۱

گزینه ۲

نکته: مختصات رأس سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، عبارت است از: $(\frac{-b}{۲a}, f(\frac{-b}{۲a}))$

با توجه به اینکه رأس سهمی $y=۲x^{۲}-ax+b$، نقطهٔ $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ است، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{a}{۴}=۱\Rightarrow a=۴\\ \begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}\in \text{سهمی}\Rightarrow ۱=۲-a+b\xrightarrow{a=۴}b=۳\end{cases}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۱۶+۹=۲۵$$

۲

گزینه ۳

نکته: ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم که محور xها را در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ قطع می‌کند، عبارت است از:

$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

ابتدا با استفاده از نکتهٔ فوق، ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $f(x)=a(x+۲)(x-۳)$ می‌نویسیم. اکنون با توجه به اینکه $f(۰)=۱$، می‌توان نوشت:

$$a(۲)(-۳)=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۶}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۶}(x+۲)(x-۳)$$

بنابراین:

$$f(۱)=-\frac{۱}{۶}(۳)(-۲)=۱$$

۳

گزینه ۱

راه‌حل اول:

نکته: اگر α و β دو عدد حقیقی، $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha.\beta$ باشد، آنگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند.

$$x^{۲}-Sx+P=۰$$
$$S=x_۱+x_۲=۳$$
$$P=x_۱.x_۲=۱$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ جدید را $y_۱$ و $y_۲$ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}y_۱=\frac{۳}{x_۱}\\ y_۲=\frac{۳}{x_۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S'=y_۱+y_۲=\frac{۳}{x_۱}+\frac{۳}{x_۲}=\frac{۳(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}=\frac{۳S}{P}=\frac{۳(۳)}{۱}=۹\\ P'=y_۱.y_۲=\frac{۹}{x_۱x_۲}=\frac{۹}{P}=\frac{۹}{۱}=۹\end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^{۲}-S'x+P'=۰\Rightarrow x^{۲}-۹x+۹=۰$$

راه‌حل دوم:

اگر ریشهٔ معادلهٔ جدید را با y نمایش دهیم، آنگاه طبق فرض داریم:

$$y=\frac{۳}{x}$$

با جایگذاری $x=\frac{۳}{y}$ در معادلهٔ داده‌شده، داریم:

$$(\frac{۳}{y})^{۲}-۳(\frac{۳}{y})+۱=۰\Rightarrow\frac{۹}{y^{۲}}-\frac{۹}{y}+۱=۰\xrightarrow{\times y^{۲}}y^{۲}-۹y+۹=۰$$

این همان معادلهٔ موردنظر است.

۴

گزینه ۳

می‌توان نوشت:

$$x^{۲}-(۲m+۱)x+m(m+۱)=(x-m)(x-(m+۱))=۰\Rightarrow\begin{cases}x=m\\ x=m+۱\end{cases}$$

طبق فرض، داریم: $m<۳<m+۱$. بنابراین:

$$\begin{cases}m<۳\\ m+۱>۳\Rightarrow m>۲\end{cases}\xrightarrow{\cap}۲<m<۳$$

۵ گزینه ۱

باتوجه‌به صورت مسـئله، تقاطع سهمی با محور xها در نقاط $x_1 = ۵$ و $x_2 = -۲$ است، پس معادلهٔ سـهمی به‌صورت $f(x) = a(x-۵)(x-(-۲))$ است.

باتوجه‌به اینکه $f(۰) = -۱$ می‌توان نوشت:

$$f(۰) = -۱ \Rightarrow -۱ = a(-۵)(۲) \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۰}$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = \frac{۱}{۱۰}(x-۵)(x+۲)$ است.

