انتگرال های نامعین و مشتق و انتگرال توابع هذلولوی

$$\begin{cases} n \neq -1 \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \\ n = -1 \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \end{cases}$$

مثال ۱:

انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int \cot ax \, dx$$

حل:

$$= \int \frac{\cos ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \int \frac{d(\sin ax)}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + c$$

مثال ۲:

انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int sin^3 x \, dx$$

حل:

$$\int \sin x(1 - cos^2 x)dx = \int \sin x \, dx - \int cos^2 x \sin x \, dx =$$

$$- \int d(\cos x) + \int cos^2 x \, d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3} cos^3 x + c$$

$$\rightarrow \int sin^{2n+1} dx = \int \sin x(1 - cos^2 x)^n dx$$

تمرین:

تمرین های زیر را حل کنید.

$1 - \int sec^4 3x\ tg3x\ dx$

$2 - \int sec^4 3x\ dx$

$3 - \int cos^3 2x\ dx$

$4 - \int \frac{dx}{xln^3 x}$

توابع هذلولوی

$$\begin{cases} \int \boldsymbol{sin\ h\ u du = cosh\ u + c} \\ \int \boldsymbol{cosh\ u\ du = sinh\ u + c} \\ \int \boldsymbol{sech^2 u\ du = r\ ghu + c} \\ \int \boldsymbol{c\ sch^2 u\ du = -coth\ u + c} \\ \int \boldsymbol{tgh\ u\ sech\ u\ du = -sech\ u + c} \\ \int \boldsymbol{cotgh\ u\ cschu\ du = -csch\ u + c} \end{cases}$$

$\rightarrow \sin h(x+y) = \sin h\ x\ coshg + \cosh x \sin hy$

$\rightarrow \cos h(x+y) = \cosh x \cos hy + \sin hx + \sin hy$

$\rightarrow \sin h2x = 2\sin hx \cos hx$

$\rightarrow \cos h2x = cosh^2x + \sin h^2 x = 2\cos h^2 x - 1 = 1 + 2\sin h^2$
*

*معادلات * با استفاده از* $cosh^2x - \sin h^2 x = 1$ *بدست آمدند.*

مثال:

در صورتی که $a = \frac{H}{w}$(W,Hمقادیر ثابت هستند)نشان دهید که:$y = a\cos h\frac{x}{a}$

در معادله $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + (\frac{dy}{x})^2}$ صدق می کند.

حل: از تابع مشتق می گیریم. $\frac{dy}{dx} = a \times \frac{1}{a}\sin\frac{x}{a}$

طرف اول:$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\cos h\ \frac{x}{a}$

طرف دوم:$\frac{w}{H} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = \frac{1}{a}\cos h\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \sin h^2\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\cos h^2 x$

برای مشاهده معلم های ریاضی خانم و آقا کلیک کنید: تدریس خصوصی ریاضی

تمرین۱:

در توابع زیر مطلوب است مشتق توابع:

$1 - y = \cos h^2\ 5x$

$2 - y = \sec h^3 x$

$3 - y = 4\cos h\left(\frac{x}{4}\right)$

تمرین ۲:

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1 - \int \cos h\,(2x+1)dx$$

$$2 - \int \frac{4\,dx}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$3 - \int \cos h^2\,3x\,dx$$

انتگرال های اصم:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad \text{تغییر متغیر} \begin{cases} u = a\,sin\theta \\ du = a\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$= \int \frac{a\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta}} = \pm\int d\theta = \pm\theta + c \qquad ,\theta = sin^{-1}\frac{u}{a}$$

منها را حذف می کنیم چون در تابع معکوس *Cos x* مثبت است.

$$= \theta + c = sin^{-1}\frac{u}{a} + c$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sin^{-1}\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad \text{تغییر متغیر} \begin{cases} u = a\,tg\theta \\ du = a\,sec^2\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$= \int \frac{a\,sec^2\theta\,d\theta}{a\sqrt{1+tg^2\theta}} \qquad ,\theta = tg^{-1}\frac{u}{a}$$

$$= \pm\int \frac{sec^2}{\sec\theta}d\theta = \pm\int sec\theta\,d\theta = \pm\ln|\sec\theta + tg\theta +| \qquad *$$

$tg^2\theta = \frac{u^2}{a^2} \to 1 + \frac{u^2}{a^2} = sec^2\theta \to \sec\theta = \pm\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a}$ مابین منها در نظر گرفته نمی شود چون در ربع اول و چهارم که تابع معکوس تعریف می شود Cos مثبت است..

$$* Ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a} + \frac{u}{a}\right| + c = \ln\left|u + \sqrt{a^2+x^2}\right| - Ln\, a + c$$
$$= Ln\left|u + \sqrt{a^2+x^2}\right| + c$$

$$\to \int \frac{du}{\sqrt{a^2+x^2}} = Ln\left|\sqrt{a^2+x^2} + u\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-x^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

تمرین:

انتگرال های زیر را حل کنید:

$1 - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$2 - \int \sec 2t\, dt$

$3 - \int_0^2 \frac{x\, dx}{4+x^2}$

مشتقات توابع هذلولوی

$1 - (\sin h\, u)' = u' \cosh u$

$2 - (\cos h\ u)' = u' \sin h\, u$

$3-(tg\ h\ u)'=u'\ \sec h^2\ u$

$4-(\cot g\ h\ u)'=-u'\ csch^2 u$

$5-(\sec h\ u)'=-tg\ h\ u\ sechu\times u'$

$6-(c\ \mathrm{sech}\ u)'=-\cot g\ hu\ \mathrm{csch}\ u\times u'$

انتگرالات توابع هذلولوی

$1-\int \sin h\ u\ du=\cos h\ u+c$

$2-\int \cos h\ u\ du=\sin h\ u+c$

$3-\int sech^2 u\ du=tg\ h\ u+c$

$4-\int c\ sch^2 u\ du=-\cot gh\ u+c$

$5-\int tgh\ u\ \mathrm{sech}\ u\ du=-sechu+c$

$6-\int \cot g\ hu\ \mathrm{csc}\ hu\ du=-\mathrm{csc}\ hu+c$

یک فرمول مهم:

$$\cosh 2x=cosh^2 x+\sin h^2\ x=2\cos h^2 x-1=1+2sinh^2 x$$

با استفاده از این فرمول داریم:

$$2cos\ h^2 x-1=1+2\sin h^2 x$$

$$\cos h^2\ x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sin h^2 x$$

$$\rightarrow \sin h^2 x=\cos h^2-1$$

مشتقات توابع معکوس هذلولوی:

$$1-(\sin h^{-1}\ u)'=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$2-(\cos h^{-1}u)'=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$3-(tg\ h^{-1})'=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$$

$$4-(\cot gh^{-1}u)'=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$$

$$5-(\sec h^{-1}\ u)'=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}.u}\frac{du}{dx}$$

$$6-(csch^{-1}\ u)'=\frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

مثال:مطلوب است انتگرال $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

حل:

$$2x-x^2=-(x^2-2x)=-\{(x-1)^2-1\}=1-(x-1)^2$$

$$\rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=sin^{-1}(x-1)+c$$