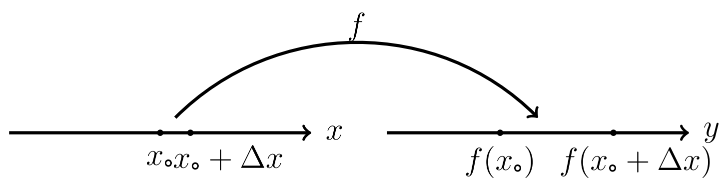
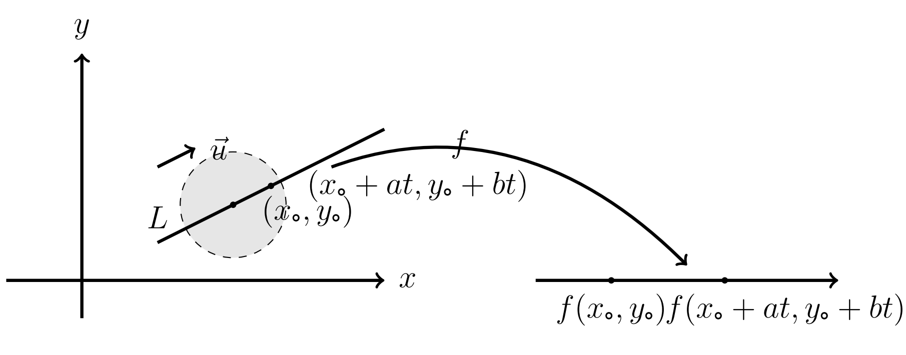
هدف ما در این بخش گسترش مفهوم مشتق از حالت توابع یک متغیره به توابع چندمتغیره است. برای این منظور ابتدا مفهوم مشتق توابع یک متغیره را مرور می‌کنیم.

فرض کنیم f تابعی یک متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه‌ای چون $x_\circ \in \mathbb{R}$ باشد. در این صورت برای مقادیر کوچک Δx با این خاصیت که $x_\circ + \Delta x$ در دامنه تعریف f قرار گرفته باشد، عبارت $\dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$ تغییرات نسبی f بین $x_\circ$ و $x_\circ + \Delta x$ نامیده شده، حد آن وقتی $\Delta x \to \circ$، در صورت وجود، به نام سرعت تغییرات f در نقطه $x_\circ$، یا مشتق f در $x_\circ$ نامیده می‌شود.



اکنون فرض کنیم f تابعی دومتغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{R}^۲$ باشد. فرض کنیم $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ برداری یکه در صفحه و $L \subset \mathbb{R}^۲$ خطی در صفحه گذرکننده از نقطه p با بردار هادی $\vec{u}$ باشد. همانطور که قبلا بیان شده است این خط دارای معادلات پارامتری $x = x_\circ + at$ و $y = y_\circ + bt$، $t \in \mathbb{R}$ خواهد بود. به سادگی مشاهده می‌شود برای مقادیر کوچک t، نقاط $(x_\circ + at, y_\circ + bt)$ از این خط در دامنه تعریف تابع f (که طبق فرض حاوی یک همسایگی از p است) قرار خواهند داشت. همچنین توجه می‌کنیم فاصله نقطه $(x_\circ + at, y_\circ + bt)$ از نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ برابر $\sqrt{(x_\circ + at - x_\circ)^۲ + (y_\circ + bt - y_\circ)^۲} = \sqrt{a^۲t^۲ + b^۲t^۲} = |t|\sqrt{a^۲ + b^۲} = |t|$ است. با ایده از حالت یک متغیره، عبارت $\dfrac{f(x_\circ + at, y_\circ + bt) - f(x_\circ, y_\circ)}{t}$ به نام تغییرات نسبی تابع f بین نقاط $(x_\circ + at, y_\circ + bt)$ و $(x_\circ, y_\circ)$ نامیده شده، حد آن وقتی $t \to \circ$، در صورت وجود، به نام مشتق f در نقطه $p(x_\circ, y_\circ)$ در سوی بردار $\vec{u}$، یا مشتق سویی (یا مشتق جهتی) f در سوی $\vec{u}$ در نقطه p نامیده می‌شود آن را با نماد $D_{\vec{u}}f(p)$ نشان می‌دهیم. پس

$$D_{\vec{u}}f(p) = D_{\vec{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \lim_{t \to \circ} \frac{f(x_\circ + at, y_\circ + bt) - f(x_\circ, y_\circ)}{t}$$



