انتگرال های ناسره (غیر عادی) و بررسی همگرایی و واگرایی آن

انتگرال های معین در دو وضعیت طبیعت ناسره دارند :

الف)یک یا هر دو حد بالایی وپایینی انتگرال ، بی نهایت باشد.

ب)تابع زیر علامت انتگرال در حدود بالایی یا پایینی و یا نقاطی در بین فاصله انتگرال گیری بی کران شود.

الف)بی نهایت بودن حدود انتگرال گیری:

اگر تابع f در فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

اگر تابع f در فاصله $(-\infty,a]$پیوسته باشد ،آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

اگر تابع f در فاصله $(-\infty,+\infty)$پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

در هر یک از حالات فوق اگر حدهای نوشته شده موجود باشند (حاصل، عددی مشخص و محدود گردد)، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می نامند.

همگرایی مشروط و مطلق

می داینم چنانچه تابع f به ازا تمام مقادیر $x \in (a,b)$ پیوسته باشد، همواره داریم:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

لذا، همگرایی انتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرایی انتگرال$\int_a^b f(x)dx$ را نتیجه می دهد و در این حالت می گوییم$\int_a^b f(x)dx$ همگرایی مطلق دارد، همچنین، چنانچه انتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$واگرا، اما، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگرا باشد، می گوییم $\int_a^b f(x)dx$ همگرایی مشروط دارد.

ب)بی کران شدن تابع زیر علامت انتگرال:

اگر تابعf در فاصله [a,b) پیوسته ولی$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

اگر تابع f در فاصله(a,b]پیوسته ولی $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a^+} F(x)$$

اگر تابع f در فاصله[a,b] به جز در نقطه cپیوسته و$\lim_{X\to c} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c^-} f(x)dx + \int_{c^+}^b f(x)dx = \lim_{x\to c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x\to c^+} F(x)$$

در هر یک از حالات فوق اگر حدهای نوشته شده موجود باشند (حاصل عددی مشخص و محدود گردد)، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا

می نامند.

چند نکته:

۱)انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^P}$ که در آنa>0 می باشد ، به ازای P>1 همگراست و به ازای $P \leq 1$ واگراست.

۲)انتگرال ناسره $\int_0^a \frac{dx}{x^P}$ که در آن a>0 می باشد، به ازای P<1همگراست و به ازای $P \geq 1$ واگراست.

قضیه

۱)هر گاه تابعf در فاصله $[a,+\infty)$پیوسته و همواره نامنفی بوده و $\lim_{x\to+\infty} x^p = f(x) = L$ باشد:

الف)چنانچهP>1 وLمتناهی باشد، آنگاه$\int_a^{\infty} f(x)dx$ همگراست.

ب)چنانچه $P \leq 1$و $L \neq 0$ (L می تواند نامتناهی نیز باشد)آنگاه$\int_a^{\infty} f(x)dx$واگراست

۲)هر گاه تابع f در فاصله [a,b)پیوسته و همواره نامنفی بوده و $\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) = L$ باشد:

الف)چنانچه P<1وL متناهی باشد آنگاه$\int_a^b f(x)dx$ همگراست.

ب)چنانچه$P \geq 1$و $L \neq 0$(L می تواند نامتناهی نیز باشد) آنگاه $\int_a^b f(x)dx$واگراست.

ایران مدرس

https://www.iranmodares.com/index.php

https://teaching.iranmodares.com/teaching-index.php

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید :تدریس خصوصی ریاضی