انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

اساس این روش بر مبناء رابطه زیر استوار است:

$$\int f'\,(g\,(x)\,)\,.\,g'\,(x)dx \;= f\,\big(g\,(x)\big) + c$$

در حقیقت برای انجام یک انتگرال گیری به روش تغییر متغیر باید با معرفی یک متغیر مناسب جدید از دو طرف ان دیفرانسیل گرفته و کل عبارت زیر علامت انتگرال در مساله اصلی را بر حسب این تغییر و دیفرانسیل آن بازنویسی کرده ، سپس جواب انتگرال موجود را که طبیعتا اینک ساده تر از مساله اولیه است، به دست آورده ، پاسخ نهایی را بر حسب متغیر اصلی بنویسیم.

بنابراین ، بدیهی است انجام موفقیت آمیز روش تغییر متغیر در"هنر انتخاب متغیر جدید"خلاصه می شود که در بسیاری مواقع مناسب است عبارتی از تابع زیر علامت انتگرال را به عنوان متغیر جدید معرفی می کنیم که دقیقا مشتق آن نیز در قسمت دیگری از تابع زیر علامت انتگرال موجود باشد.

مثال:

حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x}$ چیست؟

با تغییر متغییر $\sqrt[3]{x} = u$ داریم:

$$x = u^3 \to dx = 3u^2 du$$

لذا به دست می آید:

$$I = \int \frac{3u^2 du}{u + u^3}$$
$$= \int \frac{3u}{1 + u^2} du = \int \frac{3}{2} \frac{2u}{1 + u^2} du$$
$$= \frac{3}{2} \ln(1 + u^2 \ ) + c = \frac{3}{2} \ln\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) + c$$

مثال ۲:

حاصل انتگرال $\int \frac{sin\ ^3x}{cos^2x}\ dx$ را بدست آورید؟

حل:

با تغییر متغییر $\sqrt{x} = u$ داریم :

$$x = u^2 \to dx = 2u\ dx$$

لذا می توان نوشت:

$$I = \int \frac{2udu}{u^2 - u} = \int \frac{2\ du}{u - 1} = 2\ln|u - 1| + c = 2\ \ln\left|\sqrt{x} - 1\right| + c$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء:

اساس این روش بر مبناء رابطه زیر استوار است:

$$\int u\,.\,dv = uv - \int v\,du$$

uوv توابعی از یک متغییر مثل x می باشند.

در حقیقت برای محاسبه انتگرالی، مانند $\int f(x)dx$، باید dv ،U را از عبارت F(x) dx طوری انتخاب کنیم که اولا، قادر باشیم از dv, تابع v را مشخص کنیم و ثانیا، محاسبه $\int V\,du$ آسان تر باشد.

نکته: به سه دسته تابع زیر توجه کنید (که در I وII وIII آرگومان ها از x خطی می باشند):

I	II	III
لگاریتمی	چند جمله ای	نمایی
معکوس مثلثاتی		سینوس و کسینوس معمولی
معکوس هیپربولیک		سینوس و کسینوس هیپربولیک

به خاطر داشته باشید ، در موارد زیر روش جزء به جزء قابل استفاده است:

در انتگرال گیری از توابع گروه I.

در انتگرال گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه IدرIIحاصل شده اند.

در انتگرال گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه IIدرIII حاصل شده اند.

در انتگرال گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه III در یکدیگر حاصل شده اند .

نکته:گاهی مواقع برای محاسبه یک انتگرال ، لازم می شود چند بار متوالی از روش جزء به جزء استفاده کنیم که در برخی مسایل می توان این کار در جدولی خلاصه نمود انتگرال هایی که ساختار شبیه زیر دارند ، می توان با این روش خلاصه شده به سرعت محاسبه کرد:

$$\int (\text{یک چند جمله ای دلخواه از } X).\begin{pmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix}.dx$$

$$\int \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ax} \\ \sinh ax \\ \cosh ax \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{pmatrix} dx$$

مثال:

حاصل$\int Arc\cos x\,dx$ را به دست آورید؟

حل:

با اعمال روش جزء به جزء می نویسیم:

$$\begin{cases} Arc\cos x = u \\ dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ x = v \end{cases}$$

لذا داریم:

$$I = x\,Arccos\,x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\,Arccos\,x - \sqrt{1-x^2} + c$$

ایران مدرس

https://www.iranmodares.com/index.php

https://teaching.iranmodares.com/teaching-index.php

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید :تدریس خصوصی ریاضی

بر روی لینک زیر کلیک کنید و این فیلم را هم ببینید:

فیلم آموزشی انتگرال جزء به جزء از درس ریاضی با حل مثال تشریحی