و جالب برخورد کنند عبارتند از:

- ایده‌ها، ارزش‌های بالقوه‌ی کلاس درس هستند و این توانایی را دارند که در خدمت یادگیری هر دانش آموز باشند و احترام به او و پاسخ وی را تضمین کنند.
- دانش آموزان نسبت به روش‌های مورد استفاده در حل مسأله‌ها احساس اقتدار همراه با احترام دارند و تشخیص می‌دهند که روش‌های گوناگونی برای انجام کار وجود دارد. آزادی در کشف روش‌های بدیل و در میان گذاشتن تفکر شان با سایر همسالان، خلاقیت را تشویق کرده و انگیزه‌ی دانش آموزان را افزایش می‌دهد.
- دانش آموزان و معلمان اشتباهات را محلی در نظر می‌گیرند که فرصت‌هایی را برای آزمودن خطاهای استدلالی و بالا بردن قدرت تجزیه و تحلیل فرد ایجاد می‌کنند. اشتباهات به طور سازنده، باید به عنوان فرصت‌هایی برای یادگیری مورد استفاده قرار گیرند.

نتیجه‌گیری

تغییر در آموزش ریاضی مستلزم دوباره سازی فرهنگ کلاس‌های درس ریاضی و دیدگاه معرفت شناختی^{۷۶} معلمان ریاضی است. باورهای رایج - مانند این که توانایی ریاضی امری ذاتی است و بنابراین دور از دسترس برخی افراد است، این که محظوظ و انباشتگی حقایق ریاضی مهم‌تر از یاد دادن نظرکردن و حل مسأله به دانش آموزان است، و این که بیشترین انتظاری که می‌توانیم از دانش آموزان داشته باشیم این است که ریاضی انجام دهنده و نه آن که ریاضی بفهمند - عمیقاً بر این که چه ریاضیاتی در این کشور [آمریکا] تدریس شود و چگونه تدریس شود، تأثیرگذاشته است. دانش آموزان و معلمان هنوز بر این باورند که مسأله‌ها باید به سرعت حل شوند و برای حل مسأله، دانش آموز باید انواع مشابهی از مسأله‌های حل شده را قبلاً مشاهده کرده باشد. به ندرت از دانش آموزان خواسته شده است که برای حل یک مسأله، فرایندی را ابداع کنند یا مسأله‌های خودشان را بر پایه‌ی ارزیابی از یک موقعیت یادداه، طرح کنند. انجام این کار نیازمند ارتقای چشم‌گیر استعدادها و انتظارات، با هدف توسعه‌ی مهارت‌های مرحله‌ی برتر تفکر و اطمینان به توانایی‌های دانش آموزان در حل مسأله‌های اصیل است.

اغلب، معلمان به اشتباه بین حل مسأله و مسأله‌های کلامی^{۷۷} همبستگی ایجاد می‌کنند. ولی غیر محتمل است که حل یک مسأله‌ی غیرکلامی برای ارایه‌ی کاربرد یا زمینه‌ای برای یادگیری عملیات، رویه‌ها، یا مفاهیم ریاضی، دانش آموزان را درگیر حل مسأله‌ی معنادار سازد. در حالی که تمرین‌های مسأله‌های کلامی می‌تواند به آماده سازی دانش آموزی در حل مسأله کمک کند، ولی تمرین واقعی برای آن چه که پولیا (۱۹۴۵) به عنوان هنر حل مسأله به آن اشاره می‌کند، ارایه نمی‌نماید. دانش آموزان به ندرت فرستادهایی را برای خلاقیت، جستجوگری و کشف ذاتی مسأله‌های چالش برانگیز غنی، غیرمعمولی و مفهومی، تجربه می‌کنند. در نتیجه اغلب دانش آموزان ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از حقایق و قواعد معمولی، کسالت‌بار و ایستاد می‌بینند که اساساً باید از طریق به خاطرسپاری یادگرفته شود، نه به صورت یک علم تجربی رو به تکامل و گسترش که متکی به جستجوگری است و از طریق آزمایش و حدسیه سازی، کشف و خلق می‌شود. دیدگاه اخیر برای بیشتر دانش آموزان، هم علاقه برانگیز، مناسب و جالب است و هم کمتر تحملی و ترسناک می‌باشد.

