
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

جــزوه درس

ریاضــیات مهندسی

استاد فاتــح

بارم بندی :

1. ___ نمره پایان ترم
2. ___ نمره میان ترم
3. ___ نمره فعالیت کلاسی
4. ___ نمره حل تمرین

***تاریخ امتحان میان ترم : __/__/__**

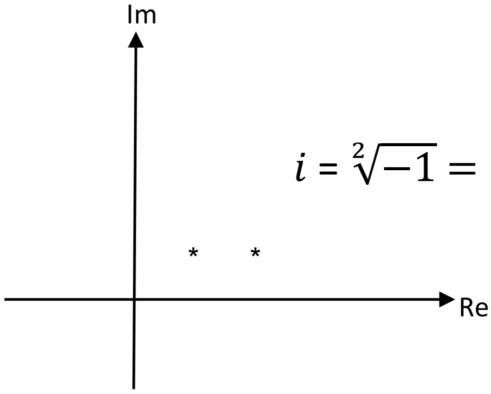
فهرست مطالب

فصل اول

اعداد مختلط

۱ + i

۲ + i



$$i = \sqrt[2]{-1} = i^2 = \left(\sqrt[2]{-1}\right)^2 = -1$$

مثال: معادله‌ی $X^2 + 4$ را حل کنید.

$$X^2 = -4 \Longrightarrow X = \pm \sqrt[2]{-4} = \pm 2\sqrt[2]{-1} = \pm 2i$$

$$Z_1 = X_1 + iY_1 \qquad\qquad Z_2 = X_2 + iY_2 Z = X + iY$$

مثال: $Z_1 + Z_2$ و $Z_1 - Z_2$ و $Z_1 * Z_2$ و $\frac{Z_1}{Z_2}$ را محاسبه نمایید.

$$Z_1 + Z_2 = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (X_1 - X_2) + i(Y_1 - Y_2)$$

$$Z_1 * Z_2 = X_1X_2 - Y_1Y_2 + i(X_1Y_2 + X_2Y_1)$$

مختلط مزدوج Z را $\bar{Z}$ گویند.

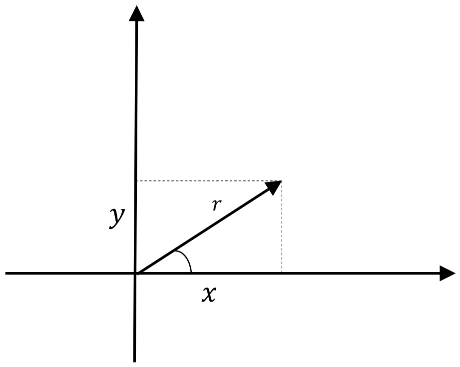
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1 + iY_1}{X_2 + iY_2} = \frac{(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2)}{X_2 + iY_2} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2} + i\,\frac{X_2Y_1 - X_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2}$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$Z_1 = 2 + 3i \qquad Z_2 = 6i$$

$$Z_1 + Z_2 = ? \qquad Z_1 - Z_2 = ? \qquad Z_1 * Z_2 = ? \qquad \frac{Z_1}{Z_2} = ?$$

$$Z_1 + Z_2 = 2 + 9i \qquad Z_1 - Z_2 = 2 - 3i \qquad Z_1 * Z_2 = -18 + 12i \qquad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$$



$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$r = |z| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ $\quad\quad$ $\theta = z$ آرگومان

$$\theta = \arg z = arc\tan\frac{y}{x}\ (-\pi < \theta \le \pi) \Leftarrow \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x}$$

فرمول اویلر:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \mathrm{Z} = re^{i\theta}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad Z_1Z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

فرمول موآور:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال:جواب معادله $w = Z^{\frac{1}{n}}$ را بدست آورید.

$e^{i\theta}$ متناوب با دوره تناوب 2πاست.

$$w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$$

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

مثال:معادله$X^4 + 16 = 0$ را حل کنید.

$$X^4 = -16 = 16e^{i\pi}$$

$$X = \rho e^{i\varphi}$$

$$\rho = \sqrt[4]{16} = 4 \qquad 4\varphi = \pi + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \qquad k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

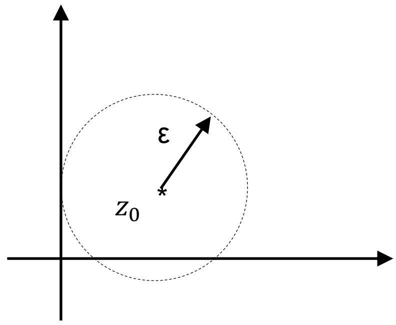
$$k = 3 \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4} \qquad k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

نواحی در صفحه مختلط:

نقاط درونی دایره : $\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$

نقاط درون و روی دایره : $\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \varepsilon\}$

نقاط روی دایره : $\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \varepsilon\}$



$|z - z_0| > \varepsilon$ نقاط بیرون دایره

$\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2$ نقاط بین دو دایره متحدالمرکز

حال فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط باشند.

نقطه داخلی S : یک ε همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N_\varepsilon(z_0) \subset S$.

نقطه خارجی S : یک ε همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N_\varepsilon(z_0) \subset \mathbb{C} - S$.

نقطه مرزی S : اگر نقطه نه داخلی باشد نه خارجی.

مجموعه باز: اگر نقاط متعلق به S نقطه های داخلی باشند.

مجموعه بسته: اگر نقاط متعلق به S نقطه های داخلی و مرزی باشند.

مجموعه کراندار: اگر عدد حقیقی $N > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $Z \in S$، $|Z| < S$.

همبند: هردو نقطه دلخواه آن را به وسیله یک خط درون S به هم وصل کند.

تابع مختلط،حد،پیوستگی،مشتق،تابع تحلیلی:

تابعی از Z :
$$W = f(z)$$

$$Z = X + iY \qquad W = U + iV$$

مثال:اگر $f(z) = z^2$ آنگاه v و u را محاسبه کنید.

$$f(z) = (X + iY)^2 = X^2 - Y^2 + 2iXY \qquad u(x,y) = X^2 - Y^2 \quad v(x,y) = 2XY$$

حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد است:
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = W_0$$

نکته:
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گوییم هرگاه:
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ و $\lim_{z\to z_0} g(z) = M$ آنگاه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = L \pm M$$

$$\lim_{z\to z_0} [f(z)g(z)] = LM$$

$$\lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{L}{M} \,, M \neq 0$$

اگر $f(z)$ و $g(z)$ هردو در $z = z_0$ پیوسته باشند،آنگاه توابع $[f(z) \pm g(z)]$ و $f(z)g(z)$ و $\frac{f(z)}{g(z)}$ در $z = z_0$ پیوسته اند($g(z_0) \neq 0$).در ریشه های مخرج برابر با صفر حد نداریم.

توابع چندجمله‌ای برحسب z در تمام نقاط پیوسته اند.

توابع گویا در تمام نقاط به جز ریشه های مخرج پیوسته اند.

اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ و $g(z)$ در یک همسایگی از z_0 کراندار باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$$

اگر تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

برای بررسی حد و پیوستگی توابع حقیقی u و v را می‌توان بررسی نمود.تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته است اگروفقطاگر توابع u و v در $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته باشد.

مثال: $f(z) = \frac{Re(z)}{|z|}$ در $z = 0$ دارای حـد نیست.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} (y=0) = \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} (x=0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} (y=0) = \frac{x}{|x|} = -1$$

مثال: $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{z\to 0} \frac{2sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^2}{z^2} = \frac{1}{2}$$

مشتق تابع $f(z)$ در z_0 به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

مشروط به این که حـد فوق موجود باشد.در این صورت گوئیم f در z_0 مشتق پذیر است.

مثال:تابع $f(z) = z^2$ به ازای کدام یک از مقادیر z مشتق پذیر است؟

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^{\mathbf{2}}}{h} = \frac{z^2 + h^2 + 2zh - z^2}{h} = 2z$$

چون حدموجود است، f در تمام نقاط مشتق پذیر است.

نکته:تمام قواعد مشتق پذیری از توابع حقیقی در مشتق گیری از توابع مختلط صدق می‌کند.

مثال:وضعیت مشتق پذیری تابع $\mathrm{f(z)}=\bar{z}$ را بررسی کنید.

برای بررسی مشتق پذیری،یک بار x را ثابت و y را متغیر و بار دیگر y را ثابت و x را ثابت درنظر می‌گیریم.
اگر جواب ها متفاوت بود مشتق نداردا‌گر جواب یکی شد آنگاه $\Delta y=m\Delta x$ قرار می‌دهیم و دوباره رابطه را بررسی می‌کنیم.اگر به m بستگی نداشت مشتق داریم.

$$\mathrm{f}'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f}(z+h)-\mathrm{f}(z)}{h}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{x+\Delta x-iy-x+iy}{\Delta x}=1$$

$$\mathrm{f}'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f}(z+h)-\mathrm{f}(z)}{h}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{x-i(y+\Delta y)-x+iy}{i\Delta y}=-1$$

چون دو حـد فوق مقدار برابری باهم ندارند پس تابع $\mathrm{f(z)}=\bar{z}$ مشتق پذیر نیست.

توابع $\mathrm{f(z)}=Re(z)$ و $\mathrm{f(z)}=Im(z)$ هیچ جا مشتق پذیر نیستند.

تمرین : تمرین شماره ی ۱

توابع چندجمله‌ای در تمام نقاط مشتق پذیر و توابع گویا به جـز در ریشه های مخـرج مشتق پذیر اند.

قضیه:اگر $\mathrm{f(z)}$ در $z=0$ مشتق پذیر باشد،آنگاه $\mathrm{f(z)}$ در $z=z_0$ پیوسته است.

عکس قضیه فوق صادق نیست.برای مثال $\mathrm{f(z)}=|z|$ هیچ جا مشتق پذیر نیست اما در تمام نقاط پیوسته است.

تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی نامیم اگر f در تمام نقاط یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

تابع f را در حوزه D تحلیلی خوانیم اگر f در هر نقطه D تحلیلی باشد.

اگر تابع $\mathrm{f(z)}$ در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد آن را تابع تام نامیم.

اگر f در نقطه z_0 تحلیلی نباشد اما در نقطه ای در همسایگی z_0 تحلیلی باشد،آنگاه z_0 را یک نقطه تکین تابع f گویند.

مثال:$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{z}$ ، $z\neq 0$ در نقطه $z=0$ دارای یک نقطه تکین می‌باشد.

$\mathrm{f}'(z)=\frac{-1}{z^2}\quad z\neq 0 \implies$ به جز 0 در تمام صفحه مشتق پذیر است

معادله کوشی–ریمان:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad z = x + iy \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -i$$

$$\frac{f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = u_x + iv_x \qquad (1)$$

$$\frac{f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -iu_y + v_y \qquad (2)$$

$$(1)=(2) \Longrightarrow \boldsymbol{u_x = v_y \,, v_x = -u_y}$$

اگر رابطه بالا برقرار نباشد،تابع مشتق پذیر نیست.

