مجموعه سوالات امتحانی ریاضی دهم

(نسبت های مثلثاتی)

۱-طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتی متر است و سینوس یکی از زوایای ان $\frac{3}{5}$ است. محیط این مثلث را حساب کنید.

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع قائمه ی مقابل زاویه ی}A}{\text{طول وتر}}$$

$$= \frac{a}{c} \xrightarrow{\sin \hat{A} = \frac{3}{5}} \frac{3}{5} = \frac{a}{c} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{a}{10} \rightarrow a = 6cm$$

با استفاده از رابطه ی فیثاغورس داریم :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8cm$$

محیط مثلث برابر است با:

$$P_{ABC} = a + b + c = 6 + 8 + 10 = 24cm$$

۲-شخصی با فاصله ی ۴۰۰ متر از پای برجی قرار دارد و نوک برج را با زاویه ی ۲۵ درجه نسبت به افق مشاهده می کند.اگر فاصله ی چشم این شخص تا زمین ۱/۷ باشد. ارتفاع برج را پیدا کنید. $\tan 25^{\circ} = 0/46$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع قائمه ی مقابل به زاویه ی}A}{\text{طول ضلع قائمه ی مجاور به زاویه ی}A} = \frac{a}{b} \frac{\hat{A} = 25^{\circ}}{\tan 25^{\circ} = 0/46} \rightarrow \frac{0}{46} = \frac{a}{400}$$
$$\rightarrow a = 184m$$

پس ارتفاع ساختمان برابر است با:

h=a+1/7=184+1/7=185/7m

۳-مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست اورید.

الف) $5\sin 30^\circ - 4\tan 45^\circ + cos^2 60^\circ$

ب) $\sqrt{2}\sin 30^\circ \times \tan 60^\circ + \sqrt{3}\ \tan 30^\circ$

پ) $2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{2}\cos 45^\circ - 3\tan 45^\circ$

ت) $(1-sin^2 30^\circ)(1 + cot^2 30^\circ)$

با جایگذاری مقادیر نسبت های مثلثاتی داده شده، حاصل عبارت ها را به دست می آوریم. توجه کنید که نسبت های مثلثاتی مربوط به زوایای مهم مثل 30°و45°و60° را می بایست به خاطر بسپارید.

الف) $5\sin 30^0 - 4\tan 45^\circ + cos^2 60^\circ = 5 \times \frac{1}{2} - 4 \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} - 4 + \frac{1}{4} = -1/25$

ب) $\sqrt{2}\sin 30^0 \times \tan 60^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

پ) $2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{2}\ \cos 45^\circ - 3\tan 45^0 = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times 1 = 3 + 1 - 3 = 1$

ت) $(1-sin^2 30^\circ)(1 + cot^2 30^\circ) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right](1 + (\sqrt{3})^2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)(1 + 3) = 3$

۴-نردبانی ۶ متری را که با زمین زاویه ی ۶۰ درجه می سازد به دیواری تکیه داده ایم :

الف: فاصله ی پای نردبان از دیوار را بیابید.

ب:اگر در این حالت از نردبان بالا برویم ،محاسبه کنید حداکثر تا چه ارتفاعی می توان بالا رفت؟

(آخرین پله،بالاترین نقطه ی نردبان است)

الف)طول b (فاصله ی پای نردبان از دیوار)را با نوشتن $\cos\hat{C}$ به دست می آوریم:

$$\cos\hat{c} = \frac{b}{a}\ \frac{\hat{c} = 60^{\circ}}{a = 6m}\cos 60^{\circ} = \frac{b}{6}\ \xrightarrow{\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{b}{6} = b = 3m$$

ب)حداکثر ارتفاعی که در این حالت می توان از نردبان بالا رفت برابر با c است. پس

$$\sin\hat{c} = \frac{c}{a}\frac{\hat{c} = 60^{\circ}}{a = 6m} \rightarrow \sin 60^{\circ} = \frac{c}{6}\xrightarrow{\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{6} \rightarrow c = 3\sqrt{3}m$$

۵-علی بادبادکی را هوا کرد . اگر طول نخ آزاد شده ۱۲ متر و زاویه ای که دست علی با سطح افق می سازد ۳۰ درجه باشد و فاصله ی دست علی تا زمین ۱/۵ متر باشد،ارتفاع بادبادک از زمین را بیابید.

$$\sin\hat{c} = \frac{c}{a}\ \xrightarrow{\hat{c}=30^{\circ}, a=12m} \sin 30^{\circ} = \frac{c}{12} \xrightarrow{\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{c}{12} \rightarrow c = 6m$$

پس ارتفاع بادبادک از سطح زمین برابر با $c + \frac{1}{5} = 7/5m$ است.