زیبوبیس‌ها

* تحت راهنمایی کیت پیکسوتو (Kit Peixotto) در مرکز آموزش علوم و ریاضی در زوشن سال ۲۰۰۰ میلادی.

53. The Instrumentalist View
 54. Teacher - directed
 55. National Assessment of Educational Progress (NAEP)
 56. Dirkes
 57. Richardson
 58. Ball
 59. Wilson
 60. Lioyck
 61. Lajoie
 62. Self - monitor
 63. Granwood
 64. Stacy
 65. Grooves
 66. Manouchehri
 67. Enderson
 68. Van Zoest
 69. Enyart
 70. Bushman
 71. Dirkes
 72. Smith
 73. Stein
74. Ehrlich
 75. Flexner
 76. Halmos
 77. Epistemological
 78. Word Problem
 79. Stacey
 80. Kyle Forman
1. Portland
 2. Oregon
 3. Alaska
 4. Idaho
 5. Montana
 6. Washington
 7. Mathematics and Science Education Center
 8. Open - ended Problem Solving
 9. William A. Brownell, *The Measurement of Understanding*
 10. National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM)
 11. Agenda for Action
 12. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)
 13. Peak
 14. Takahira
 15. Gonzales
 16. Frase
 17. Salganik
 18. Monograph
 19. Becker (Jerry Becker)
 20. Shimada (Shigera Shimada)
 21. National Research Council
 22. Moyer
 23. Cai
 24. Gramp
 25. Teacher - Centered
 26. Hiebert
 27. Carpenter
 28. Fennema
 29. Fuson
 30. Wearne
 31. Murray
 32. Oliver
 33. Human
 34. Stanic
 35. Kilpatrick
 36. Justification
 37. Motivate
 38. Recreation
 39. Practice
 40. George Polya
 41. Modern Heuristics
 42. Ill - defined
 43. Thompson
 44. Schoenfeld
 45. Burkhardt
 46. Pedagogically
 47. Shannon
 48. Zawojewski
 49. Hersh
 50. Ernest
 51. The Problem - solving View
 52. The Platonic View

-
- مراجع
- Ball, D. L. (1996). Teacher learning and the mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. *Phi Delta Kappan*, 77(7), 500-508.
- Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Brownell, W. (1946). Measurement of understanding, prepared by the society's committee. In N. B. Henry (Ed.), *National Society for the Study of Education. Committee on the Measurement of Understanding*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Burkhardt, H. (1988). Teaching problem solving. In H. Burkhardt, S. Groves, A. Schoenfeld, & K. Stacey (Eds.), *Problem solving – A world view. Proceedings of the problem solving theme group, ICME 5* (pp. 17-42). Nottingham, England: University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.
- Buschman, L. (1995). Communicating in the language of mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 324-329.
- Dirkes, M.A. (1993). *Self-directed problem solving: Idea production in mathematics*. Lanham, MD: University Press of America.
- Ehrlich, E. H., Flexner, S. B., Carruth, G., & Hawkins, J. M. (Eds.) (1980). *Oxford American dictionary*. New York, NY: Oxford University Press.