برقرار بودن رابطه بالا دلیل بر مشتق پذیر بودن تابع نیست و فقط شرط لازم برای مشتق پذیری است.

شرط لازم و کافی برای آن که تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزه D تحلیلی باشد،آن است که u_x ، u_y ، v_x و v_y در D پیوسته و در معادلات کوشی–ریمان صدق کنند.

مثال:وضعیت تحلیلی بودن تابع $f(z) = z^2$ را در کلیه نقاط صفحه مختلط بررسی کنید.

$$z = x + iy \xRightarrow{f(z)=z^2} f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy \Longrightarrow u = x^2 - y^2 \,, v = 2xy$$

$$u_x = 2x \,, u_y = -2y \,, v_x = 2y \,, v_y = 2x$$

چون توابع $2x$ و $2y$ در کلیه نقاط پیوسته هستند و همچنین در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند ($u_x = v_y \,, v_x = -u_y$)،پس تابع مربوطه در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی است.

تمرین : تمرین شماره ی ۲

روابط کوشی–ریمان در مختصات قطبی:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

تمرین : تمرین شماره ی ۳

مثال:وضعیت تحلیلی بوددن تابع $f(z) = \bar{z}$ را بررسی کنید.

$$u = x \,, v = -y \Longrightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$$

چون معادلات کوشی–ریمان برقرار نیست،لذا در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

تابع حقیقی h از دو متغیر حقیقی x و y را در حوزه D از صفحه xy همساز گوییم اگر در آن حوزه دارای مشتقات جـزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله لاپلاس صدق کند.

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$$

حال فرض کنید تابع $\mathrm{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزه D تحلیلی باشد، آنگاه مشتقات جـزئی مرتبه اول u و v در معادله کوشی-ریمان صدق می‌کنند.یعنی:

$$u_x = v_y \implies u_{xx} = v_{yx}\ , u_{xy} = v_{yy}$$

$$v_x = -u_y \implies v_{xx} = -u_{yx}\ , v_{xy} = -u_{yy}$$

*یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق گرفته شده است.

پیوستگی مشتقات جـزئی متضمن آن است که $u_{xy} = u_{yx}$ و $v_{xy} = v_{yx}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$u_{xx} = -u_{yy} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0\ , v_{xx} = -v_{yy} \implies v_{xx} + v_{yy} = 0$$

بنابراین اگر $\mathrm{f(z)}$ در حوزه D تحلیلی باشد،توابع u و v در D همسازند.

اگر دو تابع u و v در D همساز باشند و مشتقات جـزئی مرتبه اول آن ها در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند،گوییم v یک مزدوج همساز u است.

قضیه:شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع $\mathrm{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزه D آن است که v یک مزدوج همساز u در D باشد.

اگر v یک مزدوج همساز u در D باشد،لازم نیست که u نیز یک مزدوج همساز v در D باشد.

*مزدوج یک تابع همساز را می‌توان از معادلات کوشی-ریمان بدیت آورد.

مثال:نشان دهید تابع $u = x^2 - y^2$ همساز است و مزدوج آن را بیابید.

$$u_{xx} = 2\ \ , u_{yy} = -2\ , u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = v_y \implies 2x = v_y\ , u_y = -v_x \implies v_x = 2y$$

$$v = \int 2x dy + h(x) = 2xy + h(x) + c = 2xy + \overbrace{h(x)}^{\text{جدید}}$$

$$v_x = 2y + h'(x) = 2y \implies h'(x) = 0 \implies h(x) = c \implies v = 2xy + c$$

مثال:روابط کوشی-ریمان را برای توابع زیر بررسی نمایید.

۱. $f(z) = |z| \Longrightarrow f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} = u + 0i$

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq v_y$$

۲. $f(z) = \arg z \Longrightarrow f(z) = \theta$

$$v_r = 0 \neq -\frac{1}{r} = -\frac{1}{r} u_\theta$$

۳. $f(z) = \ln z \quad z = re^{i\theta} \quad \ln z = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \Longrightarrow f(z) = \ln r + i\theta$

$$u_\theta = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{r} u_\theta = v_r \ , u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta$$

مثال:اگر $v(x, y)$ یک مزدوج همساز تابع $u = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $v(0,0) = 0$ ، آنگاه مقدار $v(1,1)$ را محاسبه نمایید.

$$u_x = 4x(x^2 - y^2 + 1) - 8xy^2 = v_y \Longrightarrow v = \int (4x^3 - 12xy^2 + 4x)dy + f(x)$$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + f(x)$$

$$v_x = -u_y \Longrightarrow 12x^2y - 4y^3 + 4y + f'(x) = 4y(x^2 - y^2 + 1) + 8x^2y$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = c \, , v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + c$$

$$v(0,0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \, , v(1,1) = 4$$

تابع نمایی:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$(e^z)' = e^z \ , |e^z| = e^x \ , \arg e^z = y \ , \bar{z} = re^{-i\theta} \ , (e^z)^n = e^{nz}$$

مثال: $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \Longrightarrow e^{z+2\pi i} = e^z . e^{2\pi i} = e^z$

مثال:اگر z یک عدد مختلط باشد،اندازه و آرگومان عدد e^{z+i} را بیابید.

$$e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^x e^{i(y+1)} \Longrightarrow \left|e^{z+i}\right| = e^x \, , \arg e^{z+i} = y + 1$$

توابع مثلثاتی و هذلولی:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

توابع متناوب با دوره 2π:

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z} \qquad \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

$$\sin hz = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) \qquad \cos hz = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

توابع فوق به ازای کلیه مقادیر z تحلیلی می‌باشد و هردو متناوب و با دوره تناوب $2\pi i$ هستند.

$$\cos hz = \cos iz \qquad \sin hz = -i \sin iz$$

$$\cos h^2 z - \sin h^2 z = 1$$

تابع لگاریتمی و توان عمومی:

$$Log\ z = \ln r + i\theta$$

$$\theta = \varphi + 2n\pi\ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (-\pi < \varphi < \pi)$$

$log\ z$ تابعی چندمقداری است،مقداری از $log\ z$ که متناظر با مقدار اصلی $\arg z$ است را مقدار اصلی $log\ z$ نامیده و آن را با $Log\ z$ نشان می‌دهیم.

$$Log\ z = \ln r + i\theta \qquad (-\pi < \varphi < \pi)$$

$$\log z = Log\ z \pm 2n\pi i\ \ , n = 1,2,3, \dots$$

$$Log\ i = \frac{\pi}{2} i\ \ ,\ \log i = \frac{\pi}{2} i, -\frac{3\pi}{2} i, \frac{5\pi}{2} i$$

مثال:

$$Log\ (-2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{3\pi}{4} i$$

$$\log z^n \neq n \log z\ \ , n = 1,2,3, \dots$$

$$z = e^w \Leftrightarrow w = Log\ z\ \ ,\ \ \frac{d}{dx} Log\ z = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi\ )$$

$$z^c = e^{c \log z}$$

مثال:مقدار i^i را بدست آورید.

$$z^c = e^{c \log z} \Longrightarrow\ i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} i \pm 2n\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی:

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

اثبات:

$$z = \sin w \qquad\qquad e^{iw} = \cos w + i \sin w = \sqrt{1 - \sin^2 w} + i \sin w$$

$$e^{iw} = \sqrt{1 - z^2} + iz \implies iw = \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \implies w = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\cos^{-1} z = -\,i \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\frac{i + z}{i - z}$$

$$\sinh^{-1} z = \log\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log\frac{1 + z}{1 - z}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}$$

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال:مقدار اصلی $(1+i)^{(1-i)}$ را بدست آورید.

$$z^c = e^{c \log z} \implies (1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\log(1+i)}$$

$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$ مقدار اصلی , $(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= e^{\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\left(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right)$$

تمرین : تمرین شماره ۵

تمرین فصل اول

۱-ثابت کنید $f(z) = |z|^2$ فقط در $z=0$ مشتق پذیر است؟

۲-ثابت کنید $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه ای از صفحه مختلط تحلیلی نیست ؟

۳-روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی را ثابت کنید؟

۴-مقدار $\sqrt{i}$ را به دست آورید ؟

۵-تابع $w = \log z$ را به ازای عدد مختلط $z = re^{iz}$ و $-\pi < \theta < \pi$ چنین تعریف میکنیم. $log\ z = lnr + i\theta$. اگر $z = e^{i\,3\frac{\pi}{4}}$ آن گاه $log\ z^2$ را به دست آورید ؟

فصل دوم

انتگرال مختلط

قوس(منحنی) C ،مجموعه‌ای از نقاط $z = (x, y)$ در صفحه مختلط را با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

فرض کنید تابع $\mathrm{f(z)}$ روی C پیوسته قطعه‌ای باشد و $\mathrm{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$ آنگاه:

$$\int_C \mathrm{f(z)}\,dz = \int_a^b \mathrm{f}\big(\mathrm{z}(t)\big)\,z'(t)\,dt$$

$$\int_C \mathrm{f(z)}\,dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

$$= \int_a^b (u + iv)(x' + iy')dt = \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt$$

مثال:مطلوبست محاسبه $\int_C |z|\,dz$ از $A = z = -i$ تا $B = z = +i$ درطول

الف) پاره خط AB ب) نیم دایره یکه‌ای که در نیم‌صفحه چپ واقع شده است

الف: $C = z(t) = it \qquad -i < t < +i \qquad dz = i\,dt$

$$\int_C |z|\,dz = \int_{-1}^{+1} \underbrace{|it|}_{\text{تابع زوج}}\,i\,dt = 2i\int_0^{+1} t\,dt = \left(it^2\Big|_0^1\right) = i$$

ب: $C = z(t) = \cos t + i\sin t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$$\int_C |z|\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\;dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (-\sin t + i\cos t)\,dt = \left(\cos t + i\sin t\,\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\right) = 2i$$

خواص اساسی انتگرال روی خط:

اگر مسیر C ر به دوقسمت C_1 و C_2 تقسیم کنیم:
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$$

$$\int_C [Af_1(z) + Bf_2(z)]\,dz = A\int_C f_1(z)\,dz + B\int_C f_2(z)\,dz$$

L طول منحنی مسیر C و M عدد حقیقی که در هر نقطه
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$$

مثال:مقدار انتگرال زیر را حساب کنید(m عدد صحیح و z_0 ثابت است.c دایره است به شعاع r و مرکزz_0)

$$\oint_C (z-z_0)^m\,dz$$

به فرم مقابل می‌نویسیم:
$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t) = z_0 + re^{it} \qquad 0 < t < 2\pi$$

$$(z-z_0)^m = r^m e^{imt} \qquad z'(t) = rie^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt}.rie^{it}\,dt = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt$$

$$\oint_C (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & m=-1 \\ 0 & m\neq -1 \end{cases}$$

قضیه کوشی–گورسا:

اگر $f(z)$ در تمام نقاط درون و روی منحنی ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

مثال:در $\oint_C \bar{z}\,dz$ نمی‌توان از قضیه بالا استفاده کرد چون $\bar{z}$ تحلیلی نیست.