۶ گزینه ۳

نکته: معادلهٔ محور تقارن تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$، عبارت است از: $x = -\frac{b}{۲a}$

باتوجه‌به نمودار، می‌توان فهمید ریشه‌های $f(x) = ۰$، به‌صورت $x = ۰$ و $x = ۴$ هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax(x-۴) = ax^۲ - ۴ax \Rightarrow y = f(x) \quad \text{معادلهٔ محور تقارن} : x = -\frac{-۴a}{۲a} = ۲$$

می‌دانیم برای رسم تابع $y = f(x-۲)$، کافی است نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم، بنابراین معادلهٔ محور تقارن تابع $y = f(x-۲)$ عبارت است از: $x = ۲ + ۲ = ۴$

۷ گزینه ۲

ابتدا معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x - ۳ = ۲\sqrt{x} \xrightarrow[x\geq ۳]{\text{طرفین به توان ۲}} x^۲ - ۶x + ۹ = ۴x \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۹ = ۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۹ \\ x = ۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

جواب $x = ۱$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند پس تنها یک عدد حقیقی با این شرط وجود دارد.

۸ گزینه ۲

ماشین A در یک ساعت، $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{t_A}$ باغ را سمپاشی می‌کند. ماشین B در یک ساعت، $\frac{۱}{t_B}$ همان باغ را سمپاشی می‌کند. اگر ماشین A و B باهم کار کنند؛ در یک ساعت، $\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{t_{A,B}}$ همان باغ را سمپاشی می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{t_A} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{t_{A,B}} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۵-۳}{۳۰} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow t_B = ۱۵$$

۹ گزینه ۴

نکته: اگر در مراحل حل یک معادله به یک عبارت همواره درست برسیم، کل دامنه، جواب معادله خواهد بود.

$$\sqrt{x + \sqrt{x^۲ - ۱}} + \sqrt{x - \sqrt{x^۲ - ۱}} = \sqrt{۲x + ۲} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}} x + \cancel{\sqrt{x^۲ - ۱}} + x - \cancel{\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

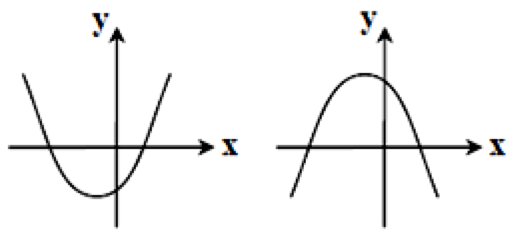
$$+ ۲\sqrt{x^۲ - x^۲ + ۱} = ۲x + ۲$$

$$\Rightarrow ۲x + ۲ = ۲x + ۲ \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

بنابراین مطابق نکته، کل دامنه $(x \geq ۱)$ جواب این معادله خواهد بود درنتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

۱۰ گزینه ۲

برای اینکه نمودار $f(x)$ از هر ۴ ناحیه عبور کند، باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد. (به شکل دقت کنید)
بنابراین باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد:



$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a^۲ - ۴} < ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow a^۲ < ۴$$
$$\Rightarrow -۲ < a < ۲ \Rightarrow a \in (-۲, ۲)$$

دقت کنید اگر $\frac{c}{a} < ۰$، آنگاه $ac < ۰$، پس $-۴ac > ۰$ درنتیجه $\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰$ و دیگر نیازی به بررسی شرط $\Delta > ۰$ نیست.

۱۱ گزینه ۲

نکته: اگر $a + \frac{۱}{a} = ۲$، آنگاه $a = ۱$
نکته: اگر $a + \frac{۱}{a} = -۲$، آنگاه $a = -۱$
با جایگذاری ضابطهٔ توابع f و g در معادلهٔ داده‌شده، داریم:

$$\frac{۵-۲x}{۳x-۱} + \frac{۳x-۱}{۵-۲x} = ۲$$

اکنون با فرض $\frac{۵-۲x}{۳x-۱} = a$، معادلهٔ موردنظر به‌صورت $a + \frac{۱}{a} = ۲$ درمی‌آید که باتوجه‌به نکتهٔ بالا جواب آن برابر $a = ۱$ است، بنابراین:

$$\frac{۵-۲x}{۳x-۱} = ۱ \Rightarrow ۵ - ۲x = ۳x - ۱ \Rightarrow x = \frac{۶}{۵}$$

