محاسبه مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه

با استفاده از تعریف مشتق می توان نشان داد اگرΔx به اندازه کافی کوچک باشد، رابطه تقریبی زیر برقرار است:

$$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

از رابطه فوق وقتی استفاده می کنیم که مقدار تابع و مشتق آن را در نقطه ای می دانیم و می خواهیم مقدار تابع را در نزدیکی های آن نقطه تخمین بزنیم.

نکته: وقتی می خواهیم تابع Y=f(x) را در نقطه(x_0,y_0) از طریق یک تابع خطی تخمین بزنیم، (خطی سازی کنیم) می نویسیم:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

حاصل$|\Delta y-dy|$ را خطای خطی سازی می گوییم که در آن:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$dy=f'(x_0)dx$$

همچنین، $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$را خطای نسبی خطی سازی می نامیم.

اگرf در اطرافx_0 دارای مشتق دوم باشد، آنگاه داریم:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+R$$

که در آن $R=f''(\alpha)\frac{(\Delta x)^2}{2}$ وα نقطه ای در فاصله $(x_0,x_0+\Delta x)$ است.

اگر تقعر نمودار F(x) به سمت بالا باشد R>0 و اگر تقعر نمودار F(x) به سمت پایین باشدR<0 خواهد بود.

همچنین اگر $|f''| \leq M$ باشد طبیعی است $|R| \leq \frac{M}{2}(\Delta x)^2$

مثال:

مقدار تقریبی $\sqrt{145}$ با استفاده از مشتق را به دست آورید؟

$$f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x_0 = 144\,, \Delta x = 1$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \to \sqrt{144+1} = \sqrt{144} + \frac{1}{2\sqrt{144}}\,.(1)$$

$$= 12 + \frac{1}{24}$$

نسبت های وابسته:

برخی مواقع یک کمیت به چند متغییر وابسته می شود و طبیعتا با تغییر کردن آن متغییر ها،مقدار کمیت مورد نظر نیز تغییر می کند.برای آنکه وضعیت تغییر کمیت مورد نظر را در این شرایط مشخص کنیم ، کافی است رابطه آن کمیت را با متغیر های مذکور نوشته و با مشتق گیری از دو طرف رابطه حاصل به سوال مورد نظر پاسخ دهیم.(معمولا در این بحث تمامی متغیرها و طبیعتا کمیت مورد نظر همگی تابعی از زمان می باشد و لذا مشتق گیری گفته شده نیز نسبت به زمان انجام می گیرد).

مثال:

بادکنکی را در نظر بگیرید که در اثر دمیدن باد به داخل آن، در حال بزرگ شدن می باشد . اگر وقتی شعاع بادکنک (که به شکل کره فرض شده) به 1m می رسد،حجم بادکنک با سرعت $0.1\frac{m^3}{5}$ در حال ازدیاد باشد ، سرعت افزایش سطح بادکنک را به دست آورید؟

اگر شعاع کره را r در نظر بگیریم، می دانیم:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3, s=4\pi r^2$$

لذا داریم:

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}.\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}\\ \frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dr}.\frac{dr}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}\end{cases}$$

وقتی r=1 است$\frac{dv}{dt}=0.1$ بوده و لذا:

$$0.1=4\pi(1)^2\frac{dr}{dt}\rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{0.1}{4\pi}$$

و در این شرایط داریم:

$$\frac{ds}{dt}=8\pi(1)\left(\frac{0.1}{4\pi}\right)=0.2\frac{m^2}{s}$$

ایران مدرس

https://www.iranmodares.com/index.php

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید:

تدریس خصوصی ریاضی