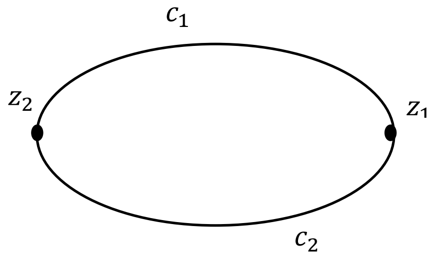
مثال:انتگرال $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ را حساب کنید(C دایره‌ای به معادله $|z-1-2i|$ است)

$$\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz = \oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz = \begin{cases} |0-1-2i| = \sqrt{5} > 2 & \text{بیرون دایره} \\ |2-1-2i| = \sqrt{5} > 2 & \text{بیرون دایره} \end{cases}$$

پس جواب صفر است زیرا درون ناحیه مربوطه تابع تحلیلی است.

هرگاه f در ناحیه D تحلیلی باشد و C_1 و C_2 مسیرهای دلخواهی مانند شکل زیر باشند آنگاه:

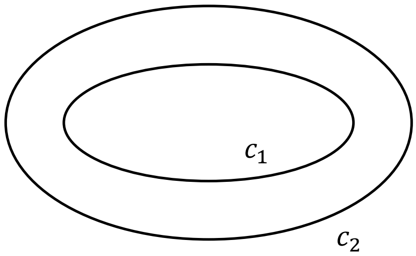
$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



بنابراین انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 مستقل از مسیر D است.

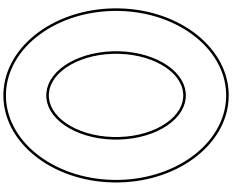
اگر تابع f روی مرز C_1 و C_2 و ناحیه C تحلیلی باشد،معادله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz & : \text{همجهت } C_1 \text{ و } C_2 \\ \int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2} f(z)\,dz & : \text{غیرهمجهت } C_1 \text{ و } C_2 \end{cases}$$



حوزه همبند ساده:حوزه D در صفحه مختلط را حوزه همبند ساده گوییم اگر منحنی بسته ساده D فقط شامل نقاط D باشد.

مثال نقض:



قضیه:اگر $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد،داریم:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

مثال:مقدار $\int_C (z^2+1)^2\,dz$ را در امتداد منحنی C به معادله پارامتری زیر از نقطه $t=0$ تا $t=2\pi$ محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad z_a = 0 \qquad\qquad t = 2\pi \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\pi a \\ y = 0 \end{cases} \quad z_a = 2\pi a$$

$$\int_0^{2\pi a} (z^2+1)^2\,dz = \left(\frac{z^5}{5} + \frac{2z^3}{3} + z\Big|_0^{2\pi a}\right) \Longrightarrow \frac{(2\pi a)^5}{5} + \frac{2(2\pi a)^3}{3} + (2\pi a) = 2\pi a(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 + 15)$$

قضیه(فرمول انتگرال کوشی):

فرض کنید $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد،آنگاه به ازای هرنقطه z_0 از D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 نقطه‌ای در درون آن باشد،داریم:

انتگرال درجهت مثبت انجام می‌شود.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

مثال: $\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ روی هر مسیر بسته ساده که شامل مبداء باشد و شامل مبداء نباشد را بدست آورید.

شامل مبداء باشد:

$$f(z) = 1\,, z_0 = 0\,, f(0) = 1 \Longrightarrow: \oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i$$

شامل مبداء نباشد:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 0$$

مثال:انتگرال : $\oint_C \frac{e^z}{z}\,dz$ را محاسبه نمایید(C عبارت است از دایره $|z| = 2$)

$$f(z) = e^z\,, z_0 = 0 \Longrightarrow \oint_C \frac{e^z}{z} = 2\pi i . e^0 = 2\pi i$$

قضیه:اگر $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد داریم:

که C مسیر بسته ساده‌ای در D است که z_0 در درون آن قرار دارد و درجهت مثبت پیموده می‌شود.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

نکته مهم:شکل استاندارد حائز اهمیت است: $(2z-1)^2 = 4\left(z-\frac{1}{2}\right)$

مثال:انتگرال $\oint_C \frac{3z+1}{z^3-z^2}dz$ را محاسبه نمایید.مسئله را با حالت های مختلف برای C حل کنید.

الف: $|z| = \frac{1}{2}$ ب: $|z| = 2$ (درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت) ج: $|z-2-i| = 2$

الف: فقط $z = 0$ داخل دایره است.پس داریم:

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz \Longrightarrow \mathrm{f}(z) = \frac{3z+1}{z-1}, n+1 = 2 \Longrightarrow n = 1$$

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)' = 2\pi i.\frac{3(z-1)-3z-1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0} = -8\pi i$$

ب: تفکیک کسرها: چون باید توابع صورت تحلیلی باشند که بتوان از رابطه استفاده کرد.

$$\frac{3z+1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}$$

$$A = \left(\mathrm{f}(z)(z^2)\right)'\bigg|_{z=0} = -4$$

$$B = \mathrm{f}(z)(z^2)\bigg|_{z=0} = -1$$

$$C = \mathrm{f}(z)(z-1)\bigg|_{z=1} = 4$$

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz = -\oint_C \frac{dz}{z^2} - 4\oint_C \frac{dz}{z} + 4\oint_C \frac{dz}{z-1} = 2\pi i.\frac{(1)'}{1!} - 4(2\pi i) + 4(2\pi i) = 0$$

تمرین : تمرین شماره ۱و ۲

مثال:حاصل انتگرال حقیقی مقابل را محاسبه کنید. $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}, a > 1$

$$z = re^{i\theta} \qquad -\pi < \theta < \pi \quad \Longrightarrow \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a + \frac{z + z^{-1}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{i}{2}z^2 + iaz + \frac{i}{2}}$$

استاندارد $= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{i}{2}(z^2+2az+1)} = -i\int \frac{dz}{(z^2+2az+1)}$

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \Longrightarrow z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(1)(1)}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$-a + \sqrt{a^2 - 1}$: داخل دایره $\qquad - a - \sqrt{a^2 - 1}$: خارج دایره

$$I = -i\int \frac{dz}{\left(z + a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(z + a - \sqrt{a^2 - 1}\right)} = 2\,\pi i.\,f(z_0)$$

$$= 2\,\pi i.-i.\frac{1}{-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

تمرین : تمرین های ۳و ۴و ۵ و۶

انتگرال توابعی گویا از $\cos\theta$ و $sin\,\theta$:

برای محاسبه انتگرال هایی از نوع $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta\,, sin\,\theta)d\theta$ که در آن F توابعی گویا از $\cos\theta$ و $sin\,\theta$ و در فاصله $0 \le \theta \le 2\pi$ متناهی است.به صورت زیر عمل می‌شود:

$$z = e^{i\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad sin\,\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad\qquad \oint_C F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

که در آن C دایره $|z| = 1$ و در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود.

تمرین : تمرین شماره ی ۷

مثال:مقدار انتگرال مقابل را محاسبه نمایید. $\qquad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)} = ?$

$z = 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{2}$: درون دایره

$z = i \Longrightarrow |i| = 1 > \frac{1}{2}$: بیرون دایره

$z = -i \Longrightarrow |-i| = 1 > \frac{1}{2}$: بیرون دایره

$$\mathrm{f(z)} = \frac{e^z}{(z^2+1)} \Longrightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{z}) = \frac{e^z(z^2+1) - 2ze^z}{(z^2+1)^2} = \frac{(z-1)^2 e^z}{(z^2+1)^2} = \frac{(z-1)^2}{(z^2+1)^2} e^z$$

$$\mathrm{f}''(\mathrm{z}) = 2\left(\frac{z^2+1-2z^2+2z}{(z^2+1)^2}\right)\left(\frac{z-1}{z^2+1}\right)e^z + \left(\frac{z-1}{z^2+1}\right)^2 e^z$$

$$\mathrm{f}''(0) = -1 \quad , n+1 = 3 \Longrightarrow n = 2 \;\Longrightarrow\; \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)} = \frac{2\,\pi i.\mathrm{f}''(0)}{2!} = -\pi i$$

تمرین : تمرین شماره ۸ و ۹ و ۱۰

تمرین فصل دوم

۱-حاصل $\oint_c \frac{\ln(1+z^2)}{(2z-i)^2}$ ، که c منحنی $\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}$ در جهت مثبت است را محاسبه کنید ؟

۲-مقدار انتگرال $\oint \frac{\sin \pi z^2+\cos \pi z^2}{z-2}$ را در صورتی که $c: |z|=\frac{1}{3}$ را به دست آورید ؟

۳-حاصل $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{(z^2-6z)}dz$ را به دست آورید ؟

۴- حاصل $\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z^3-2z^2)}dz$ را به دست آورید ؟

۵- مقدار انتگرال $\oint \frac{\sin \pi z^2+\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}$ را در صورتی که $c: |z|=3$ را به دست آورید ؟

۶-حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}-\sin\theta}$ را محاسبه کنید ؟

۷-اگر z=x+iy باشد ، آن گاه مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{z}{z^3(z^2+1)}dz$ را به دست آورید ؟

۸-انتگرال $\oint \frac{e^z}{z^2(z+2)}$ را به دست آورید ؟

۹-اگر $U(x,y)=2x(1-y)$ و تابع uیک مزدوج همساز u باشد، $f'(z)$ را به دست آورید ؟

۱۰-اگر $F(0)=0$ و $U(x,y)=x^3-3xy^2$ ، f(z) را به دست آورید ؟

فصل سوم

دنباله ها و سری ها

دنباله ها:

اگر به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود،آنگاه گوییم اعداد $z_1, z_2, \dots, z_n$ یک دنباله را تشکیل می‌دهند.دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گوییم اگر: عدد $\lim_{n\to\infty} z_n = Z$

اگر دنباله همگرا نباشد،واگرا نامیده می‌شود.

مثال:دنباله‌ای که جملات آن به فرم $z_n = \frac{n-3}{2n+1}$ است.به چه عددی همگرا است؟

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

قضیه:دنباله $z_1, z_2, \dots, z_n$ که در آن $z_n = x_n + iy_n$ به $z = x + iy$ همگرا است اگروفقط‌اگردنباله های قسمت حقیقی $x_1, x_2, \dots, x_n$ به x و دنباله های قسمت های موهومی $y_1, y_2, \dots, y_n$ به y همگرا باشد.