۱۲ گزینه ۳

نکته: اگر α و β دو عدد حقیقی، $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشد، آنگاه معادله‌ای که α و β ریشه‌های آن باشند، عبارت است از:

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

$۲\alpha + ۱$ و $۲\beta + ۱$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۴x - ۳ = ۰$ هستند، پس:

$$\begin{cases} (۲\alpha + ۱) + (۲\beta + ۱) = -\frac{b}{a} = -\frac{۴}{۲} = -۲ \Rightarrow \alpha + \beta = -۲ \\ (۲\alpha + ۱)(۲\beta + ۱) = \frac{c}{a} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۱ = -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\alpha+\beta=-۲} \alpha\beta = \frac{۳}{۸} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-۲}{\frac{۳}{۸}} = \frac{-۱۶}{۳} \\ P = \frac{۱}{\alpha} \cdot \frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۸}{۳} \end{cases}$$

با استفاده از نکتهٔ بالا، معادله عبارت است از:

$$x^۲ - (-\frac{۱۶}{۳})x + \frac{۸}{۳} = ۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲ + ۱۶x + ۸ = ۰$$

۱۳ گزینه ۲

نکته: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم:

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \quad , \quad P = x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}$$

a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳ax - ۲b = ۰$ هستند، پس با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} S = a + b = -\frac{-۳a}{۱} \\ P = ab = \frac{-۲b}{۱} = -۲b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۲a \\ a = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۴ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۲$$

۱۴ گزینه ۳

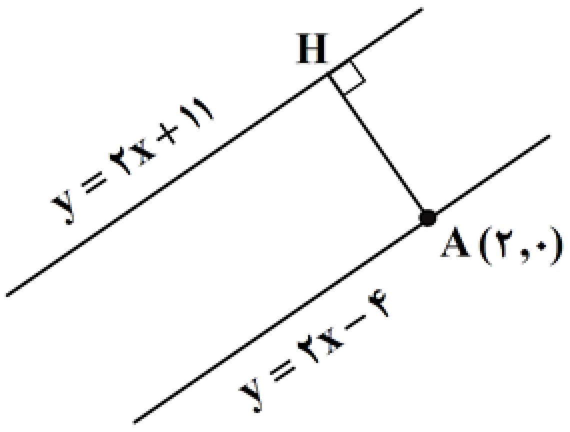
راه‌حل اول:

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_{\circ}, y_{\circ})$ از خط $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

$$\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

نکته: برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو خط موازی، یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از آن‌ها در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست می‌آوریم.

ابتـدا توجه کنید که دو خط $y = ۲x + ۱۱$ و $y = ۲x - ۴$ باهم موازی‌اند. حال برای تعیین فاصلـهٔ آن‌ها، نقطهٔ دلخواه $A(۲, \circ)$ را از خط $y = ۲x - ۴$ انتخاب می‌کنیم و فاصلهٔ آن را از خط $y - ۲x - ۱۱ = \circ$ به دست می‌آوریم.



$$AH = \frac{|\circ - ۲(۲) - ۱۱|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵}$$

راه‌حل دوم:

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی $ax + by + c = \circ$ و $ax + by + c' = \circ$ برابر است با:

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، فاصلهٔ دو خط موازی $y - ۲x - ۱۱ = \circ$ و $y - ۲x + ۴ = \circ$ برابر است با:

$$\frac{|-۱۱-۴|}{\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵}$$

۱۵ گزینه ۱

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_{۱}, y_{۱})$ و $B(x_{۲}, y_{۲})$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_{۱} - x_{۲})^{۲} + (y_{۱} - y_{۲})^{۲}}$$

