فصل پنجم ریاضی نهم: عبارت های جبری و معادله

یک جمله ای: یک جمله ای از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می اید. یک جمله ای از دو قسمت تشکیل می شود: ضریب عددی و عبارت حرفی

عبارت حرفی	ضریب عددی	یک‌جمله‌ای
$x^{۲}y$	$-\sqrt{۵}$	$-\sqrt{۵}x^{۲}y$
$a^{۰}x^{۰}b^{۰}y^{۰}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$

فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که در ان a ϵ R و n ϵ w می باشد. یعنی حتما توان متغیر باید عضو مجموعه اعداد حسابی(w) باشد.

توان a منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست. $-\frac{۲}{a}=-۲a^{-۱}$

توان y منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست. $\frac{۳x}{y}=۳xy^{-۱}$

-هر عدد حقیقی یک جمله ای است زیرا توان متغیر ان صفر است.

-اگر در یک عبارت توان حروف منفی بوده و یا حروف در مخرج یا زیر رادیکال باشند، ان عبارت تک جمله ای نیست.

درجه ی یک جمله ای: توان متغیری را که در یک جمله ای وجود دارد، درجه ی یک جمله ای نسبت به ان متغیر می نامند.

یک جمله ای	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به همه ی متغیرها
$\sqrt{۷}x^{۴}y$	۴	۱	۴+۱=۵
$\frac{۳}{۸}x$	۱	۰	۱+۰=۱

یک جمله ای های متشابه: دو یا چند یک جمله ای را متشابه می گوییم که متغیرها و توان های مربوط به هر متغیر در ان ها یکسان باشد.(متشابه بودن یک جمله ای ها به ضریب عددی ان ها بستگی ندارد.)

یک جمله ای های زیر متشابه اند»»

$$-x^{۲}yz\ ,\ \frac{۷}{۲}yzx^{۲}\ ,\ \sqrt{۵}x^{۲}zy\ ,\ -\frac{۷}{۹}x^{۲}yz$$

دو یا چند یک جمله ای را می توان با هم جمع یا از هم کم کرد: برای جمع یا تفریق یک جمله ای های متشابه کافی است ضرایب عددی ان ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم و در کنار حاصل، قسمت حرفی یک جمله ای را قرار دهیم.

$$۳x^{۲}yz+۴x^{۲}yz=(۳+۴)x^{۲}yz=۷x^{۲}yz$$

ضرب و تقسیم یک جمله ای ها: برای بدست اوردن حاصل ضرب دو یک جمله ای کافی است ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را نیز در هم ضرب کنیم. برای تقسیم نیز ضرایب عددی را بر هم و حروف متناظر را نیز بر هم تقسیم می کنیم.

$$۵x(۴x^{۲}-۶y)-۷x^{۲}+۱۰xy=\underline{۲۰x^{۲}}-\underline{\underline{۳۰xy}}-\underline{۷x^{۲}}+\underline{\underline{۱۰xy}}=۱۳x^{۲}-۲۰xy$$

اتحاد جبری: اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان ، مقدار یکسانی داشته باشند،دراین صورت برابری جبری حاصل از ان ها را یک اتحاد جبری می نامیم.

x	$(x+۵)^{۲}$	$x^{۲}+۱۰x+۲۵$
-۲	$(-۲+۵)^{۲}=۳^{۲}=۹$	$(-۲)^{۲}+۱۰(-۲)+۲۵=۹$
۷	$(۷+۵)^{۲}=۱۲^{۲}=۱۴۴$	$۷^{۲}+۱۰\times۷+۲۵=۱۴۴$

اتحاد مربع دو جمله ای:

مربع جمله دوم + ۲برابر حاصل ضرب جمله ها+ مربع جمله اول=^{2}(جمله دوم + جمله اول)

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال»»

$$(۳x+۵)^۲ = (۳x)^۲ + ۲(۳x)(۵) + ۵^۲ = ۹x^۲ + ۳۰x + ۲۵$$
$$(x^۳ - yz)^۲ = (x^۳)^۲ + ۲x^۳(-yz) + (-yz)^۲ = x^۶ - ۲x^۳yz + y^۲z^۲$$

اتحاد مزدوج:

مربع جمله دوم _ مربع جمله اول = (جمله دوم _جمله اول) (جمله دوم + جمله اول)

$$(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$$

$$(x+۲)(x-۲) = x^۲ - ۲^۲ = x^۲ - ۴$$

$$(۲a-۳b)(۲a+۳b) = (۲a)^۲ - (۳b)^۲ = ۴a^۲ - ۹b^۲$$

اثبات اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^۲ - ab + ab - b^۲ = a^۲ - b^۲$$

$$۲۰۲ \times ۱۹۸ = (۲۰۰+۲)(۲۰۰-۲) = ۴۰۰۰۰ - ۴ = ۳۹۹۹۶$$

$$\underbrace{(x-۱)(x+۱)}_{(x^۲-۱)}(x^۲+۱)(x^۴+۱) = \underbrace{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}_{(x^۴-۱)}(x^۴+۱) = (x^۴-۱)(x^۴+۱) = x^۸ - ۱$$

اتحاد جمله مشترک : در این اتحاد یک جمله مشترک و دو جمله غیر مشترک داریم:

$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$$

جمله‌ی مشترک

جمله‌های غیرمشترک

مجموع دو جمله‌ی غیرمشترک

حاصل‌ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک

$$(x+۲)(x+۳)=x^{۲}+(۲+۳)x+۲\times۳=x^{۲}+۵x+۶$$

$$(x-۸)(x+۵)=x^{۲}+(-۸+۵)x+(-۸)(۵)=x^{۲}-۳x-۴۰$$

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$
$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله ای
(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله ای
(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$$

روش های تجزیه: الف) فاکتور گیری ب) استفاده از اتحادها

فاکتور گیری» برای فاکتور گیری مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱-ب.م.م ضرایب جملات را تعیین می کنیم.