دنباله کراندار:

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوییم اگر عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد به طوری که اگر دنباله‌ای کراندار نباشد آن را بیکران نامیم. $\forall n \in N , |z_n| < M$

قضیه:هر دنباله همگرا،کراندار است.

سری:

اگر ... $z_1, z_2,$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد،مجموع زیر را سری نامتناهی یا سری نامیم.

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1, z_2, \dots \quad (*)$$

قضیه:اگر $z_n = x_n + iy_n$ باشد،گوییم سری همگرا به $z = x + iy$ است،اگروفقط‌اگر سری قسمت های حقیقی و سری قسمت های موهومی یعنی $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ به ترتیب به x و y همگرا باشند.

سری $(*)$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه سری زیر همگرا باشد:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|z_i| = |z_1| + |z_2| + \cdots (**)$$

اگر سری $(*)$ همگرا ولی سری $(**)$ واگرا باشد،سری را همگرای مشروط نامیم.

هرگاه سری $(*)$ همگرا باشد،آنگاه: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

سری توانی،سری تیلور،سری لوران:

یک سری توانی برحسب توان های $z - z_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m(z-z_0)^m = C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (*)$$

اگر $z_0 = 0$ ، حالت خاص سری توانی برحسب توان های z بدست می‌آید(بسط مک لورن)

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m(z)^m = C_0 + C_1(z) + C_2(z)^2 + \cdots$$

ناحیه همگرایی را می‌توان با استفاده از آزمون نسبیت معین نمود:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$$

اگر $R = \infty$ ، سری برای همه مقادیر z همگرا است.

اگر $R = 0$ ، سری فقط به ازای z_0 همگرا است.

اگر $0 < R < \infty$ ، آنگاه سری برای تمام مقادیر z که $|z - z_0| < R$ همگرا بوده و برای z هایی که $|z - z_0| > R$ واگرا می‌باشد.

R را شعاع همگرایی، $|z - z_0| = R$ را دایره همگرایی، $|z - z_0| < R$ را قرص همگرایی نامند.

قضیه:اگر سری $(*)$ در نقطه $z = z_1$ همگرا باشد،این سری به ازای هر z که در رابطه $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

صدق کند به طور مطلق همگرا است.

مثال:همگرایی سری زیر را بررسی نمایید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0\Rightarrow R=\infty$$

به ازای هر z (متناهی) به طور مطلق همگرا است.

مشتق گیری از سری به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z)^n\overset{\text{مشتق}}{\Longrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(z)^{n-1}=C_1+2C_2z+\cdots$$

قضیه:شعاع همگرایی سری مشتق یک سری توانی برابر با شعاع همگرایی سری اصلی است.

قضیه:انتگرال گیری از سری به صورت زیر می‌باشد که شعاع همگرایی آن برابر با شعاع همگرایی سری اصلی است.

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z)^n\overset{\text{انتگرال}}{\Longrightarrow}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(z)^{n+1}=C_0z+\frac{C_1}{2}z^2+\cdots$$

قضیه:هر سری توانی با شعاع همگرایی $R>0$ در داخل همگرایی خود،تابع تحلیلی است.

قضیه تیلور:

فرض کنید $\mathrm{f(z)}$ در حوزه D تحلیلی باشد و $z=z_0$ نقطه‌ای در D باشد،در این صورت دقیقاً یک سری به مرکز z_0 وجود دارد که $\mathrm{f(z)}$ را نشان می‌دهد.این سری به صورت زیر است:

$$\mathrm{f(z)}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z-z_0)^m\quad ,C_m=\frac{1}{m!}\mathrm{f}^{(m)}(z_0)\quad ,m=0,1,2,\ldots$$

مثال:بسط مک لورن e^z را بدست آورید(در بسط مک لورن $z_0=0$)

$$C_m=\frac{1}{m!}\mathrm{f}^{(m)}(z_0)=\frac{1}{m!}e^z\bigg|_{z=z_0}=\frac{1}{m!}e^0=\frac{1}{m!}$$

$$e^z=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(z)^m=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\qquad |z|<\infty$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{(m)!}}\right|=0\Rightarrow R=\infty$$

بسط مک لورن برخی از توابع مقدماتی مهم:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots \qquad |z|<1$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots \qquad |z|<\infty$$

مثال:بسط مک لورن توابع زیر را بدست آورید.

در بسط $\frac{1}{1-z}$ اگر به‌جای تمامی z ها $-z$ قرار دهید بسط مربوطه بدست می‌آید. $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-\cdots \qquad |z|<1$$

در بسط $\cos z$ اگر به جای z ، iz قرار دهیم بسط مربوطه بدست می‌آید. $\cos hz=\cos iz$

$$\cos hz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\sin hz=-i\sin iz$$

$$\sin hz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times -i\times\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times -i\times \overbrace{i^{2n+1}}^{(i^2)^n.i}\times z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z|<\infty$$

$$\ln|1+z|=\int\frac{1}{1+z}dz=\int 1-z+z^2-\cdots dz=z-\frac{z^2}{2}+\cdots$$

تمرین : تمرین شماره ۱

مثال:شعاع همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n \Rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2}{n^2}\right|=4\Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

نکته مهم:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad e=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad \frac{1}{e}=e^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

ناحیه همگرایی را با استفاده از آزمون کوشی نیز می‌توان معین نمود:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}$$

مثال:شعاع همگرایی سری توانی زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n \Rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow R=e$$

تمرین : تمرین شماره ۲

مثال:سری تیلور تابع $f(z)=\cos^2 z$ را حول نقطه $z=0$ بدست آورید.

$$\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+\cos 2z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

اگر تابع $f(z)$ درحوزه D تحلیلی باشد،نقطه z_0 متعلق به D را صفر تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0)=0$ باشد.

فرض کنید z_0 یک صفر تابع $f(z)$ باشد،کوچکترین عدد صحیح n که $f_{z_0}^{(n)}\neq 0$ باشد را مرتبه صفر $f(z)$ گوییم.

مثال:مرتبه صفر تابع $f(z)=z^2$ را در $z=0$ پیدا کنید.

$$f'(z)=2z \Rightarrow f'(0)=0 \text{ ، } f''(z)=2 \Rightarrow f''(0)=2 \Rightarrow f''(0)\neq 0$$

بنابراین مرتبه صفر برابر ۲ است.

نقطه‌ای از مجموعه A را نقطه تنها A نامیم اگر یک همسایگی از A وجود داشته باشد که هیچ نقطه دیگری از A را شامل نشود.

در بسیاری از موارد لازم است که تابع $\mathrm{f(z)}$ حول نقطه‌ای که تابع در آن نقطه تکین است بسط داده شود. قضیه تیلور را نمی‌توان در این موارد به کار برد. برای این منظور از سری لوران استفاده می‌کنیم.

سری لوران:

اگر $\mathrm{f(z)}$ روی دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز Z_0 و در طوق بین آن ها تحلیلی باشد،آنگاه $\mathrm{f(z)}$ را می‌توان با سری لوران زیر نمایش داد:

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n} = C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots + \frac{a_1}{z-z_0} + \frac{a_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

که در آن

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{f(z)}}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad , \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} \mathrm{f(z)}\, dz$$

هریک از انتگرال ها روی مسیر بسته ساده‌ای مانند C که در طوق قرار دارد و درجهت مثبت

فرمول به صورت خلاصه شده مطابق زیر می باشد:

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \qquad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{f(z)}}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

سری لوران یک تابع تحلیلی،در طوق همگراییش منحصر به فرد است و این یکتا بودن حائز اهمیت است.زیرا معمولاً ضرائب مربوطه از فرمول های داده شده به دست نمی‌آیند و ما از روش های دیگری برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم.

مثال:سری لوران تابع $\mathrm{f(z)} = \frac{e^{-z}}{z^3}$ را بدست آورید.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$$

$$\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \cdots$$

مثال:سری لوران تابع $f(z)=\frac{\cos 2z}{z^2}$ را بدست آورید.

$$\frac{\cos 2z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-2+\frac{2z^2}{3}-\frac{4z^4}{45}+\cdots$$

مثال:بسط تابع $f(z)=\frac{1}{a-z}$ را حول $z=0$ بدست آورید($a>0$).

$$f(z)=\frac{1}{a-z}=\frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n \qquad |z|<a$$

$$f(z)=\frac{1}{a-z}=\frac{1}{z\left(1-\frac{a}{z}\right)}=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n \qquad |z|>a$$

$$f(z)=\frac{1}{a-(z-z_0)}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{a}{z-z_0}\right)}=\frac{-1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z-z_0}\right)^n \qquad |z-z_0|>a$$

اگر تابع $f(z)$ در نقطه‌ای مانند $z=z_0$ تکینی تنها داشته باشد،می‌توان آن را با سری لوران که در یک همسایگی $z=z_0$ (به جز در $z=z_0$) اعتبار دارد نمایش داد.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$$

سری دوم را بخش اصلی $f(z)$ در نزدیکی $z=z_0$ می‌نامیم.

اگر تابع بخش اصلی در بسط لوران دارای تعداد متناهی جمله باشد یعنی سری بالا به صورت زیر بیان شود:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{a_0}{(z-z_0)}+\cdots+\frac{a_m}{(z-z_0)^m}$$

و $a_n=0$ برای هر $n>m$ تکین f در $z=z_0$ را **قطب** و m را **مرتبه قطب** می‌نامیم.

برای تعیین مرتبه قطب می‌توان $\lim_{z\to 0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,3,\ldots$ محاسبه کنیم.

مقدار m که به ازای آن برای اولین بار،حـــد فوق برابر مقداری متناهی شود،مرتبه قطب است.

اگر تابع تحلیلی f ، تکینی غیر از قطب داشته باشد،این تکین را **تکین ضروری** یا **نقطه ویژه اساسی** نامیم.

مثال:تابع زیر دارای چه قطب هایی و از چه مرتبه هایی است؟

$$\mathrm{f(z)}=\frac{2}{z(z-1)^3}+\frac{-5}{(z-1)^2}$$

$$\mathrm{f(z)}=\frac{2-5(z)(z-1)}{z(z-1)^3}=\frac{-5z^2+5z+2}{z(z-1)^3}$$

$z=0$ قطب ساده و$z=1$ قطب مرتبه ۳ است.

مثال:تابع $e^{\frac{1}{z}}$ دارای چه نقاط تکینی است؟

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots$$

تکین ضروری تنها : $z=0$

اگر تابع تحلیلی $\mathrm{f(z)}$ در $z=a$ دارای قطبی باشد،آنگاه اگر $z\to a$ خواهیم داشت: $|\mathrm{f(z)}|\to\infty$

مثال:درمورد تابع زیر نقاط $z=2$ و $z=-2$ چه نقاطی هستند؟

$$\mathrm{f(z)}=\frac{z^7}{(z^2-4)^2e^{\frac{1}{z-2}}}=\frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2e^{\frac{1}{z-2}}}$$

$z=\pm 2$ نقاط تکین تابع و $z=-2$ قطب مرتبه دوم می‌باشد.