- Ernest, P. (1988, August). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Paper presented at the Sixth International Congress of Mathematical Education, Budapest, Hungary. Also: Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 249-254). London, England: Falmer Press. Retrieved June 26, 2000 from the World Wide Web: www.ex.ac.uk/~PErnest/impact.htm
- Foreman, L. C. (1998). *What's the big idea?* Portland, OR: Math Learning Center.
- Greenwood, J. J. (1993). On the nature of teaching and assessing "mathematical power" and "mathematical thinking". *Arithmetic Teacher*, 41(3), 144-152.
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.
- Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics: An anthology*. (pp. 9-28). Boston, MA: Birkhauser.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 3-19.
- Lajoie, S.P. (1995). A framework for authentic assessment in mathematics. In T.A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 19-37). Albany NY: State University of New York Press.
- Manouchehri, A., & Enderson, M.C. (1999). Promoting mathematical discourse: Learning from classroom examples. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(4), 216-222.
- Moyer, J.C., Cai, J., & Grampp, J. (1997). The gift of diversity in learning through mathematical exploration. In J. Trentacosta, & M.J. Kenney (Eds.), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom: The gift of diversity*. 1997 Yearbook (pp. 151-163). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Assessment of Educational Progress. (1983). *The third national mathematics assessment: Results, trends, and issues* (Report No. 13-Ma-01). Denver, CO: Educational Commission of the States.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Peak, L. (1996). *Pursuing excellence: A study of U.S. eighth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Peak, L. (1997). *Pursuing excellence: A study of U.S. fourth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962-65). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (vols. 1-2). New York, NY: John Wiley and Sons.
- Richardson, V. (1990). Significant and worthwhile change in teaching practice. *Educational Researcher*, 19(7), 10-18.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Students' beliefs about mathematics and their effects on mathematical performance: A questionnaire analysis*. Paper presented at the 69th Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.
- Schoenfeld, A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L.B. Resnick & L.E. Klopfer (Eds.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive research*. 1989 ASCD Yearbook (pp. 83-103). Washington DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-368). New York, NY: Macmillan.
- Shannon, A., & Zawojewski, J.S. (1995). Connecting research to teaching. Mathematics performance assessment: A new game for students. *Mathematics Teacher*, 88(9), 752-757.
- Smith, M.S., & Stein, M.K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Stacey, K., & Groves, S. (1985). *Strategies for problem solving*. Burwood, Victoria (Australia): VICTRACC Ltd.
- Stacey, K. (1990). On making better problem solvers. *Australian Mathematics Teacher*, 46(4), 28-30.
- Stanic, G.M.A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stigler, J.W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.
- Takahira, S., Gonzales, P., Frase, M., & Salganik, L.H. (1998). *Pursuing excellence: A study of U.S. twelfth-grade mathematics*.



and science achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study.

Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Thompson, A.G. (1989). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teachers' conceptions and beliefs. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds.) *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 232-243). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Zoest, L.R., & Enyart, A.(1998). Discourse, of course: Encouraging genuine mathematical conversations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(3), 150-157.

Wilson, M., & Lloyd, G.M. (2000). Sharing mathematical authority with students: The challenge for high school teachers. *Journal of Curriculum and Supervision*, 15(2), 146-169.

منابع دیگری که برای تهیه این مقاله با آنها مشورت شده است:

- Brown, S.I., Cooney, T.J. & Jones, D.(1990). Mathematics teacher education. In W.R.Houston, M.Haberman, & J.Sikula (Eds.), *Handbook of research on teacher education: A project of the Association of Teacher Educators* (pp.639-656). New York, NY: Macmillan.
- Chapman, O.(1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 201-228.
- Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, p. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clarke, D. (1997). *Constructive assessment in mathematics: Practical steps for classroom teachers*. Berkeley, CA.: Key Curriculum press.
- Conway, K.D. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(8), 510-514.
- Herman, J.L. (1992). What research tells us about good assessment. *Educational Leadership*, 49(8), 74-78.
- Herman , J.L., Aschbacher, P.R., & Winters, L. (1992). *A practical guide to alternative assessment*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Higgins, K.M., (1993, April). *An investigation of the effects on students' attitudes, beliefs, and abilities in problem solving and mathematics after one year of a systematic approach to the learning of problem solving*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 365521).
- Kaplan, R.G., Yamamoto, T., & Ginsburg, H.(1989). Teaching mathematics concepts. In L.B.Resnick & L.E.Kloper (Eds.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive research. 1989 ASCD Yearbook*. (pp.59-82). Washington DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.
- Leitze, A.R., & Mal, S.T.(1999). Assessing problem-solving thought. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(5), 305-

311.