اکنون برای حالت کلی، مفهوم فوق به صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنیم f تابعی n متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p=(p_۱,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنیم $u=(u_۱,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ در شرط $\|u\|=\sqrt{u_۱^۲+\cdots+u_n^۲}=۱$ صدق کند. برای سهولت نقطه $(p_۱+tu_۱,\dots,p_n+tu_n)$ را با نماد $p+tu$ نشان می‌دهیم. در این صورت عبارت $\lim_{t\to ۰}\dfrac{f(p+tu)-f(p)}{t}$ را در صورت وجود مشتق سویی f در p و در سوی u نامیده آن را با نماد $D_uf(p)$ نشان می‌دهیم.

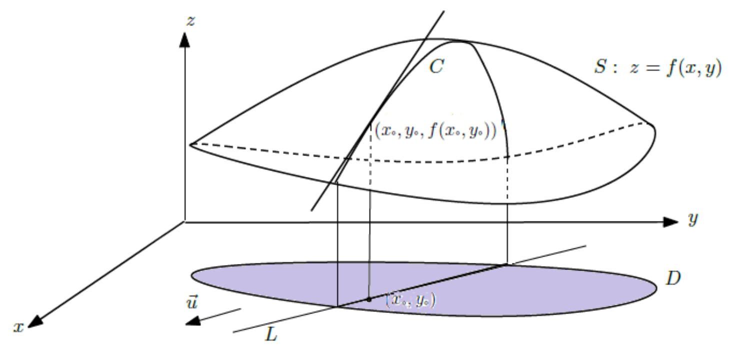
مثال. مشتق سویی تابع $f(x,y)=x^۲+۴xy$ را در نقطه $p(۱,۲)$ و در سوی $\vec{u}=\dfrac{۱}{۲}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{j}$ به دست آورید.

طبق تعریف

$$\begin{aligned}
D_uf(۱,۲) &= \lim_{t\to ۰}\frac{f(x_۰+at,y_۰+bt)-f(x_۰,y_۰)}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{f(۱+t\frac{۱}{۲},۲+t\frac{\sqrt{۳}}{۲})-f(۱,۲)}{t}\\
&= lim_{t\to ۰}\frac{(۱+t\frac{۱}{۲})^۲+۴(۱+t\frac{۱}{۲})(۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲})-(۱^۲+۴\times ۱\times ۲)}{t}\\
&= \lim_{t\to ۰}\frac{(۵+۲\sqrt{۳})t+(\frac{۱}{۴}+\sqrt{۳})t^۲}{t}=۵+۲\sqrt{۳}
\end{aligned}$$

از بحث توابع یک متغیره به خاطر داریم که مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر منحنی نمایش تابع مورد نظر در آن نقطه بود. طبیعی است که در این مورد سئوال شود آیا مشتق سویی نیز تعبیر هندسی مشابهی دارد؟

فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^۲$ حاوی یک همسایگی از نقطه $p(x_۰,y_۰)\in D$ باشد. فرض کنیم $S\subset\mathbb{R}^۳$ رویه نمایش تابع $f:D\to\mathbb{R}$، $\vec{u}$ برداری یکه در صفحه xoy، L خط گذرکننده از نقطه p با بردار هادی $\vec{u}$ و $C\subset S$ منحنی حاصل از برخورد صفحه عمود بر صفحه xoy و در برگیرنده خط L باشد.



در این صورت می‌توان ثابت کرد $D_uf(p)$، در صورت وجود، شیب خط مماس بر منحنی C در نقطه $(x_۰,y_۰,f(x_۰,y_۰))$ در صفحه در برگیرنده این منحنی است.

در بحث مشتق سویی، تغییر جهت بردار یکه $\vec{u}$ به طور طبیعی منجر به مقادیر مختلفی برای مشتق سویی f در نقطه مورد نظر می‌شود. حال در بین سوی‌های مختلف برای یک بردار یکه، برخی سوی‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. فرض کنیم f تابعی دو متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p(x_۰,y_۰)\in\mathbb{R}^۲$ باشد. اگر بردار یکه $\vec{u}$ را برابر بردار یکه در سوی محور

x، یعنی بردار $\vec{i}$، اختیار کنیم آنگاه در صورت وجود مشتق در این سوی خواهیم داشت