نقطه $\mathrm{z}=\mathrm{z}_0$ را یک **تکین برداشتنی** گوییم اگر تابع $\mathrm{f(z)}$ در $\mathrm{z}=\mathrm{z}_0$ تحلیلی نباشد ولی بتوان آن را در $\mathrm{z}=\mathrm{z}_0$ به نحوی تعریف کرد که در آن نقطه تحلیلی شود.

مثال:نقطه $\mathrm{z}=0$ در تابع $\mathrm{f(z)}=\frac{1-\cos z}{z}$ چه نقطه است؟

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1-\cos z}{Z}=\frac{1}{Z}\left(1-1+\frac{Z^2}{2!}-\frac{Z^4}{4!}+\cdots\right)=\frac{Z}{2!}-\frac{Z^3}{4!}$$

$\mathrm{z}=0$ نقطه تکین برداشتنی است.

تمرین : تمرین شماره ۳

مثال:سری لوران تابع $\mathrm{f(z)}=\frac{1}{Z^2-1}$ در ناحیه $|Z-1|>2$ را بدست آورید.

ابتدا تابع را به نحوی می‌نویسیم که تمام عبارت های آن شامل $Z-1$ باشد.

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{(Z-1)(Z+1)}=\frac{1}{(Z-1)((Z-1)+2)}$$

مثال:سری لوران تابع $\mathrm{f(z)}=\frac{3}{2+Z-Z^2}$ در ناحیه $1<|Z|<2$ را بیابید.

$$\mathrm{f(z)}=\frac{3}{2+Z-Z^2}=\frac{A}{1+Z}+\frac{B}{2-Z}=\frac{1}{1+Z}+\frac{1}{2-Z}$$

$$\frac{1}{1+Z}=\frac{-1}{-Z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad |Z|>1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{Z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{Z^n} \quad |Z|>1$$

$$\frac{1}{2-Z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{Z}{2}\right)^n \quad |Z|<2 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{2^{n+1}} \quad |Z|<2$$

$$\mathrm{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{Z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{2^{n+1}}$$

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال:سری لوران تابع $\mathrm{f(z)}=\frac{1-2z}{z^4-1}$ در ناحیه $|Z|<1$ را بدست آورید.

$$\mathrm{f(z)}=(2z-1)\frac{1}{1-z^4}=(2z-1)\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n}=2\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n}$$

مثال:سری لوران تابع $\mathrm{f(z)}=\frac{\sin z}{z-\pi}$ حول نقطه $z=\pi$ را بدست آورید.

$$\frac{\sin((z-\pi)+\pi)}{z-\pi}=-\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)}=\frac{-1}{(z-\pi)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

تمرین فصل سوم

۱-بسط مک لورن $Ln\ \left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ را به دست آورید ؟

۲-شعاع هم گرایی سری $\sum_{n=0} \frac{n!}{n^n} z^n$ را به دست آورید ؟

۳-نقطه $z=1$ در تابع $e^{\frac{-1}{(z-1)^2}}$ چه نوع نقطه ای است ؟

۴-سری لوران تابع $F(z) = \frac{3}{z^2+z-2}$ در ناحیه $2 < |z|$ را به دست آورید ؟

فصل چهارم

انتگرال گیری به روش مانده ها

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{z-z_0}+\cdots$$

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz \;\;\Rightarrow\; \oint f(z)dz=2\pi i.C_{-1}$$

ضریب C_{-1} را مانده $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ گویند و آن را با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$C_{-1}=\underset{z=z_0}{Res}\,f(z)$$

روش های محاسبه مانده:

اگر $f(z)$ در نقطه $z=a$ دارای یک قطب ساده باشد،آنگاه:

$$\underset{z=a}{Res}\,f(z)=C_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z)$$

اگر $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ و $p(z)$ و $q(z)$ در $z=a$ تحلیلی و $p(a)\neq 0$ و $q(z)$ دارای یک صفر ساده در $z-a$ باشد،آنگاه:

$$\underset{z=a}{Res}\,f(z)=\underset{z=a}{Res}\,\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(a)}{q'(a)}$$

اگر $z=a$ یک قطب مرتبه m تابع $f(z)$ باشد،آنگاه:

$$\underset{z=a}{Res}\,f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right]$$

قضیه مانده:

فرض کنید C مرز ساده و بسته ای باشد که در درون و روی آن به جز در تعداد متناهی از نقاط منفرد Z_1،Z_2،...،Z_n که در داخل C واقع اند،تحلیلی است،آنگاه:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{Res} f(z)$$

C در جهت مثبت

مثال:مانده تابع $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در $z = \pm 1$ را حساب کنید.

$$\underset{z=+1}{Res} f(z) = \lim_{z\to+1}[f(z)] = \frac{1}{4}$$

$$\underset{z=-1}{Res} f(z) = \frac{1}{(1)!}\lim_{z\to-1}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right] = \lim_{z\to-1}\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{4}$$

مثال:مانده سری لوران تابع $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ در مجاورت $z = 0$ را بدست آورید.

$$f(z) = (1 + z + z^2 + \cdots)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right)$$

باید ضریب جمله $\frac{1}{z}$ را پیدا کنیم:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{2!\,z} + \cdots + \frac{1}{3!\,z}$$

پس ضریب جمله $\frac{1}{z}$ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

همچنین داریم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\underset{z=a}{Res} f(z) = e$$

مثال:مانده تابع $ze^{\frac{-1}{z-1}}$ در $z = 1$ بدست آورید.

$$f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z-1)^n} = (z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!\,(z-1)^2} - \cdots\right)$$

$$+\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!\,(z-1)^2} - \cdots\right) = (z-1) - 1 + \frac{1}{2!\,(z-1)} - \cdots + 1 - \frac{1}{z-1}$$

ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر با $\frac{-1}{2}$ است.

تمرین : تمرین شماره ۱ و ۲ و ۳

مثال:مبداء مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z) = \frac{\sin Z}{Z^2}$ است و مانده تابع در این نقطه چند است؟

$$\lim_{Z \to 0}(Z-0)^m\, f(z) \qquad m = 1\,,2\,,\ldots$$

اولین m که مقدار آن متناهی می‌شود و مرتبه قطب است.

$$\lim_{Z \to 0}(Z)^m\frac{\sin Z}{Z^2} = 1$$

بنابراین $Z = 1$ قطب ساده است.

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \lim_{Z \to 0}(Z)^m\frac{\sin Z}{Z^2} = 1$$

مثال:نوع نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$ و مقدار $I = \int_C \frac{dz}{1-\cos z}$ وقتی $C: |Z| = 1$ در جهت مثبت باشد را بدست آورید.

$\boxed{\text{نقاط تکین}}$

$$1 - \cos z = 0 \;\Rightarrow z = 2k\pi \qquad k = 0\,,1\,,2\,,\ldots$$

فقط $z = 0$ درون دایره $|Z| = 1$ است.برای بدست آوردن مرتبه این قطب داریم :

$$\lim_{Z \to 0}\frac{z}{1-\cos z} = \lim_{Z \to 0}\frac{z}{2\sin^2\frac{z}{2}} = \lim_{Z \to 0}\frac{z}{2\left(\frac{z}{2}\right)^2} = \infty$$

$$\lim_{Z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{Z\to 0}\frac{z^2}{2\sin^2\frac{z}{2}}=\lim_{Z\to 0}\frac{z^2}{2\left(\frac{z}{2}\right)^2}=2$$ متناهی و دوم مرتبه قطب

$$\underset{z=0}{Res}\ \mathrm{f(z)}=\frac{1}{1!}\lim_{Z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)=\lim_{Z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-\sin z\,(z)^2}{(1-\cos z)^2}$$

$$=\lim_{Z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{1+\underbrace{\cos^2 z}_{1-\sin^2 z}-2\cos z}$$

$$=\lim_{Z\to 0}\frac{2z\left(\sin^2\frac{z}{2}\right)-z^2\sin z}{-\sin^2 z+2\left(\underbrace{1-\cos z}_{\sin^2\frac{z}{2}}\right)}=\lim_{Z\to 0}\frac{2z*\frac{z^2}{4}-z^3}{-z^2+2\left(\frac{z}{2}\right)^2}=z=0$$

$$I=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{Res}\ \mathrm{f(z)}=0$$

مثال:اگر مقدار انتگرال زیر برابرر است با $2\pi iM$ که در آن M مجموع مانده های تابع در قطب های واقع در درون دایره در جهت مثبت $C:|Z|=3$ است.در این صورت مقدار این انتگرال

$$\oint_C\frac{e^z dz}{(z^2+4)(z-4)}$$

$$(z^2+4)(z-4)=0\ \Rightarrow z=4\,,2i\,,-2i$$

نقاط$\pm 2i$ درون دایره $|Z|=3$ است.

$$|2i+1|+|2i-1|=2\sqrt{5}<4\sqrt{3}$$

$$|-2i+1|+|-2i-1|=2\sqrt{5}<4\sqrt{3}$$

$$|4+1|+|4-1|=8>4\sqrt{3}$$

پس نقاط $\pm 2i$ درون C_2 هستند و مقدار انتگرال روی C با مقدار انتگرال روی C_2 برابر است:

$$\oint_{C_2}\frac{e^z dz}{(z^2+4)(z-4)}=2\pi iM$$

مثال:فرض کنید C بیضی $\frac{(X+4)^2}{9}+\frac{Y^2}{16}=1$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد.آنگاه مقدار $f'(2)$ را زیر بدست آورید.

$$f(w)=\oint_C \frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dz$$

$z=0 \implies \frac{16}{9}>0$ خارج دایره

به ازای $z=w$ که خارج از بیضی است $f(w)=0$ و $f'(2)=0$ که $w=2$ خارج ببیضی است.