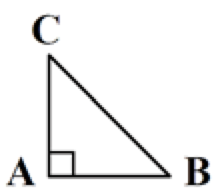
نکته (عکس قضیهٔ فیثاغورس): اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

$$AB = \sqrt{(۱ - \circ)^{۲} + (۴ - ۱)^{۲}} = \sqrt{۱\circ}$$

$$AC = \sqrt{(۳ - \circ)^{۲} + (\circ - ۱)^{۲}} = \sqrt{۱\circ}$$

$$BC = \sqrt{(۳ - ۱)^{۲} + (\circ - ۴)^{۲}} = \sqrt{۲\circ}$$

بنابراین $AB = AC$ و $BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$، پس مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



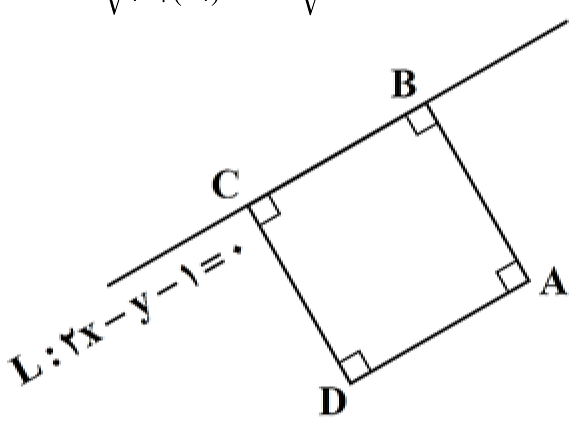
۱۶ گزینه ۲

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$، برابر است با:

$$\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط L صدق نمی‌کند، پس A روی خط L قرار ندارد؛ بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A از خط L برابر با طول ضلع مربع است. باتوجه‌به نکتهٔ بالا، این مقدار برابر است با:

$$AB=\frac{|۲(۳)-۰-۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$



پس مساحت این مربع برابر است با:

$$S=(\sqrt{۵})^۲=۵$$

۱۷ گزینه ۲

نکته: مختصات وسط پاره‌خط AB عبارت است از:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲}, \frac{y_A+y_B}{۲})$$

ابتدا مختصات نقطهٔ M (وسط ضلع BC) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱ \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۷+۵}{۲}=۶ \end{cases} \Rightarrow M(۱,۶)$$

اکنون کافی است معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $M(۱,۶)$ می‌گذرد، بنویسیم. برای این منظور دو راه‌حل ارائه می‌کنیم:

راه‌حل اول:

نکته: معادلهٔ خطی با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y=mx+h$ است.

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

شیب خط گذرا از نقاط A و M برابر است با:

$$m_{AM}=\frac{۶-۵}{۱-۲}=-۱$$

بنابراین معادلهٔ میانهٔ AM به‌صورت $y=-x+h$ است.

چون $A(۲,۵)$ روی این خط واقع است، پس مختصات آن در این معادله صدق می‌کند:

$$۵=-۲+h \Rightarrow h=۷$$

بنابراین معادلهٔ میانهٔ AM به‌صورت $y=-x+۷$ یا $x+y=۷$ است.

راه‌حل دوم:

نکته: معادلهٔ خط گذرا از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$، عبارت است از:

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، معادلهٔ میانهٔ AM عبارت است از:

$$y-۵=\frac{۶-۵}{۱-۲}(x-۲) \Rightarrow y-۵=-x+۲ \Rightarrow x+y=۷$$

۱۸ گزینه ۴

راه‌حل اول:

نکته: مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، عبارت است از:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

نقاط A و B نسبت به نقطهٔ M قرینه‌اند، پس نقطهٔ M وسط آن‌ها قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{۲}=x_M \Rightarrow \frac{a-۱+۲b+۵}{۲}=-۱\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=y_M \Rightarrow \frac{b-۵+۲a+۱}{۲}=۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+۲b=-۶\\ ۲a+b=۱۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۱۰\\ b=-۸\end{cases} \Rightarrow ab=-۸۰$$

راه‌حل دوم:

نکته: قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ نسبت به نقطهٔ $M(x_M,y_M)$، عبارت است از:

$$B(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)$$

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، قرینهٔ نقطهٔ $A(a-۱,b-۵)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ عبارت است از:

$$B(-۲-a+۱,۸-b+۵)=B(-a-۱,-b+۱۳)$$

طبق فرض مختصات این نقطه به‌صورت $B(۲b+۵,۲a+۱)$ است، پس:

$$\begin{cases}۲b+۵=-a-۱\\ ۲a+۱=-b+۱۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+۲b=-۶\\ ۲a+b=۱۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۱۰\\ b=-۸\end{cases} \Rightarrow ab=-۸۰$$

۱۹ گزینه ۴

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$، برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر با -۱ باشد.