$$D_{\vec{i}}f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

در رابطه دوم متغیر t را با نمو Δx جایگزین کرده‌ایم. در عبارت آخر نیز با قرار دادن $x := x_0 + \Delta x$ از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که $\Delta x \to 0$ اگر و تنها اگر $x \to x_0$. مشتق فوق که سرعت تغییرات مقدار f وقتی از نقطه $p(x_0, y_0)$ به موازات محور x حرکت می‌کنیم را مشتق جزئی، مشتق نسبی یا مشتق پاره‌ای f نسبت به x در نقطه p نامیده آن را با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$، $D_x f(x_0, y_0)$ یا $f_x(x_0, y_0)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب اگر $\vec{u}$ برابر $\vec{j}$ اختیار شود مشتق سویی حاصل (در صورت وجود) را مشتق جزئی f نسبت به y نامیده آن را با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$، $D_y f(x_0, y_0)$ یا $f_y(x_0, y_0)$ نشان می‌دهیم.

در حالت کلی،

تعریف

فرض کنیم f تابعی n متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت، برای هر $i = 1, \dots, n$، مشتق جزئی f نسبت به متغیر x_i در نقطه p، با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$، $D_{x_i} f(p)$ یا $f_{x_i}(p)$، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + \Delta x_i, \dots p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{x_i \to p_i} \frac{f(p_1, \dots, x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{x_i - p_i}\end{aligned}$$

بنابر این تعریف، یک تابع n متغیره می‌تواند n مشتق جزئی در هر نقطه درون دامنه تعریف خود داشته باشد.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = 3x^2 - 5xy$ مفروض است.

الف) مشتقات جزئی f در نقطه $(1, 4)$ را به دست آورید.

ب) مشتقات جزئی f در نقطه دلخواه (x_0, y_0) را تعیین کنید.

الف) طبق تعریف

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x, 4) - f(1, 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(1 + \Delta x)^2 - 5(1 + \Delta x) \times 4) - (3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times 4)}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-14\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = -14$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1, 4+\Delta y) - f(1,4)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times (4+\Delta y)) - (3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times 4)}{\Delta y} = -5
\end{aligned}$$

ب) مشابه قسمت قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که در این حالت به جای نقطه خاص $(1,4)$ نقطه کلی (x_0, y_0) را جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(x_0+\Delta x)^2 - 5(x_0+\Delta x)y_0) - (3x_0^2 - 5x_0 y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x_0 - 5y_0)\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = 6x_0 - 5y_0
\end{aligned}$$

اگر نتیجه حاصل را دقیق مورد توجه قرار دهیم نتیجه مهمی مشاهده می‌شود. در محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$، در واقع مقدار متغیر y در محاسبات فوق ثابت و برابر y_0 بوده، عملیات مشتق نسبت به متغیر x انجام شده است. به این ترتیب با استفاده از این قانون، مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ با مشتق‌گیری از f نسبت به متغیر y (در عین ثابت انگاشتن متغیر x) و جایگذاری x_0 به جای x و y_0 به جای y برابر $-5x_0$ به دست می‌آید.

نتیجه حاصل در قسمت (ب) این مثال را برای تاکید بیشتر مجددا در زیر بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 6x_0 - 5y_0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= -5x_0
\end{aligned}$$

مثال. مشتقات جزئی هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x,y) = x\sinh(x - 3y)$.

مطابق آنچه در بالا اشاره کردیم،

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sinh(x-3y) + x\cosh(x-3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-3)x\cosh(x-3y)$$

ب) $f(x,y,z)=x^{yz^2}$.

با استفاده از تعریف نما خواهیم داشت $f(x,y,z)=e^{yz^2\ln x}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= (\frac{yz^2}{x})e^{yz^2\ln x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (z^2\ln x)e^{yz^2\ln x}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= (2yz\ln x)e^{yz^2\ln x}\end{aligned}$$

ج) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

با توجه به نحوه تعریف f، برای محاسبه مشتقات جزئی تابع در نقطه $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

اگر $(x,y)\neq(0,0)$ آنگاه در یک همسایگی این نقطه تابع f از دستور $f(x,y)=\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ پیروی می‌کند. در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3y^2(x^2+y^2)-2y(y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