به ازای $z=w$ که داخل از بیضی است : $f(w)=2\pi i * \frac{w^2-w+1}{w}$

تمرین : تمرین شماره ۴ و ۵ و ۶

مثال:انتگرال زیر را باتوجه به این که C دایره‌ای است به شعاع e و مرکز مبدا را بدست آورید.

$$\oint_{C^+} \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$z=1$: درون دایره

$$\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos(1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}*\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n} \implies Res(1)=0$$

$$I=\oint_{C^+}\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=2\pi i*\big(Res(1)+Res(2)\big)=2\pi i*\cos(1)$$

مثال : مقدار انتگرال $I = \oint_c \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\, dz$ که در آن $C: |z| = 1$ است را به دست آورید ؟

$$Res\ F(z) = \lim \sin\frac{1}{z} = \sin 1$$

$$F(z) = \frac{-1}{1-z} sin\frac{1}{z} = (1+z+z^2+\cdots)(\frac{-1}{z} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots)$$

$$\frac{1}{z} = -1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \cdots = -\sin 1$$

$$Res\ F(z) = -\sin 1$$

$$I = 2\pi i(-\sin 1 + \sin 1) = 0$$

تمرین : تمرین شماره ۷

مثال : فرض کنید مرز C مربعی با راس های $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ در جهت مبت پیموده شده اند .در این صورت

$\oint_c \frac{\cos h\pi z}{z(z^2+1)}\, dz$ را به دست آورید ؟

$$\oint_c \frac{\cos h\pi z}{z(z^2+1)}\, dz = 2\pi\circ\left[\underset{z=0}{Res\ f(z)} + \underset{z=i}{Res\ \mathrm{f(z)}} + \underset{z=-i}{Res\ \mathrm{f(z)}}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\cosh 0}{1} + \frac{\cosh i}{2i^2} + \frac{\cosh \pi i}{-2i(-i)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\cosh 0\, i}{1} + \frac{\cosh i^2\pi}{-2} + \frac{\cosh -i^2\pi}{-2}\right] = 4\pi i$$

محاسبه ی انتگرال های حقیقی ناسره

قضیه : اگر $f(z)$ تابعی گویا و دارای قطب روی محور های Xها نباشد و درجه مخرج حداقل دو درجه بیشتر از درجه صورت باشد ، آن گاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{y>0} Res\ f(z)$$

مثال : مقدار انتگرال $I=\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ را محاسبه کنید ؟

تابع $F(X)$ زوج است ، پس داریم :

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\times 2\pi i\left[\underset{z=2i}{Res\, f\,(z)}+\underset{z=i}{Res\, f\,(z)}\right]$$

$$=\pi i\left[\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)+\lim_{z\to i}(z-i)f(z)\right]$$

$$=\pi i\left[\frac{2\times(2i)^2}{4i\times((2i)^2+1)}+\frac{2i^2-1}{2i\times(i^2+4)}\right]=\pi i\times\frac{9-6}{12i}=\frac{\pi}{4}$$

تمرین : تمرین شماره ۸

فرض کنید $f(X)$ تابعی گویا به صورت $f(X)=\frac{p(x)}{q(x)}$ و به ازای مقدار حقیقی X، $f(X)$ مخالف صفر باشد ، قضیه مانده ها میتواند در محاسبه ی انتگرال های زیر مفید باشند :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos ax\ \ dx=Real\left[2\pi i\sum\nolimits_{y>0}Res\, f(z)e^{iaz}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin ax\, dx\ =Im\left[2\pi i\sum\nolimits_{y>0}Res\, f(z)e^{iaz}\right]$$

مثال :مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}\ dx$ را به دست آورید ؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}\ dx=Real\ \left[2\pi i\ Res\ \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\right]=Re\left[2\pi i\frac{e^{-2}}{2i}\right]=\frac{\pi}{e^2}$$

مثال : انتگرال غیر عادی $I=\int_0^{+\infty}\frac{w\sin wx}{w^2+1}\,dw$ را به دست آرید ؟

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w\sin wx}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2}\,Im\left[2\pi i\;Res\;\frac{z}{z^2+1}e^{ixz}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,Im\left[2\pi i\;Res\;\frac{i}{2i}e^{-x}\right]=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

مثال : انتگرال غیر عادی $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}\,dx$ $(m>0)$ را به دست آورید ؟

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}Re\left[2\pi i\;Res\;\;\frac{e^{imz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]$$

$$Re\,\frac{e^{imz}}{(z+i)^2(z-i)^2}=\lim_{z->i}\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{imz}}{(z+i)^2}\right]=$$

$$\lim_{z->i}\left[\frac{ime^{imz}(z+i)^2-2e^{imz}(z+i)}{(z+i)^4}\right]=\lim_{z->i}\left[\frac{ime^{imz}(z+i)-2e^{imz}}{(z+i)^3}\right]$$

$$=\frac{-2me^{-m}-2e^{-m}}{-8i}=\frac{e^{-m}(1+m)}{4i}=>I=Re\left[\pi i\times\frac{e^{-m}(1+m)}{4i}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{-m}(1+m)$$

تمرین : تمرین شماره۹

تمرین فصل چهارم

۱-مقدار مانده تابع $f(z) = (z-1)^5 \cos\left(\frac{-1}{z-1}\right)$ در $z=1$ را محاسبه کنید ؟

۲- مقدار مانده تابع $\frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)}$ در نقطه i را به دست آورید ؟

۳- مقدار مانده تابع $\frac{1}{z(z+2)^3}$ در $z=-2$ را به دست آورید ؟

۴-انتگرال $\int_c \tan z \ dz$ که c دایره $c:|z| =$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد را حساب کنید ؟

۵- انتگرال $I = \int_c \frac{\sin z}{z^4} dz$ که در c دایره $c:|z| = 3$ را حساب کنید ؟

۶- انتگرال $I = \int z^2 e^{\frac{1}{z}}$ را محاسبه کنید ؟

۷- انتگرال $I = \int_{|z|=1} (z + \frac{1}{z}) e^{\frac{1}{z}}$ را محاسبه کنید ؟

۸- انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4} \ dw$ را محاسبه کنید ؟

۹- اگر $n>0$ عدد درست باشد ، آن گاه $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)$ را به دست آورید ؟

فصل پنجم

سری و انتگرال فوریه

$F(x)$ متناوب با دوره ی تناوب P : $F(x+P)=F(x)$

کوچکترین عدد $P>0$ دوره تناوب تابع $F(x)$

$Sin\ x$ و $cos\ x$ متناوب با دورهی تناوب 2π

دوره تناوب $\cos 2x \;=>\; 2x = 2\pi \;=>\; \mathrm{x} = \pi$

دوره تناوب $\cos\frac{x}{2} \;=>\; \frac{x}{2} = 2\pi \;=>\; \mathrm{x} = 4\pi$

دوره تناوب $\sin\,(2X+\pi) \;=>\; 2x = 2\pi \;=>\; \mathrm{x} = \pi$

نکته :اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی متناوب با دوره تناوب P باشند ، آن گاه $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$

(a و b ثابت) نیز تابعی متناوب با دوره تناوب Pاست.

*تابع $f(x)$ را در یک فاصله به طور قطعه ای پیوسته گوییم هرگاه بتوان فاصله را به تعداد متناهی زیر فاصله تقسیم کرد به طوری که در هر یک از این زیر فواصل تابع $f(x)$ پیوسته و حد چپ و راست تابع $f(x)$ در هر یک از نقاط انتهایی زیر فاصله ها متناهی باشد.

تعریف : فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله ی (Lو$-L$) تعریف شده و در خارج این فاصله داشته باشیم

$f(x+2L) = f(x)$ یعنی تابع $f(x)$ دارای تناوب $2L$ باشد.سری وریه یا بسط فوریه متناظر با $f(x)$ به صورت زیر است :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ضرایب a_nوb_n را از فرمول های زیر نیز میتوان به دست آورد.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

سری بالا فقط یک سری متناظر با $f(x)$ است ، نمبدانیم همگرا است یا خیر.

قضیه (شرایط دیریکله) : فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $(-l,l)$ تعریف شده است.

$f(x)$و $f'(x)$ در $(-l,l)$ به طور قطعه ای پیوسته باشند ، آنگاه سری بالا به سمت

الف)$f(x)$ هم گرا است اگر X یک نقطه هم گرایی باشد.

ب)$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ هم گراست ، اگر X یک نقطه نا پیوستگی باشد.

بنابراین در هر نقطه پیوستگی X ، میتوان نوشت :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

شرایط اعمال شده در قضیه بالا ، شرایط کافی هستند ولی لازم نیستند .یعنی اگر شرایط برقرار باشند هم گرایی تضمین می شوند و اگر شرایط برقرار نباشد ممکن است سری هم گرا یا واگرا باشد .یعنی هم گرایی سری فوریه در صورت پیوستگی $f(x)$ تضمین میشود .

مثال) دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin x|$ را به دست آورید ؟

$$f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

مثال)تابع $f(x)$ به فرم زیر است . مقدار این تابع را در $x = \frac{l}{2}$به دست آورید ؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > \frac{l}{2} \\ 1 & x < \frac{l}{2} \end{cases}$$

با توجه به شرایط دیریکله در نقاط ناپیوستگی داریم :

$$f\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$$

مثال : هرگاه سری فوریه مثلثاتی به صورت زیر باشد ، آنگاه برای $f(x)=(\sin x+\cos 2x)^2$ مقدار b_3 را به دست آورید ؟

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad y=f(x),-\pi<x<\pi\ ,T=2\pi$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\cdots+b_1\sin x+\cdots+b_3\sin 3x$$

$$f(x)=sin^2x+cos^2 2x+2\sin x\cos 2x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}$$
$$+\sin 3x-\sin x=>b_3=1$$

مثال : بسط فوریه تابع دلتای دیراک را به دست آورید ؟

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)dt=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\sin nt\,dt=0$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum\cos nt$$

مثال :سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=sin^2t+\cos 2t$ را با تناوب 2π را به دست آورید ؟

$$f(t)=\frac{1}{2}\ (1-\cos 2t)\cos 2t=\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}cos^2t=\frac{1}{2}\cos 2t\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 4t$$

مثال :سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با یک دوره تناوب $2l$ را به دست آورید؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & \frac{l}{2}\le x<\frac{3l}{2}\\ 0 & 0\le x<\frac{l}{2} \text{ یا } \frac{3l}{2}<x<2l\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{2\frac{l}{2}}dx=1$$

$$b_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\times\frac{-l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right]=0$$

n فرد هردو cos صفر

N زوج 0=1+1-یا 1-1=0

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}=\frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & \text{زوج}\, n=2k\\ \frac{2(-1)^k}{(2k-1)^{\pi}} & \text{فرد}\, n=2k-1\end{cases}$$

سری فوریه و توابع زوج و فرد

تابع زوج $\forall x\epsilon\, Df\ ,f(-x)=f(x)$

تابع فرد $\forall x\epsilon\, Df\ ,f(-x)=-f(x)$

$Sin\ x$تابعی فرد و $cos\ x$ تابعی زوج است.

$$f(x)_{\text{زوج}}=>\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_0^{l}f(x)dx$$

$$f(x)_{\text{فرد}}=>\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج یا فرد باشد ،در تعیین ضرایب فوریه میتوان از محاسبات غیر ضروری اجتناب کرد.