شیب خط گذرا از نقاط $A(۲,۶)$ و $C(۸,۰)$ برابر است با:

$$m_{AC}=\frac{۰-۶}{۸-۲}=-۱$$

باتوجه‌به شکل، AB بر AC عمود است، پس:

$$m_{AB}=\frac{-۱}{m_{AC}}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

نقطهٔ B را به‌صورت $B(۰,b)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به اینکه $m_{AB}=۱$، داریم:

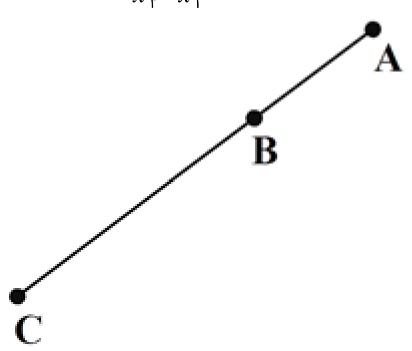
$$\frac{b-۶}{۰-۲}=۱ \Rightarrow b-۶=-۲ \Rightarrow b=۴$$

۲۰ گزینه ۲

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

باتوجه‌به اینکه نقاط A، B و C در یک راستا قرار دارند، باید شیب AB و شیب BC برابر باشد.



$$m_{AB}=m_{BC} \Rightarrow \frac{(۲a-۲)-۱}{(a+۱)-۴}=\frac{(۲a-۵)-(۲a-۲)}{(a+۳)-(a+۱)} \Rightarrow \frac{۲a-۳}{a-۳}=\frac{-۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴a-۶=-۳a+۹ \Rightarrow a=\frac{۱۵}{۷}$$

۲۱

گزینه ۳

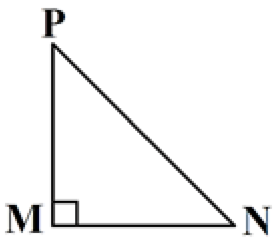
نکته: طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

نکته (عکس قضیهٔ فیثاغورس): اگر در یک مثلث، مربع یک ضلع برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

نکته: مساحت مثلث قائم‌الزاویه، برابر با نصف حاصل‌ضرب طول اضلاع قائمه است.

ابتدا طول هریک از اضلاع مثلث را تعیین می‌کنیم:



$$MN = \sqrt{(۷-۴)^۲ + (۶-۲)^۲} = ۵$$
$$MP = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۲-۵)^۲} = ۵$$
$$NP = \sqrt{(۷-۰)^۲ + (۶-۵)^۲} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

باتوجه‌به اینکه بین اضلاع این مثلث رابطهٔ $NP^۲ = MN^۲ + MP^۲$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم مثلث MNP در رأس M قائمه است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}MN \times MP = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵$$

