

جزوه آموزش ریاضی - تجزیه در حوزه صحیح

تدریس خصوصی ریاضی

تعریف: فرض کنیم D یک حوزه صحیح و a, b متعلق به D باشند. در این صورت

می‌گوییم a, b را می‌شمارد و می‌نویسیم $a|b$ هر گاه

$$\exists c \in D : b = ac$$

قضیه ۱:

فرض کنید a, b, c در حوزه صحیح D باشند در این صورت

$$a|a-1$$

$$a|b, b|c \rightarrow a|c - 2$$

$$3 - \text{اگر } a|b \text{ و } m \in D \text{ آنگاه } a|mb$$

$$4 - \text{اگر } a|b \text{ و } a|c \text{ و } m, n \in D \text{ آنگاه } a|mb \pm nc$$

5 - اگر $a|b$ و $a|c$ و تنها اگر عضو وارون پذیری مانند $u \in D$ وجود داشته باشد به

$$\text{طوری که } a=bu$$

برهان: به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود.

تعریف: اگر $a, b \in D$ آنگاه $d \in D$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک a, b می‌نامیم و

می‌نویسیم $d=(a,b)$ هرگاه:

$$\text{الف: } d|a, d|b$$

ب: اگر $c \in D$ و $a|c$ و $b|c$ آنگاه $c|d$

تعریف: اگر D یک حوزه صحیح باشد، $a, b \in D$ را دو عضو وابسته (شریک) گوئیم هر گاه عضو وارون پذیر $u \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $a=ub$ تذکر: رابطه شریک بودن یک رابطه هم ارزی است .

مثال: نشان دهید a, b وابسته اند اگر و تنها اگر $\langle a \rangle = \langle b \rangle$
 حل: چون b شریک a است لذا وجود دارد عضو وارون پذیری مانند u متعلق به D به طوری که $a=ub$
 بنابراین $b|a$ لذا $\langle a \rangle \subset \langle b \rangle$ و چون a شریک b است لذا وجود دارد عضو وارون پذیری مانند u' متعلق به D به طوری که $b = u'a$ بنابراین $a|b$ لذا $\langle b \rangle \subset \langle a \rangle$ بنابراین a و b شریکند اگر و تنها اگر $\langle a \rangle = \langle b \rangle$

تعریف: فرض کنیم D یک حوزه صحیح و $p \in D$ باشد. p را در D تحویل ناپذیر گوئیم هر گاه اگر $p = ab$ که $a, b \in D$ آنگاه a یا b واحد باشند.

تعریف: فرض کنیم D یک حوزه صحیح باشد عضو غیر صفر و غیر واحد $p \in D$ را اول گوئیم اگر به ازای هر $a, b \in D$ که $p|ab$ آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

مثال: $f(X) = 2x + 3$ در $Z[X]$ یک عضو تحویل ناپذیر است ولی $g(x) = 4x + 6$ و $Z[X]$ تحویل پذیر است.

نکته: اگر F یک میدان باشد تجزیه پذیری در $F[x]$ و تحویل ناپذیری در آن به یک معنی است ولی اگر F میدان نباشد این دو مفهوم متفاوت اند. مانند مثال بالا $g(x)$ در $Z[x]$ تجزیه ناپذیر است ولی تحویل پذیر می باشد.

تعریف: فرض کنیم D یک حوزه صحیح و $a, b \in D$ آنها را نسبت به هم اول گوئیم هرگاه $(a, b) = 1$.

نکته: اگر D یک PID باشد در این صورت، a و b نسبت به هم اولند اگر و تنها اگر $ax + by = 1$ وجود داشته باشد به طوری که $x, y \in D$.

ایران مدرس

<https://www.iranmodares.com/index.php>

<https://teaching.iranmodares.com/teaching-index.php>

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید: [تدریس خصوصی ریاضی](#)