قضیه : سری فوریه تابع زوج $f(x)$ با دوره تناوب $2l$ تنها یک سری فوریه کسینوسی است .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_c^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

قضیه : سری فوریه تابع فرد $f(x)$ با دوره تناوب $2l$ تنها یک سری فوریه سینوسی است .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

مثال : سری فوریه تابع زیر را بنویسید ؟

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\mathrm{t} & \frac{-\pi}{2} < \mathrm{t} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi(\pi - t)}{4} & \frac{\pi}{2} < \mathrm{t} < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$\pi - t$	$Sin\, nt$
-1	$\frac{-1}{n}\cos nt$
0	$\frac{-1}{n^2}\sin\ nt$

	t	$Sin\, nt$
+		
-	1	$\frac{-1}{n}\cos nt$
+	0	$\frac{-1}{n^2}\sin\ nt$

$$a_0 = 0\ , \qquad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi t}{4}\sin nt\ dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi(\pi - t)}{4}\sin t\ dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin nt\ dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\sin t\ dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left[\frac{-1}{n}t\cos nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n^2}\sin nt\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n}(\pi-t)\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{n^2}\sin nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{n}\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\times\frac{-\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}=$$

$$\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ \frac{(-1)^{k+1}}{n^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$f(t)=\sum\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\big((2k-1)t\big)$$

مثال :اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد .آن گاه سرس فوریه تابع $f(t)$ را به دست آورید ؟

$$f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ 2-t & 1\le t<2\end{cases}$$

	t	$\cos n\pi t$
+		
-	1	$\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t$
+	0	$\frac{-1}{(n\pi)^2}\cos nt$

$$a_0=2\int_0^1 t\,dt=1\ ,\qquad b_n=0$$

$$a_n=2\int_0^1 t\cos n\pi t\,dt=2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t+\frac{1}{(n\pi)^2}\right]=\frac{2(\cos n\pi-1)}{(n\pi)^2}=$$

$$\begin{cases}0 & n\text{زوج}\\ \frac{-4}{(n\pi)^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\big((2k-1)\pi t\big)$$

تمرین : تمرین های شماره ۱

مثال: تابع $f(x)=\cos\alpha x$ $-\pi<x<\pi$, با α عدد ثابت نادرست مفروض است .سری فوریه این تابع را به دست آورید ؟

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha x \quad dx = \frac{2\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \quad , \qquad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \quad dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x]\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\quad \frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\Bigg]_0^{\pi} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}\Bigg]_0^{\pi}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}\sin(\alpha+n)\pi + \frac{1}{\alpha-n}\sin(\alpha-n)\pi\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}(\sin\alpha\pi\cos n\pi + \cos\alpha\pi\sin n\pi) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{\alpha-n}(\sin\alpha\pi\cos n\pi - \sin n\pi\cos\alpha\pi)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha\sin\alpha\pi\cos n\pi - n\sin\alpha\pi\cos n\pi + \alpha\sin\alpha\pi\cos n\pi + n\sin\alpha\pi\cos n\pi}{\alpha^2-n^2}\right] =$$

$$\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cdot\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)} & n\ \text{زوج} \\ \dfrac{-2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)} & n\ \text{فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}(-1)^n\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos nx$$

تمرین : تمرین شماره ۲

به دست آوردن مقادیر برخی از سری ها به کمک تبدیل و سری فوریه

مثال : حاصل سری فوریه $\sum_{k=1} \frac{1}{(2k-1)^2}$ را به کمک بسط فوریه تابع متناوب f(x)=(x) در فاصله (-1,1) بیابید ؟

	x	$\cos n\pi x$
+		
-	1	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
+	0	$\frac{-1}{(n\pi)^2}\cos\ n\pi x$

$$a_0 = 2\int_0^1 t\ dt = 1\ ,\qquad b_n = 0$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\ dx = 2\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big]_0^1 + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big]_0^1\right] =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{زوج}\quad n \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & \text{فرد}\quad n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\frac{n\pi}{l}\ x\ dx + \sum b_n \sin\frac{n\pi}{l}\ x\ dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$$

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k-1)^2} \ => \sum\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال : اگر $\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} sin^2x\,dx = 2+\sum_{n=2}\frac{(1+\cos nx)^2}{(n^2-1)^2}$ آن گاه مقدار عبارت $\frac{1}{1^2 3^2}+\frac{1}{3^2 5^2}+\cdots$ را به دست آورید ؟

به ازای $x=0$ ، طرف دوم رابطه به صورت زیر است :

$$2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos nx)^2}{(n^2-1)^2} = 2+4(\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\cdots)$$

از طرفی داریم :

$$\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{+\pi} sin^2x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} sin^2x\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{+\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2+4\left(\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\cdots\right) => \left(\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\cdots\right) = \frac{\pi^2-8}{16}$$

بسط نیم دامنه

به دست آوردن سری فوریه در وابعی که فاصله متناهی تعریف شده اند.

مثلا تابع $f(x)$ بر فاصله ای مانند $0 \le x \le l$ تعریف شده است و میخواهیم روی همین فاصله $f(x)$ را با یک سری فوریه نمایش دهیم.

این تابع به علت متناوب نبودن دارای بسط فوریه نیست اما می توان توابع زوج یا فردی را چنان تعریف نمود که سری فوریه آن ها در فاصله $0 \le x \le l$ بر *تابع* $f(x)$ منطبق باشد ،مثلا تابع $f_1(x)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$f_1(\mathrm{x}) = \begin{cases} f(\mathrm{x}) & 0 \le x \le l \\ \mathrm{g}(\mathrm{x}) & -l \le x \le 0 \end{cases} \qquad\qquad f_1(\mathrm{x}+2l) = f_1(\mathrm{x})$$

$\mathrm{g}(\mathrm{x})$ هر تابع دلخواهی میتواند باشد.اما سری های فوریه متناظر از گسترش زوج و فرد $f(x)$ کاربردی ترند.

در گسترش زوج قرار می دهیم:$g(x) = f(-x)$ و داریم :

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_c^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2,3,\dots$$

در گسترش فرد قرار می دهیم:$g(x) = -f(-x)$ و داریم :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2,3,\dots$$

مثال:بسط نیم دامنه ی کسینوس فوریه تابع$0 < t < 2$, $f(t) = 1 - \frac{t}{2}$ را به دست آورید؟

+	$1 - \frac{t}{2}$	$\cos\frac{n\pi t}{2}$
-	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}$
+	0	$(\frac{2}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi t}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right)dt = t - \frac{t^2}{4} = 1$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt = \int_0^2 (1 - \frac{t}{2})\cos\frac{n\pi t}{2}dt =$$

$$\left(1 - \frac{t}{2}\right)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\Big]_0^2 - \frac{1}{2}(\frac{2}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi t}{2}\Big]_0^2 = (\frac{2}{n\pi})^2[(-1)^n - 1]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج}\ n = 2k \\ \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} & \text{فرد}\ n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right)$$

انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

قضیه :اگر سری فوریه تابع پیوسته قطعه ای $f(x)$ در فاصله تناوب $-l < x > l$ به صورت زیر بیان شده باشد :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

آن گاه :

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi}(a_n \sin\frac{n\pi x}{l} - b_n \cos\frac{n\pi x}{l}) + C$$

مثال:اگر بسط فوریه $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$ به صورت $f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots)$ باشد ، آن گاه بسط فوریه تابع $-\pi < x < \pi \quad , \quad f(x) = |x|$ را به دست آورید ؟

$$|x| = \frac{-4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + C$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

مثال : اگر سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$. $f(x) = \frac{x}{2}$ به صورت زیر باشد ، بسط فوریه تابع

$$f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \qquad , \; T = 2\pi$$

آن گاه سری فوریه تابع $T = 2\pi$, $-\pi < x < \pi$. $g(x) = x^2$ را به دست آورید ؟

$$\frac{x^2}{4} = -\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \cdots + C \qquad C = \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{12}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi^2}{12}$$

$$x^2 = \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \cdots\right) + \frac{\pi^2}{3}$$

تساوی پارسوال

اگر تابع $f(x)$ در فاصله متناوب $[-l.l]$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند و داریم :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2$$ یا

$$\frac{1}{T}\int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2$$

مثال :اگر بسط $f(x) = \sin x \quad , \quad 0 < x < \pi$ به صورت زیر باشد .

$$\mathrm{f(x)} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

مقدار سری $\cdots + \frac{1}{3^2\times 5^2} + \frac{1}{1^2\times 3^2}$ را محاسبه کنید ؟(n عددی زوج است .)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k)^2-1}\right)\cos 2kx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi^2\,(4k^2-1)^2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2(x)dx = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2} = \frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{16}{4\pi^2} + \frac{1}{2}\sum \frac{16}{\pi^2\,(2k\quad -1)^2(2k\quad +1)^2}$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\times\frac{2}{(2k\quad -1)(2k\quad -1)} = \frac{-4}{\pi(2k\quad -1)(2k\quad -1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k\quad -1)^2(2k\quad +1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2\times 3^2} + \frac{1}{3^2\times 5^2} + \cdots\right)$$

$$\left(\frac{1}{1^2\times 3^2} + \frac{1}{3^2\times 5^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2-8}{16}$$

صورت مختلط سر فوریه ،ضرایب فوریه مختلط

با استفاده از فرمول اویلر $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

سری فوریه $f(x)$ را به صورت زیر می توان نوشت :

مختلط سری فوریه

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

ضرایب مختلط فوریه

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{l}}\, dx$$

فرض بر آن است که شرایط دیریکله برقرارند و $f(x)$ در x پیوسته است . هرگاه $f(x)$ و x پیوسته نباشند ، طرف چپ رابطه را با $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ جایگزین می کنیم .

انتگرال فوریه

*در قسمت قبل سری فوریه برای توابع متناوب معرفی شد ، ولی برای بسیاری از مسایل عملی شامل توابعی هستند که متناوب نیستند.

*می توان روش فوریه را تعمیم داد تا توبع غیر متناوب را نیز شامل شود.

*تابع نا متناوب $y = f(x)$ تعریف شده برای اعداد حقیقی ، سری فوریه ندارند ولی اگر تابع متناوب $f_l(x)$ با دوره تناوب 2l را بررسی کرده و l را به سمت ∞ میل کرده اگرچه تابع $f(x)$ حاصل متناوب نیست ولی آن را به صورت حد سری فوریه یک تابع دیگر نمایش داده ایم.