۶-یک برج از نقطه های AوB که در فاصله ی ۲۷ متری از یکدیگر (و در راستای عمود بر برج ، روی زمین)و در یک طرف برج قرار دارند با زاویه های 30°و45° دیده می شود.ارتفاع برج را بیابید.

$$\tan\hat{A}=\frac{a}{c}\xrightarrow{\hat{A}=45^\circ}\tan 45^\circ=\frac{a}{c}\xrightarrow{\tan 45^\circ=1}1=\frac{a}{c}\rightarrow c=a$$

$$\tan\hat{B}=\frac{a}{c+c'}$$

$$\frac{\hat{B}=30^\circ, c=a}{c'=27m}\rightarrow\tan 30^\circ=\frac{a}{a+27}\xrightarrow{\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{a+27}\rightarrow\sqrt{3a}+27\sqrt{3}=3a\rightarrow(3-\sqrt{3})a=27\sqrt{3}\rightarrow a=\frac{27\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

۷-مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع ۲ سانتی متر را به دست آورید.

از هندسه می دانیم هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع هم مساحت تشکیل شده است. طول ضلع هر یک از مثلث های متساوی الاضلاع برابر با ۲ است ، پس:

$$S_{ABCDEF}=6S_{ABO}=6\times\frac{1}{2}\times OA\times OB\times\sin\hat{O}\,\frac{OA=OB=2}{\hat{O}=60^\circ}\rightarrow S_{ABCDEF}=6\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

۸-حاصل عبارت های زیر را به دست آورید ؟

الف) $\cos 180^{\circ} + \sin 90^{\circ} + \tan 0^{\circ}$

ب) $\sin 270^{\circ} + \cos 0^{\circ} + \tan 360^{\circ}$

الف) -1+1+0=0

ب) -1+1+0=0

۹-اگر $\sin x = 3m + 1$ باشد، محدوده ی m را بیابید.

همواره $-1 \le \sin x \le 1$ است ، پس:

$$-1 \le 3m + 1 \le 1 \xrightarrow{\text{جمع طرفین نامعادله با}(-1)} -2 \le 3m \le 0 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین نامعادله بر}3} -\frac{2}{3} \le m \le 0$$

۱۰-معادله ی خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها زاویه ی 60°بسازد و از نقطه ی $A(\sqrt{3}, 2)$ بگذرد.

شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه ی 60° می سازد برابر با $\tan 60^{\circ}$ است، معادله ی خط برابر است با:

شیب خط: $m = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$

$$y - y_A = m(x - x_A) \to y - 2 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) \to y = \sqrt{3}x - 1$$

مجموعه سوالات تیزهوشان نسبت های مثلثاتی

۱-اگر $-60^{\circ} < \alpha < 45^{\circ}$ و $\cos\alpha = 12 - 13m$، آنگاه حدود m را بیابید.

$$-60^{\circ} < \theta < 45^{\circ} \to \cos(-60^{\circ}) < \cos\theta \le 1 \to \frac{1}{2} < \cos\theta \le 1$$

توجه کنید با توجه به حدود θ, $\cos\theta$ مقدار $\frac{1}{2}$ را اختیار نمی کند ولی می تواند برابر با ۱ باشد.

با توجه به اینکه $\cos\alpha = 12 - 13m$, حدود m را می یابیم.

$$\frac{1}{2} < 12 - 13m \le 1 \xrightarrow{-12} \frac{-23}{2} < -13m \le -11 \xrightarrow{\div(-13)} \frac{23}{26} > m \ge \frac{11}{13}$$

۲-اگر $45^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ باشد، حدود عبارت A را پیدا کنید.

$$A = \sqrt{2 + 4\sin\theta\, cos\theta} + |\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta\,|$$

ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای ،ریشه گیری و سپس با استفاده از تعیین علامت قدر مطلق، عبارت را ساده می کنیم:

$$A = \sqrt{2 + 4\sin\theta\cos\theta} + \left|\sqrt{2}cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta = \sqrt{2(1 + 2\sin\theta\cos\theta)} + \sqrt{2}\right|\cos\theta - \sin\theta| = \sqrt{2} \times \sqrt{sin^2\theta + cos^2\theta + 2\sin\theta cos\theta} + \sqrt{2} \times |\cos\theta - \sin\theta| = \sqrt{2}(\sqrt{(\sin\theta + \cos\theta)^2} + |\cos\theta - \sin\theta|\,) = \sqrt{2}(|\sin\theta + \cos\theta| + |\cos\theta - \sin\theta|)(*)$$

پس:

Cos $\theta - \sin\theta < 0 \to |\cos\theta - \sin\theta| = \sin\theta - \cos\theta$

|sin $\theta + \cos\theta| = \sin\theta + \cos\theta$

با جایگذاری در رابطه ی(*) داریم:

$$A = \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta + \sin\theta - \cos\theta) = 2\sqrt{2}\sin\theta$$

حال در دایره ی مثلثاتی فوق ، حدود تغییرات θ را در نظر می گیریم.

