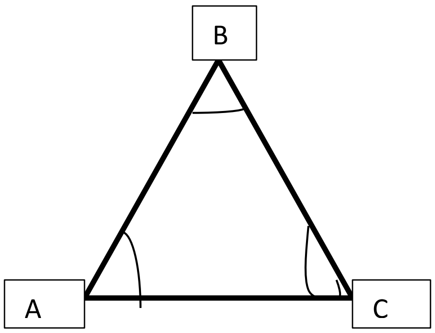
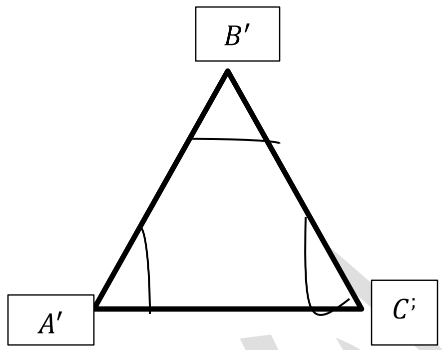
تشابه مثلث ها و نسبت های مثلثاتی

دو مثلث را با هم متشابه گویند ،هر گاه زوایای نظیر در انها برابر با نسبت اضلاع متناظر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر دو مثلثABCو$A'B'C'$ دو شکل زیر متشابه اند ، هر گاه:





$$(1)\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$(2)\ \hat{A}=\hat{A'} \text{ و } \hat{B}=\hat{B'} \text{ و } \hat{C}=\hat{C'}$$

نتیجه: دو مثلث در حالت های زیر متشابه اند:

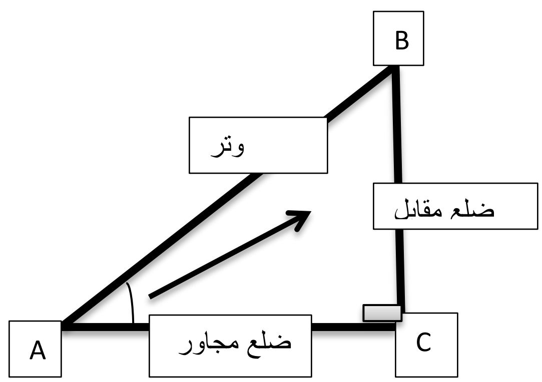
حالت اول (تساوی زاویه ها): اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند.(شکل ۱)

حالت دوم (تناسب بین دو ضلع و تساوی زاویه ی بین آنها): اگریک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع های نظیر این زاویه ها متناسب باشند ،آن دو مثلث متشابه اند .(شکل ۲)

https://teaching.iranmodares.com/teaching-index.php

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

به مثلث قائم الزاویه ی ABC در شکل زیر توجه کنید .در این مثلث بنا به تعریف داریم:



$$SIN\ A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه ی} A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\mathrm{COS\ A} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه ی} \mathrm{A}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{\mathrm{AB}}$$

$$TAN\ A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه ی} A}{\text{طول ضلع مجاور زاویه ی} A} = \frac{BC}{AC}$$

$$COT\ A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه ی} A}{\text{طول ضلع مقابل زاویه ی} A} = \frac{AC}{BC}$$

به طریق مشابه برای زاویه ی B داریم:

$\sin B = \frac{AC}{AB}$ و $\cos B = \frac{BC}{AB}$ و $\tan B = \frac{AC}{BC}$ و $\cot B = \frac{BC}{AC}$

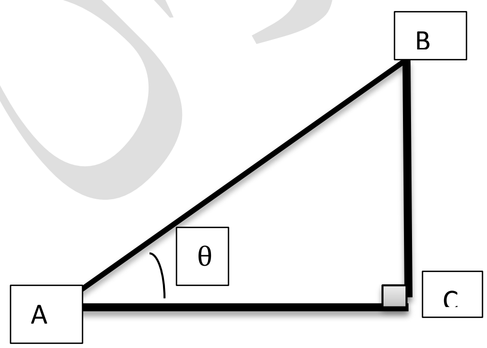
نتیجه:در مثلث قائم الزاویه ی ABC، به راس قائمه ی $\hat{C}$, $\hat{A}+\hat{B}=90°$ آنگاه:

(1) $\cos A = \sin B$, $\sin A = \cos B$

(2) $\tan A = \cot B$ و $\cot A = \tan B$

طبق قضیه ی فیثاغورس،در مثلث قائم الزاویه ی ABC در شکل بالا، رابطه ی $AB^2 = AC^2 + BC^2$ بین اضلاع برقرار است،که در آن AC و BC دو ضلع زاویه ی قائمه ی C هستند.

سوال: فرض کنید در مثلث قائم الزاویه ی شکل زیر، $\tan\ \theta = \frac{3}{7}$ باشد ،مقدار $\sin\theta$ را بیابید.



حل:چون $tan\theta$برابر $\frac{3}{7}$ است، پس می توانیم درمثلث قائم الزاویه ی شکل داده شده ، اندازه ی ضلع رو به رو به زاویه ی θرا ۳ و ضلع مجاور آن را ۷ بگیریم. از طرفی طبق قضیه ی فیثاغورس داریم:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow 7^2 + 3^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 58$$

بنابراین اندازه ی وتر این مثلث برابر $AB = \sqrt{58}$ است و خواهد داشت:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

نسبت های مثلثاتی زوایای۳۰و۴۵و۶۰ درجه

θ / نسبت	30°	45°	60°
sinθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot θ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$