مفهوم قدرمطلق و ویژگی های آن

تعریف قدر مطلق:اگر a عددی حقیقی باشد ،قدر مطلق a برابر است با:

اگر a مثبت یا صفر باشد ،قدر مطلق را با علامت مثبت بر می داریم.

اگر a منفی باشد،قدر مطلق را با علامت منفی بر می داریم.

$$|a| = \begin{cases} a & ,a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$|x|$,فاصله ی متغییر x روی محور اعداد تا مبدا است.به همین ترتیب$|X - a|$

فاصله ی نقطه ی xتا نقطه ی a روی محور اعداد است.

تساوی های قدر مطلقی

1)$|a| \geq 0$

2)$|a| = |-a|$

3)$\sqrt{a^2} = |a|$

4)$|a|^2 = a^2$

5)$\sqrt[2m]{a^{2n}} = \sqrt[m]{|a|^n}, m$ و $n \in N \;\; (m > 1)$

6)اگر$|a| = a \rightarrow a \geq 0$

7)اگر $|a| = -a \;\; \rightarrow a \leq 0$

8)اگر$|a| > 0 \rightarrow a \neq 0$

9)اگر $|x| = a \rightarrow x = \pm a \; , a \geq 0$

10)اگر$|x| = |y| \rightarrow x = \pm y$

$11)|ab| = |a||b|$

$12)\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

مثال:اگرa<0 باشد،حاصل $\sqrt[4]{a^6}$ را بیابید.

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{|a|^3} = |a|\sqrt{|a|} \xrightarrow{a<0} = -a\sqrt{-a}$$

نامساوی های قدر مطلقی

نامساوی معادل	حدود تغییرات	نا مساوی قدر مطلق
$x^2 < a^2$	$-a < x < a$	$1)|x| < a$
$x^2 \le a^2$	$-a \le x \le a$	$2)|x| \le a$
$x^2 > a^2$	$x < -a$ یا $x > a$	$3)|x| > a$
$x^2 \ge a^2$	$x \ge a$ یا $x \le -a$	$4)|x| \ge a$

مثال:اگر$|b| < a$,آن گاه حاصل $|a+b| + |a-b|$ را بیابید.

$|b| < a$ بنا به دستور بالا:

$$\left| b < a \to -a < b < a \to \begin{cases} b < a \to a - b > 0 \\ b > -a \to b + a > 0 \end{cases} \right| \to |a-b| + |a+b|$$
$$= (a-b) + (b+a) = 2a$$

نامساوی مثلثی:

اگر aوb دو عدد حقیقی باشند ، آن گاه:

$|a+b| \le |a| + |b|$

تساوی زمانی امکان پذیر است که aوb هم علامت باشند یا a یاb صفر باشد،

به عبارت دیگر $ab \ge 0$.

مثال:

ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی xوY ، رابطه ی$|x-y| \geq |x|-|y|$ برقرار است.

با انتخابa=x-yو b=y و قرار دادن در نامساوی مثلثی داریم:

$$|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \rightarrow |x-y| \geq |x|-|y|$$

مثال:

حدود تغییرات تابع با ضابطه ی $f(x)=|2x-1|+2|x+3|$را بیابید.

از آنجایی که$|2x-1|=|1-2x|$و$2|x+3|=|2x+6|$,با استفاده از نامساوی مثلثی و با فرض $a=1-2x$و$b=2x+6$ خواهیم داشت:

$$|1-2x|+|2x+6| \geq |(1-2x)+(2x+6)|=7 \rightarrow f(x) \geq 7$$

معادلات قدر مطلقی

روش جبری:

برای حل بعضی از معادلات قدر مطلقی ، می توانیم از حل معادلات معادل آن یا خواص قدر مطلق استفاده کنیم و جواب های آن معادله را بیابیم، به روابط زیر توجه کنید:

$$1)|f(x)|=a \xrightarrow{a\geq 0} f(x)=a\,,f(x)=-a$$

$$2)|f(x)|=|g(x)| \rightarrow f(x)=g(x), f(x)=-g(x)$$

$3)|f(x)| = g(x) \xrightarrow{g(x)\geq 0} f(x) = g(x), f(x) = -g(x)$

$4)\big||f(x)|\big| + |g(x)| = 0 \rightarrow$ است $f(x) = 0$ و$g(x)$
ریشه های معادله جواب های مشترک $= 0$

در حل بعضی از معادلات قدر مطلقی می توانیم از نامساوی مثلثی استفاده کرده و دو طرف تساوی را با هم مقایسه کنیم.

روش تعیین علامت قدر مطلق

در حالت کلی برای حل یک معادله ی قدر مطلقی ،باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم،سپس معادله ی حاصل را حل کنیم،جواب هایی قابل قبول است که در بازه ی اختیار شده ،صدق کنند.

مثال:

معادله ی $x - 2 + |x - 3| = 1$ را حل کنید.

ریشه ی داخل قدر مطلق X=3است، پس:

$x \geq 3: x - 2 + (x - 3) = 1 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$ قابل قبول

$x < 3: x - 2 - (x - 3) = 1 \rightarrow 1 = 1$ همواره برقرار است

پس مجموعه ی جواب معادله،$x < 3 \cup \{3\}$ یا بازه ی$(-\infty,3]$ است.

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید:

تدریس خصوصی ریاضی