تصویر آن بر روی محور عرض ها حدود تغییرات Sin θ است.

در نتیجه:

$$45^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$$
$$\to \sin 45^{\circ}$$
$$< \sin \theta$$
$$< \sin 90^{\circ} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$< \sin \theta < 1$$
$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در}2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} < 2\sqrt{2}sin\theta < 2\sqrt{2} \to 2 < 2\sqrt{2}sin\theta < 2\sqrt{2} \to 2 < A < 2\sqrt{2}$$

۳-درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف)حداکثر مقدار عبارت 3sin x -7برابر ۱۰ است.

ب)برای هر زاویه ی دلخواه θ نابرابری$\sin\theta + \cos\theta \le 1$برقرار است.

پ)اگر $0 < \alpha < 45^{\circ}$ آنگاه $\tan\alpha < \cot\alpha$ است..

الف) نادرست است.

ب)نادرست است.

پ)وقتی $0 < \alpha < 45^{\circ}$:

$$\tan\alpha > 0$$

بنابراین

$\tan\alpha < \cot\alpha \xrightarrow{\times\tan\alpha} tan^{\,2}\,\alpha < \tan\alpha\cot\alpha \rightarrow tan^2\alpha < 1$*(*)*

با توجه به اینکه $0 < \alpha < 45^\circ$داریم:

$0 < \tan\alpha < 1$

در نتیجه $tan^2\alpha < 1$ و عبارت (*)برقرار است.

۴-مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $A = \frac{\sin\alpha}{2+\sin\alpha}$کدام است؟

ابتدا عبارت را ساده می کنیم و سپس با توجه به حدود $\sin\alpha$حدود A را به دست می آوریم:

$$A = \frac{\sin\alpha}{2+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + 2 - 2}{\sin\alpha + 2} = \frac{\sin\alpha + 2}{\sin\alpha + 2} - \frac{2}{\sin\alpha + 2} = 1 - \frac{2}{\sin\alpha + 2}$$

از طرفی:

$$\rightarrow -1 \le \sin\alpha \le 1 \xrightarrow{\text{جمع طرفین نامعادله با2}} -1 + 2 \le \sin\alpha + 2 \le 1 + 2 \rightarrow 1 \le \sin\alpha + 2 \le 3$$

$$\xrightarrow[\text{و علامت نامعادله برعکس می شود}]{\text{صورت و مخرج هر کسر را جابهجا می کنیم}} 1 \ge \frac{1}{\sin\alpha + 2} \ge \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{و جهت نامعادله بر عکس می شود}]{\text{طرفین نامعادله را در } (-2) \text{ ضرب می کنیم}} -2 \le -\frac{2}{\sin\alpha + 2} \le -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{جمع می کنیم}]{\text{طرفین نامعادله را با عدد 1}} 1 - 2 \le 1 - \frac{2}{\sin\alpha + 2} \le 1 - \frac{2}{3} \rightarrow -1 \le A \le \frac{1}{3}$$

۵-اگر $315^\circ < \alpha < 360^\circ$ $B = \sqrt{1 + 2\sqrt{cos^2\alpha - cos^4\alpha}}$ را تا حد امکان ساده کنید.

ابتدا عبارت B را ساده می کنیم:

$$B = \sqrt{1 + 2\sqrt{cos^2\ \alpha - cos^4\alpha}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{cos^2\alpha(1 - cos^2\alpha)}}$$

$$= \sqrt{1 + 2|\cos\alpha|\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\xrightarrow{1-cos^2\alpha=sin^2\alpha} B = \sqrt{1 + 2|\cos\alpha|\sqrt{sin^2\alpha}} = \sqrt{1 + 2|\cos\alpha||\sin\alpha|}$$

$$\frac{\cos\alpha > 0 \to |\cos\alpha| = \cos\alpha}{\sin\alpha < 0 \to |\sin\alpha| = -\sin\alpha} \to B$$

$$= \sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\ \alpha}$$

$$\xrightarrow{sin^2\alpha+sin^2\alpha=1} \boldsymbol{B} = \sqrt{\boldsymbol{sin^2}\alpha + \boldsymbol{cos^2}\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

B=$\sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha - \cos\alpha|$

با توجه به حدود α, $\cos\alpha > 0\,, \sin\alpha < 0,$است .پس Sin α –cos α <0 است.

در نتیجه:

B=cos $\alpha - \sin\alpha$

۶-خطی از نقطه ی B′=(2,3) گذشته و در تلافی با جهت مثبت محورهای مختصاتی مثلثی با مساحت ۱۲ ساخته است .شیب خط را بیابید.