Lester, F.K.(1994). Musings about mathematical problem-solving research:1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.

Marshall, S.P.(1989). Assessing problem solving: A short-term remedy and a long-term solution. In R.I.Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol.3.The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.159-177). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Mc Cleod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York, NY: Macmillan.

Resnick, L.B. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol. 3.The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.32-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E.A., & Marshall, S. (1990). Mathematical and scientific problem solving: Finding issues, and instructional implications. In B.F.Jones & L.Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pp.265-290). Elmhurst, IL: North Central Regional Educational Laboratory, & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Snow, R.E., & Farr, M.J.(Eds.) (1987). *Apitude, learning, and instruction: Vol. 3.Cognitive and affective process analyses*.

Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Spangler, D.A. (1992). Assessing students' beliefs about mathematics. *Arithmetic Teacher*, 40(3),148-52.

Szetela, W., & Nicol, C.(1992). Evaluating problem solving in mathematics. *Educational Leadership*, 49(8), 42-45.

Thompson, A.(1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research.

In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-368). New York, NY:Macmillan.

Webb, N. (1992). Assessment of students' knowledge of mathematics: Steps toward a theory. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-368). New York, NY: Macmillan.

Webb,N., & Romberg, T.A.(1992). *Implications of the NCTM standards for mathematics assessment*. In T.A. Romberg (Ed.), Mathematics assessment and evaluation: Imperatives for mathematics educators (pp.37-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Wilson, J.W., Fernandez, M.L., & Hadaway, N.

(1993).Mathematical problem solving. In P.S.Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp.57-77). New York, NY: Macmillian.

Zarinnia, E.A., & Romberg, T.A. (1991). *Framework for the California assessment program to report students' achievement in mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.



چند مسئله‌ی چالش برانگیز

اشاره

مسایل زیر، توسط دکتر اسدالله نیکنام برایمان ارسال شده‌اند و در شصت و پنجمین مسابقه‌ی ریاضی ویلیام لویل پاتنام^۱ که در دسامبر سال ۲۰۰۴ برگزار شد، آمده‌اند. بهترین راه حل ارایه شده برای هریک از این مسایل، به نام فرستنده در شماره‌های آینده به چاپ خواهد رسید.

هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

مسئله‌ی ۳. کلیه‌ی اعداد حقیقی $a > 0$ را تعیین کنید که به ازای آن‌ها،تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$ تعریف شده روی $[0, a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی

مسئله‌ی ۱. فرض کنید

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$$

$$R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. اگر r عدد گویای باشد که $p(r) = 0$ ، نشان دهید n عدد زیر، همگی عدد صحیح هستند.

دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به ازای یک عدد حقیقی k).

مسئله‌ی ۴. فرض کنید n ، عدد صحیح مثبت باشد و $n \geq 2$ و قرار دهید $\theta = \frac{2\pi}{n}$. نقاط $P_k = (k, 0)$ را در صفحه‌ی $x - y$ به ازای $k = 1, 2, 3, \dots, n$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید R_k نگاشتی باشد که صفحه را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، به اندازه‌ی زاویه θ حول نقطه‌ی P_k دوران می‌دهد و R ، نگاشت به دست آمده از ترکیب دوران‌های R_1, R_2, \dots, R_n (به ترتیب) باشد. به ازای نقطه‌ی (x, y) ، مختصات نقطه‌ی $R(x, y)$ را باید و به ساده‌ترین شکل ممکن، بیان کنید.

$$c_n r, c_n r^2 + c_{n-1} r, c_n r^3 + c_{n-1} r^2 + c_{n-2} r, \dots \\ c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r$$

مسئله‌ی ۲. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند.
نشان دهید

$$\frac{(m+1)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

1. Sixty-fifth Annual William Lowell Putnam Mathematical Competition.