اگر $(x,y)=(0,0)$ آنگاه برای محاسبه مشتقات جزئی لازم است مستقیما از تعریف این مشتقات استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{0^2+y^2}-0}{y}=1\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر. فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ و تابع $f:D\to\mathbb{R}$ در هر نقطه از D نسبت به متغیر x_i مشتق داشته باشد. در این صورت عبارت $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ عبارتی وابسته به نقطه $x=(x_1,\ldots,x_n)\in D$ بوده، تابعی n متغیره بر D تعریف می‌کند. اگر تابع اخیر در نقطه‌ای چون $p=(p_1,\ldots,p_n)\in D$ نسبت به متغیر x_j مشتق داشته باشد آن را یک مشتق جزئی

مرتبه دوم f در p نامیده با یکی از نمادهای $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$، $f_{x_i x_j}(p)$ یا $D_{x_j x_i} f(p)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \lim_{\Delta x_j \to ۰} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(۱, \ldots, p_j + \Delta x_j, \ldots, p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_۱, \ldots, p_j, \ldots p_n)}{\Delta x_j}$$

روشن است که یک تابع n متغیره در حالت کلی می‌تواند $n^{۲}$ مشتق جزئی مرتبه دوم داشته باشد. مشتقات جزئی مراتب بالاتر به نحو مشابه تعریف می‌شوند.

مثال. مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f با دستور $f(x,y) = (x^{۲} - ۴y)\ln(\frac{x}{y})$ را به دست آورید.
ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول تابع را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= ۲x\ln(\frac{x}{y}) + (x^{۲} - ۴y)\frac{\frac{۱}{y}}{\frac{x}{y}} = ۲x\ln(\frac{x}{y}) + (x - ۴\frac{y}{x}) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -۴\ln(\frac{x}{y}) + (x^{۲} - ۴y)\frac{-\frac{x}{y^{۲}}}{\frac{x}{y}} = -۴\ln(\frac{x}{y}) - (\frac{x^{۲}}{y} - ۴)
\end{aligned}$$

اکنون به محاسبه مشتقات مرتبه دوم می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) &= ۲\ln(\frac{x}{y}) + ۲x\frac{\frac{۱}{y}}{\frac{x}{y}} + ۱ + ۴\frac{y}{x^{۲}} = ۲\ln(\frac{x}{y}) + ۳ + ۴\frac{y}{x^{۲}} \\
\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) &= ۲x\frac{-\frac{x}{y^{۲}}}{\frac{x}{y}} - \frac{۴}{x} = -\frac{۲x}{y} - \frac{۴}{x} \\
\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x,y) &= -۴\frac{\frac{۱}{y}}{\frac{x}{y}} - \frac{۲x}{y} = -\frac{۴}{x} - \frac{۲x}{y} \\
\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x,y) &= -۴\frac{-\frac{x}{y^{۲}}}{\frac{x}{y}} + \frac{x^{۲}}{y^{۲}} = \frac{۴}{y} + \frac{x^{۲}}{y^{۲}}
\end{aligned}$$

در این مثال مشاهده می‌شود $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}$. طبیعی است که این سئوال مطرح می‌شود آیا این تساوی برای تمام توابع برقرار است؟ مثال زیر این نکته را مورد توجه قرار می‌دهد.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{۳}y}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) ضابطه توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بر $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید.

ب) مطلوب است محاسبه $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$.

الف)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^۳ y}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ \lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x,۰)-f(۰,۰)}{x} & (x,y)=(۰,۰)\end{cases} = \begin{cases} \frac{۳x^۲y(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳y)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^۳ y}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ \lim\limits_{y\to ۰}\frac{f(۰,y)-f(۰,۰)}{y} & (x,y)=(۰,۰)\end{cases} = \begin{cases} \frac{x^۳(x^۲+y^۲)-۲y(x^۳y)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}
\end{aligned}
$$

ب) اکنون مشتقات مرتبه دوم خواسته شده را با استفاده از توابع محاسبه شده در قسمت (الف) به دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم با توجه به نحوه تعریف توابع مشتق جزئی فوق، برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم خواسته شده در نقطه $(۰,۰)$ باید مستقیما از تعریف استفاده کنیم.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(۰,۰) = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,۰)-\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)}{x} \\
&= \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۳(x^۲+۰^۲)-۲\times ۰\times(x^۳\times ۰)}{(x^۲+۰^۲)^۲}-۰}{x} = ۱
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰) = \lim_{y\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(۰,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)}{y} \\
&= \lim_{y\to ۰}\frac{\frac{۳\times ۰^۲\times y(۰^۲+y^۲)-۲\times ۰\times(۰^۳\times y)}{(۰^۲+y^۲)^۲}-۰}{y} = ۰
\end{aligned}
$$

به این ترتیب در این مثال، $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰) \neq \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)$. به عبارت دیگر، در حالت کلی مجاز به جابجا کردن ترتیب مشتق‌گیری در محاسبه مشتقات جزئی نیستیم. با وجود این قضیه زیر اجازه می‌دهد در برخی موارد این ترتیب را عوض نماییم.

