انتگرال های غیر عادی و روش سیمپسون

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad\qquad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

تابع $\int_a^b f(x)dx$ را هم غیر عادی گوئیم هر گاهF(x) به ازای بعضی از مقادیر داخل بازه [a,b] بینهایت باشد..

برای به دست آوردن انتگرال غیر عادی $\int_a^\infty f(x)dx$ حد زیر را به دست می آوریم:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(X)dx$$

یا

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

این انتگرال (حد)یا موجود و متناهی است یا نامتناهی . که اگر نامتناهی باشد آنرا واگرا گوئیم.

هر گاه در $\int_a^b f(x)dx$, $\exists\ c \in [a,b]$ که $f(c)\to\infty$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c^-} f(x)dx + \int_{c^+}^{b} f(x)dx = \lim_{d\to c^-}\int_a^d f(x)dx + \lim_{d\to c^+}\int_d^b f(x)dx$$

مثال: سوال زیر را حل کنید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = ?$$

حل مساله:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0} \ln \Big]_a^1 = \lim_{a=0}\{\ln 1 - \ln a\} = \lim_{a\to 0} \ln\frac{1}{a} = \infty$$

انتگرال غیر عادی واگراست.

مثال:وضعیت انتگرال مقابل را مشخص کنید؟(همگرا یا واگرا بودن)

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx = ?$$

حل: نمی توان مستقیما انتگرال را به دست آورد پس از مقایسه استفاده می کنیم.

$$e^x < e^{x^2}$$
$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}\{-e^{-x}\Big]_1^b = -\lim_{b\to\infty}\{e^{-b} - e^{-1}\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{e^{-1} - \frac{1}{e^b}\right\} = \frac{1}{e}$$

پس $\int_1^\infty e^{-x} dx$ همگرا است و چون $e^{-x^2} < e^{-x}$ در نتیجه این انتگرال ، انتگرال

غیر عادی همگراست.

غیر عادی همگراست. $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$

برای مشاهده لیست مدرسین ریاضی کلیک کنید:

تدریس خصوصی ریاضی

مثال:

$\int_0^\infty \cos x\, dx$ را محاسبه کنید.

حل مساله:

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

و عدد مشخصی نمی دهد پس انتگرال غیر عادی واگرا است.

تمرین:

1-نشان دهید که انتگرال های غیر عادی زیر همگرا هستند و انها را محاسبه کنید.

$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{14x^2}$

$2) \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$3) \int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

2-تعیین کنید هر یک از انتگرال های زیر همگرا هستند یا وا گرا؟

$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

$2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\, x\, dx$

سیمپسون:

سیمپسون: $A_S = \frac{1}{3} h\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\}$

و اگر $h = \frac{b-a}{h} = \Delta x \leftarrow a \leq x \leq b$ و

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = a + h \\ \vdots \\ x_n = a + nh \end{cases}$$

ثابت می شود که:

مقدار اختلاف سیمپسون با مقدار واقعی $\int_a^b f(x)dx = A_S - \frac{b-a}{180} f^{(\varepsilon)}(c).h^{\varepsilon}$

و این تقریب به دلیل وجود نداشتن c است.

مثال:

مطلوب است $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ از روش سیمپسون:

از قبل می دانیم که این انتگرال برابر با Ln 2 است.

حل مساله:

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-b}{n} = \frac{1}{n} \quad , y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$n = 4 \to h = \frac{1}{4}$$

$$A_s = \frac{h}{3}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\}$$

x	$y=\frac{1}{x}$	عامل ضرب	حاصل ضرب
۱	۱	۱	۱
$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	۴	$\frac{16}{5}=3/2$
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	۲	$\frac{4}{3}=1/33$
$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$	۴	$\frac{16}{7}=2/2867$
۲	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}=0/5$

جمع می کنیم:۸/۳۱۹٫۵

$A_S=\frac{1}{12}\times\frac{8}{319.5}=\frac{0}{69325}$ مقدار واقعی است

تمرین:

به روش سیمپسون با فرض N=2 اولا و N=4 ثانیا انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^2 x^2\,dx$

2) $\int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,dx$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3c}=(1)$$

حل مساله :

$$\begin{cases} e^{2u} = t \to e^{4u} = t^2 \\ dt = 2e^{2u}\, du = 2tdu \end{cases} \to \frac{dt}{2t} = du$$

$$(1) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t^2+4t+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)(t+3)}$$

$$\frac{1}{t(t+1)(t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+3} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{6} \end{cases}$$

... وبدست می آید.