اگر شیب خط را برابرm فرض کنیم، معادله ی خط به صورت زیر است:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

دو نقطه ی (a,0),(0,b) در معادله ی خط صدق می کنند، داریم:

$$\begin{cases} b - 3 = m(0 - 2) \\ 0 - 3 = m(a - 2) \end{cases} \to \begin{cases} b = -2m + 3 \ \ (1) \\ a = -\dfrac{3}{m} + 2 \ \ (2) \end{cases}$$

از طرفی مساحت مثلث برابر با $12 = \frac{a\times b}{2}$ است.پس:

$$\xrightarrow{(2)(1)} \frac{(-\frac{3}{m}+2)(-2m+3)}{2} = 12$$

$$\to \left(6-\frac{9}{m}-4m+6\right) = 24 \to -\frac{9}{m}-4m = 12 \to -9-4m^2 = 12m$$
$$\to 4m^2+12m+9 = 0 \to (2m+3)^2 = 0 \to 2m+3 = 0 \to 2m = -3 \to m = -\frac{3}{2}$$

۷-اگر $\tan\alpha = 2$ باشد مقدار عبارت $A = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha-10cos^3\alpha}$ را به دست اورید .

صورت و مخرج کسر A را بر Cos α تقسیم می کنیم:

$$A = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-10\frac{cos^3\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\tan\alpha-1}{1-10cos^2\alpha}$$

حال با استفاده از رابطه ی $cos^2\alpha = \frac{1}{1+tan^2\alpha}$ مقدار $cos^2\alpha$, را جای گذاری می کنیم:

$$A = \frac{\tan\alpha-1}{1-\frac{10}{tan^2\alpha}} = \frac{\tan\alpha-1}{\frac{1+tan^2\alpha-10}{1+tan^2\alpha}}$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha=2} A = \frac{2-1}{\frac{1+2^2-10}{1+2^2}} = \frac{1}{\frac{-5}{5}} = -1$$

۸-با فرض $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,حاصل عبارت $B = sin^4\theta - cos^4\theta + \frac{1}{1+tan^2\theta}$ را بیابید.

با استفاده از اتحادهای جبری و مثلثاتی عبارتB را ساده می کنیم.

$$B = sin^4\theta - cos^4\theta + \frac{1}{1+tan^2\theta}$$

$$\xRightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (sin^2\theta - cos^2\theta)(sin^2\theta + cos^2\theta) + cos^2\theta \xrightarrow{sin^2\theta+cos^2\theta=1} B = (sin^2\theta - cos^2\theta) \times 1 + cos^2\theta = sin^2\theta + cos^2\theta - cos^2\theta = 1 - cos^2\theta \xrightarrow{cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}} B = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2}{3}$$

۹-اگر $A = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ $B = bsin\,\alpha - a\cos\alpha$ باشد ثابت کنید:

$A^2 + B^2 = a^2 + b^2$

با جایگذاری عبارت های AوB در سمت چپ تساوی داده شده داریم:

طرف چپ تساوی: $A^2 + B^2$

$= (a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha - a\cos\alpha)^2 = a^2sin^2\alpha + b^2cos^2\alpha + 2ab\,sin\alpha\,cos\alpha + b^2sin^2\alpha + a^2cos^2\alpha - 2ab\,sin\,\alpha\,\cos\alpha = a^2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) + b^2(sin^2\alpha + cos\,^2\alpha) = a^2 + b^2 =$ طرف راست تساوی

۱۰-حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$B = tan1^{\circ} \times \tan 2^{\circ} \times \tan 3^{\circ} \times \ldots . \times \tan 89^{\circ}$

با استفاده از دایره ی مثلثاتی می توان ثابت کرد که برای $0 < \alpha < 90$,

$\tan \alpha = \frac{1}{\tan(90^{\circ} - \alpha)}$ است ،پس:

$$A = tan1^{\circ} \times tan2^{\circ} \times tan3^{\circ} \times \ldots . \times tan87^{\circ} \times tan88^{\circ} \times tan89^{\circ}$$

$$\rightarrow A = tan1^{\circ} \times tan2^{\circ} \times tan3^{\circ} \times \ldots . \times tan45^{\circ} \times \ldots . . \times tan(90^{\circ} - 3^{\circ}) \times \tan(90^{\circ} - 2^{\circ}) \times \tan(90^{\circ} - 1^{\circ}) \rightarrow A = tan1^{\circ} \times tan2^{\circ} \times tan3^{\circ} \times \ldots . . \times tan45^{\circ} \times \ldots . . \times \frac{1}{tan3^{\circ}} \times \frac{1}{tan2^{\circ}} \times \frac{1}{tan1^{\circ}} \rightarrow A = \frac{tan1^{\circ}}{tan1^{\circ}} \times \frac{tan2^{\circ}}{tan2^{\circ}} \times \frac{tan3^{\circ}}{tan3^{\circ}} \times \ldots . . \times tan45^{\circ} \rightarrow A = tan45^{\circ} = 1$$