قضیه

فرض کنیم f، f_x، f_y، f_{xy} و f_{yx} در یک همسایگی از نقطه $p \in \mathbb{R}^۲$ تعریف شده در این نقطه پیوسته باشند.
در این صورت $f_{xy}(p) = f_{yx}(p)$.

پس به طور مثال، از آنجا که مشتقات جزئی از هر مرتبه از یک تابع چندجمله‌ای، مجددا به صورت یک تابع چندجمله‌ای و در نتیجه پیوسته در هر نقطه است، در مورد توابع چندجمله‌ای به استناد قضیه فوق، به راحتی می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری را عوض نماییم.

تذکر. همانطور که از بحث توابع یک متغیره به خاطر داریم، اگر f تابعی یک متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $x_۰ \in \mathbb{R}$ بوده، در این نقطه مشتق داشته باشد آنگاه لزوما در این نقطه پیوسته نیز خواهد بود. اما در مورد توابع چند متغیره، مثال زیر نشان می‌دهد وجود مشتق سویی تابع در یک نقطه و حتی در تمام سوی‌های ممکن، لزوما باعث پیوستگی تابع در آن نقطه نخواهد بود.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۳ y}{x^۶ + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید مشتق سویی f در نقطه $(۰,۰)$ و در سوی هر بردار یکه $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ وجود دارد.

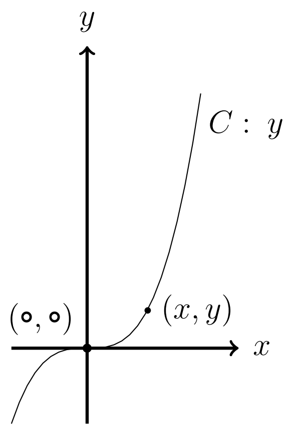
ب) نشان دهید f در این نقطه پیوسته نیست.

الف) بنابر تعریف مشتق سویی

$$\begin{aligned} D_u f(۰,۰) &= \lim_{t \to ۰} \frac{f(۰+at, ۰+bt) - f(۰,۰)}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{\dfrac{a^۳ t^۳ bt}{a^۶ t^۶ + b^۲ t^۲} - ۰}{t} \\ &= \lim_{t \to ۰} \frac{\dfrac{a^۳ b t^۲}{a^۶ t^۴ + b^۲}}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{a^۳ bt}{a^۶ t^۴ + b^۲} = ۰ \end{aligned}$$

نتیجه فوق در حالتی که $b = ۰$ نیز برقرار است. پس مشتق سویی f در نقطه $(۰,۰)$ و در هر سوی یکه $\vec{u}$ وجود داشته برابر صفر است.

ب) فرض کنیم C منحنی $y = x^۳$ در صفحه xoy باشد. توجه می‌کنیم که نقطه $(۰,۰)$ یک نقطه حدی برای این منحنی بوده، بر روی این منحنی $(x,y) \to (۰,۰)$ اگر و تنها اگر $x \to ۰$.



به این ترتیب

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C}(۰,۰)} f(x,y)=\lim_{x\to ۰} f(x,x^{۳})=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}\times x^{۳}}{x^{۶}+(x^{۳})^{۲}}=\frac{۱}{۲}\neq ۰=f(۰,۰)$$

به این ترتیب، f در نقطه $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

بر اساس این نقطه ضعف برای مشتق سویی، در بخش بعد مفهوم مشتق‌پذیری توابع چند متغیره را به گونه‌ای دیگر تعریف خواهیم کرد.

تمرین‌های بخش مشتق سویی و مشتقات جزئی

۱. برای تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مطلوب است تعیین مشتق سویی $D_uf(۰,۰)$ که در آن $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکه است.

۲. تابع $f:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^{۳}-y^{۳})}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. مطلوب است تعیین مشتقات جزئی مرتبه اول f در نقطه $(۰,۰,۰)$.

۳. تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۴}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}(۰,۰)$ و $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}(۰,۰)$.

۴. نشان دهید تابع $f(x,y)=xy^{۳}-x^{۳}y$ در معادله $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}+\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}=۰$ صدق می‌کند.