

انتگرال به طریق جزء به جزء

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$u dv = d(uv) - v du$$

$$\rightarrow \int u dv = uv - \int v du \quad \text{جزء به جزء}$$

مثال: محاسبه کنید؟

$$\int \ln x \, dx = ?$$

حل:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

مثال: محاسبه کنید:

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx = ?$$

$$\begin{cases} u = \operatorname{tg}^{-1} x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx = x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

مثال: محاسبه کنید.

$$\int x^3 e^x \, dx = ?$$

$$\begin{cases} x^3 = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 dx = du \\ e^x = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x dx = du \\ e^x = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = dx \\ e^x = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int x^3 e^x dx \\ &= x^3 e^x \\ &- 3 \int x^2 e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3 \{ x^2 e^x \\ &- 2 \int x e^x dx \} = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - e^x) + c \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال جز به جز فرمول های زیر بدست می آید.

فرمول ۱:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

فرمول ۲:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

فرمول ۳:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

فرمول ۴:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{b^2 + a^2} \{ a \sin bx - b \cos bx \}$$

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید:

[تدریس خصوصی ریاضی](#)

تمرین:

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x \ln x dx$

2) $\int x^n \cos ax dx$

3) $\int \sin(\ln x) dx$

4) $\int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{x} dx$

مثال ۱ :

مساله زیر را حل کنید:

$$\int \sec x dx = ?$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dZ = (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) \times \frac{1}{2} dx \end{array} \right.$$

$$= 2 \int \frac{dZ}{1 - Z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z} + \int \frac{dz}{1-z} = \ln|1+z| - \ln|1-z| + c = \ln \frac{1+z}{1-z} + c$$

و جا گذاری می نمائیم.

$$= \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{4}} \right| + c$$

مثال:

مساله زیر را حل کنید.

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = ?$$

حل مساله:

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \int \frac{dx}{2 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dz = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx \end{cases} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{1 + z^2 + z} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{(z + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{dz}{(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + c$$

اگر در انتگرالی سینوس در سینوس یا سینوس در کسینوس و یا از این جور مسائل داشتیم ضرب را به جمع تبدیل می کنیم .

مثال: مساله زیر را حل کنید.

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int \{\sin(3x + 5x) \\ &+ \sin(3x - 5x)\} dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x \end{aligned}$$

تمرین:

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$1) \int_0^{\pi} \frac{dx}{14 \sin x}$$

$$2) \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x) dx$$

مثال: مساله زیر را حل کنید.

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[3]{1 + e^x}} = ?$$

حل:

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx = \int e^x \cdot \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} = \begin{cases} dv = \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx \rightarrow u = \frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}} \\ u = e^x \rightarrow du = e^x dx \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}} e^x - \int \frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}} e^x dx$$

مثال: مساله زیر را حل کنید.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}} = ?$$

حل مساله:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{e^t-1}{e^t}}} = \int \frac{\sqrt{e^t}}{\sqrt{e^t-1}} dt = \int \frac{e^t dt}{\sqrt{e^t} \sqrt{e^t-1}} = \int \frac{dk}{\sqrt{k} \sqrt{k-1}}$$

$$= \text{Arc sec} \sqrt{k} + c = \text{Arc sec} \sqrt{e^t} + c$$

یادآوری:

$$\text{Arc sec } u = y \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

این مقاله خوب را هم بخوانید:

[آموزش انتگرال جز به جز همراه با حل مثال](#)