۲-حروف مشترک با توان کمتر را مشخص می کنیم.

۳-ب.م.م ضرایب و حروف مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم.

۴-تک تک جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و حاصل را درون پرانتز می نویسیم.

$$۱۵a^۳b+۱۰a^۲b^۲=۵a^۲b(۳a+۲b)$$

استفاده از اتحادها» به کمک اتحادهایی مانند: اتحاد مزدوج،اتحاد یک جمله مشترک و اتحاد چاق و لاغر می توان چند جمله ای ها را تجزیه کرد.

اتحاد مزدوج

$$x^۲-۹=(x-۳)(x+۳)$$

اتحاد یک جمله مشترک

$$x^۲+\underbrace{۴}_{\text{مجموع}}x+\underbrace{۳}_{\text{ضرب}}=(x+۱)(x+۳)$$

باید دو عدد را که مجموع آن ها ۴ و حاصل ضرب آن ها ۳ باشد، پیدا کنیم.

$$x^۳-۲۷=(x-۳)(x^۲+۳x+۹)$$

مثال:عبارت های زیر را تجزیه کنید؟

$$x^۳+۳x^۲+۳x+۱=(x^۳+۱)+(۳x^۲+۳x)=(x+۱)(x^۲-x+۱)+۳x(x+۱)$$
$$=(x+۱)(x^۲-x+۱+۳x)=(x+۱)(x^۲+۲x+۱)=(x+۱)(x+۱)^۲$$

نابرابری ها و نامعادله ها: هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند، یکی از سه حالت زیر برای دو عدد وجود دارد:

الف)a بزرگتر از b است ب)a با b مساوی است ج)a کوچکتر از b است

$a>b$ $\qquad$ $a=b$ $\qquad$ $a<b$

اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، یعنی a یا مثبت است یا صفر »» $a\geq ۰$

اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد یعنی a یا منفی است یا صفر »» $a\leq ۰$

خواص نابرابری ها:

۱-اگر دو طرف یک نابرابری با عددی مانند m جمع کنیم، جهت نابرابری تغیر نمی کند.

$$a<b \Rightarrow a+m<b+m \xrightarrow{\text{مثال}} -۴<-۱ \Rightarrow \overbrace{-۴+۵}^{۱}<\overbrace{-۱+۵}^{۴}$$

۲-اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم جهت نابرابری تغیر نمی کند.

$$a<b\ ,\ m>0 \Rightarrow \begin{cases} am<bm \\ a\div m<b\div m \end{cases}$$

۳-اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی منفی ضرب و یا بر عددی منفی تقسیم کنیم جهت نابرابری تغیر می کند.

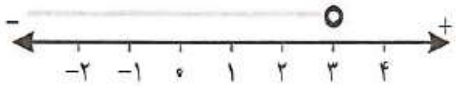
$$a<b\ ,\ m<0 \Rightarrow \begin{cases} am>bm \\ \frac{a}{m}>\frac{b}{m} \end{cases} \qquad ۱۲<۱۸ \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{۱۲\times(-۲)}_{-۲۴}>\underbrace{۱۸\times(-۲)}_{-۳۶} \\ \underbrace{۱۲\div(-۳)}_{-۴}>\underbrace{۱۸\div(-۳)}_{-۶} \end{cases}$$

نامعادله: اگر یک نابرابری شامل متغیر(مجهول) باشد، به ان نامعادله می گوییم.

به مجموعه مقادیر(عددهایی) که به ازای ان ها نامعادله به یک نابرابری درست، تبدیل شود.
مجموعه جواب نامعادله می گوییم و این مجموعه جواب را با حرف D نمایش می دهیم.

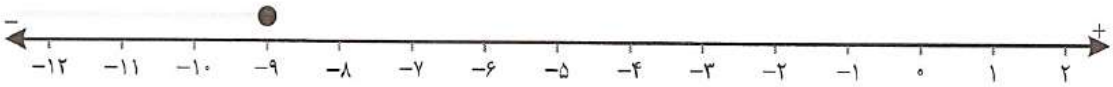
مثال) نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را مشخص کنید؟

$$۲x<۶ \Rightarrow x<\frac{۶}{۲} \Rightarrow x<۳ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<۳\}$$



$$۳x\le۱۲ \Rightarrow x\le\frac{۱۲}{۳} \Rightarrow x\le۴ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le۴\}$$

$$-\frac{۲}{۳}x\ge۶ \Rightarrow x\le۶\div(-\frac{۲}{۳}) \Rightarrow x\le۶\times(-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow x\le-۹ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le-۹\}$$



برای دریافت جزوات آموزشی بیشتر ریاضی و سایر دروس و همچنین برای مشاهده لیست مدرسین تدریس خصوصی ریاضی، دروس ابتدایی و متوسطه، کنکور و دانشگاه و ... به سایت ایران مدرس مراجعه کنید.

www.IranModares.com

www.IranModares.com