۲۲

گزینه ۳

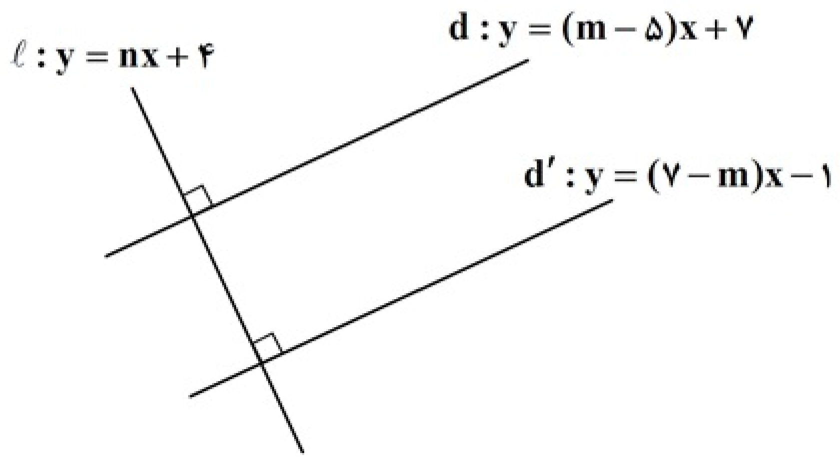
نکته: دو خط زمانی موازی‌اند که شیب‌هایشان برابر باشد.

نکته: دو خط غیرموازی محورهای مختصات، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر با -۱ باشد.

نکته: اگر خط ℓ بر دو خط d و d' در صفحه عمود باشد، آنگاه d و d' باهم موازی‌اند.

طبق فرض، خط ℓ بر دو خط d و d' عمود است، پس خط‌های d و d' باهم موازی‌اند؛ بنابراین شیب‌هایشان برابر است:

$$m - ۵ = ۷ - m \Rightarrow m = ۶$$



پس معادلهٔ خط‌های d و d' به‌صورت $y = x + ۷$ و $y = x - ۱$ است. حال باتوجه‌به اینکه خط $y = nx + ۴$ بر این خط‌ها عمود است، نتیجه می‌گیریم: $n = -۱$، بنابراین:

$$m - n = ۷$$

۲۳

گزینه ۲

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_۰^۲ + y_۰^۲}$$

چون A روی خط $y = ۲x$ است، پس مختصات آن به‌صورت $A(a, ۲a)$ است. ازطرفی طبق فرض $\overset{\Delta}{OAB}$ در رأس O متساوی‌الساقین است، پس $OA = OB$.

$$\begin{cases} OA = \sqrt{a^۲ + (۲a)^۲} = \sqrt{۵a^۲} \\ OB = \sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵} \end{cases} \xrightarrow{OA=OB} \sqrt{۵a^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

چون A در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس فقط $a = ۱$ قابل‌قبول است؛ بنابراین:

$$y_A = ۲a = ۲ \times ۱ = ۲$$

۲۴ گزینه ۳

نکته: به‌طور کلی در هر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است:

$S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$

a و b صفرهای چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)=x^{۲}-(a+۱)x-۳b$ هستند، پس:

$$\begin{cases} a+b=-\frac{-(a+۱)}{۱}=a+۱ \\ ab=\frac{-۳b}{۱}=-۳b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۳ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۱۰$$

۲۵ گزینه ۱

نکته: معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشد، به‌صورت $ax^{۲}-bx+c=۰$ است.

نکته: معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن وارون ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشد، به‌صورت $cx^{۲}+bx+a=۰$ است.

ابتدا باید توجه کنید که α و β ریشه‌های معادلهٔ $۱۳x^{۲}-۷x-۱=۰$ هستند، پس در این معادله صدق می‌کنند و داریم:

$$۱۳\alpha^{۲}-۷\alpha-۱=۰ \quad , \quad ۱۳\beta^{۲}-۷\beta-۱=۰ \quad (*)$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱۳\alpha^{۲}-۸\alpha-۱=(۱۳\alpha^{۲}-۷\alpha-۱)-\alpha \xrightarrow{(*)} (۱۳\alpha^{۲}-۷\alpha-۱)-\alpha=-\alpha \\ ۱۳\beta^{۲}-۸\beta-۱=(۱۳\beta^{۲}-۷\beta-۱)-\beta \xrightarrow{(*)} (۱۳\beta^{۲}-۷\beta-۱)-\beta=-\beta \end{cases}$$

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $-\alpha$ و $-\beta$ باشد، به‌صورت $۱۳x^{۲}+۷x-۱=۰$ است.