قضیه (انتگرال فوریه)

فرض کنید تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی پیوسته قطعه ای و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ موجود باشد. آن گاه تابع $f(x)$ را در هر نقطه پیوستگی میتوان با انتگرال فوریه زیر نمایش داد و در نقاط ناپیوستگی ، مقدار انتگرال فوریه برابر با میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه است.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(w)\cos wx+\ B(w)\sin wx]\,dw$$

$$A(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(wt)\ \ dt\qquad,\qquad B(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(wt)\ \ dt$$

❋اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد ،انتگرال فوریه آن کسینوسی است و $B(w)=0$ است و داریم :

$$A(w)=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(wt)\,dt\qquad,\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(w)\cos wx]\ \ dw$$

❋اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد ،انتگرال فوریه آن سینوسی است و $A(w)=0$ است و داریم :

$$B(w)=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin(wt)\,dt\qquad,\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[B(w)\sin wx]\ \ dw$$

انتگرال های موسوم به لاپلاس

رابطه اول $\qquad(x>0\,,k>0)\qquad \displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2k}\ e^{-kx}$

رابطه دوم $\qquad(x>0\,,k>0)\qquad \displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{w}\sin(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2}\ e^{-kx}$

اثبات رابطه اول:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{1}{2}\ Re\left[2\pi i\sum_{y>0}\frac{e^{ixz}}{k^2+z^2}\right]=Re\left[\frac{\pi i e^{-xk}}{2ik}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2k}\ e^{-kx}$$

مثال : انتگرال فوریه تابع زیر را حساب کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(wt)\,dt \;=\; \int_{0}^{1} (1+\cos wt\,)\;dt = \frac{2}{w}\sin w$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\frac{2}{w}\,\sin w \cos wx\right] dw$$

مثال : انتگرال فوریه تابع زیر را حساب کنید؟

$$f(x) = e^{-x} \quad , \qquad x > 0 \;\; , \qquad f(x) = f(-x)$$

با توجه به این که تابع زوج است و با توجه به فرمول لاپلاس داریم :

$$A(w) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cos(wt)\,dt$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}\,e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{1+w^2}\,dw$$

تمرین : تمرین شماره ۳

مثال :اگر $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [a(w)\cos wx]\,dw$ باشد ، آن گاه $A(w)$ در نمایش $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(w)\sin wx]\,dw$ را محاسبه کنید ؟

$$a(w) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(wt)\,dt$$

$$\frac{d\,a(w)}{d\,w} = 2\int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\sin(wt)\,dt$$

چون $f(x)$ زوج است ، پس $x\,f(x)$ تابعی فرد است ، یعنی $B(w) = A(w)$ و داریم :

$$x\,f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [\,B(w)\sin wx]\,dw$$

$$B(w) = 2\int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\sin(wt)\, dt \quad => \quad A(w) = -\frac{d\, a(w)}{d\, w}$$

صورت مختلط انتگرال فوریه ، تبدیل فوریه

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)}\, dt]dw$$

رابطه بالا را شکل مختلط انتگرال فوریه می نامیم و آن را به صورت زیر می توانیم بنویسیم :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwx}\ \ dw$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-iwt}\ \ dt$$

$F(w)$ را تبدیل فوریه تابع $f(x)$ و $f(x)$ را تبدیل فوریه معکوس $F(w)$ می نامیم .

با توجه به انتگرال های فوریه کسینوسی و سینوسی ، تبدیل فوریه کسینوسی $f(x)$ با نماد $c(w)$ و تبدیل فوریه سینوسی با نماد $s(w)$ به صورت زیر هستند :

$$c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\, dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} c(w)\cos wx\, dw$$

$$s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin wt\, dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} s(w)\sin wx\, dw$$

مثال : انتگرال فوریه به صورت مختلط تابع زیر را محاسبه کنید ؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\ \ dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{-1}{iw}=$$

$$\frac{-e^{-iw\pi}+e^{+iw\pi}}{\sqrt{2\pi}\,iw}=\frac{2\sin w\pi}{\sqrt{2\pi}\,w}$$

مثال :اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{t}{t^2+a^2}$ به صورت زیر باشد ، مقدار آن را حساب کنید ؟

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-iwt}\ \ dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+a^2}(\cos wt-i\,\sin wt)\ \ dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+a^2}(-i\sin wt)\qquad w>0$$

$$-2i\int_{0}^{\infty}\frac{t}{t^2+a^2}\sin wt\,dt=-2i\ \times\frac{\pi}{2}\ e^{-aw}=\ -\pi i\ \ e^{-aw}$$

مثال : تابع $f(x)$ در رابطه زیر صدق می کند. $f(x)$ را تعیین کنید ؟

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\propto x\,dx=\begin{cases}1-\propto & 0\le\propto\le 1\\ 0 & \propto>1\end{cases}$$

$$A(x)=1-\propto\qquad 0<\propto\le 1$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}(1-\propto)\cos\propto x\ \ dx=\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال : اگر $f(t)=-\sin t$ و $g(t)=\cos(\frac{t}{2})$ باشند ، تبدیل فوریه $g(t)$ ، $G(w)$ را بر حسب $f(w)$ به دست آورید ؟

۱) مشتق گیری در حیطه ی فوریه معادل ضرب iw در $f(w)$است.

۲) شیفت در حیطه زمان معادل ضرب تبدیل فوریه در e^{iw} است.

۳) انبساط و انقباط درحیطه زمان معادل انبساط و انقباظ در حیطه فوریه است که ضریب مربوطه را نیز باید لحاظ کرد.

$$1 => G(w) = iw\, f(w)e^{-iw\pi}$$

$$2 => G(w) = 2iwf(2w)e^{-iw\pi}$$

$$2\left(2iwf(2w)e^{-iw\pi}\right) = 4wif(2w)e^{-iw\pi}$$

$$G(w) = \int_0^{4\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-iw\pi}\ dt$$

$$G(w) : t = 2T + 2\pi => dt = 2dT$$

$$t = 0 => 2T + 2\pi = 0\ \ => T = -\pi$$

$$t = 4\pi => 2T + 2\pi = 4\pi\ \ => T = \pi$$

$$G(w) = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(T+\pi)e^{-iw2\pi} \cdot e^{-iw2T}\ dt$$

$$G(w) = 2e^{-iw2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+\pi)\ e^{-iw2T}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+\pi)\ e^{-iw2T}\ \ dT =$$

$$e^{-iw2T}\sin(T+\pi)\Big]\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(T+\pi)\ \times(-2wi)e^{-iw2T}\ dT$$

$$= 2iw\int -\sin T\ \times e^{-iw2T}\ dT = 2iw\ f(2w) => 4iwe^{-iw2\pi}f(2w)$$

تمرین فصل پنجم

۱- سری فوریه تابع زیر را بیابید ؟

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

۲- سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = |\sin x| \quad , 0 < x < 2\pi$ را بیابید ؟

۳- انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورید ؟

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

۴- مقدار عددی انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{sin^2 x}{2}\, dx$ را به دست آورید ؟

فصل ششم

معادلات با مشتق جزیی

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی با استفاده از روش ضربی یا جداسازی متغییر ها

می خواهیم معادله موج یک بعدی(۱) با رابطه کرانه های (مرزی) و اولیه زیر را حل کنیم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \ \frac{\partial u}{\partial x^2} \qquad u \neq 0 \qquad (1)$$ معادله ی موج

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t > 0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (3)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (4)$$

*سوال ما پیدا کردن جوابی از معادله ی موج است که در شرایط مرزی صدق کند.

برای این منظور ۳ مرحله ی زیر را انجام می دهیم :

۱) با به کار بردن روش جدا کردن مغییرها ، دو معادله ی دیفرانسیل معمولی ایجاد می شود.

۲) جواب هایی از دو معادله را که در شرایط کرانه های (۲) صدق می کند را معین می کنیم.

۳) جواب ها را طوری ترکیب می کنیم که عبارت حاصل ، جواب معادله (۱) باشد و در شرایط (۳) و (۴) صدق کند.

مرحله ی اول)

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F(x)G''(t) = c^2 \ F''(x)G(t)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2\, G(t)} \qquad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2\, G(t)} = \ k$$

$$F''(x) - kF(x) = 0 \quad , \quad G''(t) - c^2\, G(t) = 0$$

مرحله ی دوم) حال جواب های Fو G را طوری تعیین می کنیم که $u(x,t) = F(x)G(t)$ در رابطه دوم (۲) صدق کند.

$F''(x) - kF(x) = 0$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

اگر $G = 0$ نتیجه می دهد $u \equiv 0$که جواب ما نیست و $G \neq 0$ است و $F(0) = F(l) = 0$

اگر در$F'' - KF = 0$ ، $K = 0$باشد آن گاه $F(x) = ax + b$ و داریم که مورد نظر نیست

$F(0) = b = 0$

$F(l) = al = 0 \;\; => a = 0 \;\; => F(x) \equiv 0 \;\; => u \equiv 0$ که مورد نظر نیست

به ازای $K = \mu^2$ جواب عمومی به صورت زیر به دست می آید

$F''(x) - kF(x) = 0 \quad => \; F''(x) - \mu^2 F(x) = 0 \qquad F(x) = Ae^{st}$

$As^2e^{st} - \mu^2 Ae^{st} = 0 \qquad s^2 = \mu^2 \;\; => s = \pm\mu$

$F(x) = Ae^{\mu t} + Be^{-\mu t}$

$F(0) = A + B = 0 \;\; => A = -B \;\; => \;\; F(x) = Ae^{\mu t} - Ae^{-\mu t}$

$F(l) = A(e^{\mu t} - e^{-\mu t}) = 0 \;\; => e^{\mu t} = e^{-\mu t} \;\; => \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ \mu = 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$=> A = 0 \;\; F(x) = 0 \;\; => u = 0$ خلاف فرض

$k = -\mu^2$ یعنی عددی منفی است :

$F''(x) + \mu^2 F(x) = 0 \quad , \quad s^2 + \mu^2 = 0 \quad , \quad s = \pm i\mu$

$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x \quad F(0) = A = 0 => F(x) = B\sin\mu x$

$F(l) = B\sin\mu l = 0 \begin{cases} B = 0 \\ \sin\mu l = 0 \end{cases} => B = 0, F(x) = 0 \;\; , \;\; u = 0$ خلاف فرض

$if \;\; B = 1 => \;\sin\mu l = 0 \;,\; \mu l = n\pi \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$

$\mu = \frac{n\pi}{l} \quad , \quad k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad , \quad F(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x$

$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G(t) = 0 \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}c$

$G''(t) + \lambda^2{}_n\, G(t) = 0 \quad , \quad s^2 + \lambda^2{}_n = 0 \quad , \quad s = \pm i\,\lambda_n$

$G(t) = A' \sin \lambda_n t + B' \sin \lambda_n t$

مرحله سوم : با توجه به این معادله (۱) خطی همگن است ، پس مجموع جواب ها نیز جواب است.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B^*{}_n \sin \lambda_n t +) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = F(x)$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \ dx \qquad n = 1,2,3,\dots$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B^*{}_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x)$$

$$B^*{}_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \ dx \qquad n = 1,2,3,\dots$$

مثال : جواب سوال زیر را به دست آورید ؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & ; & 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & ; & u_t(x,0) = 2 \sin x \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\ u(t,0) = 0 & ; & u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad c = 1 \quad , \quad l = \pi \quad , \quad f(x) = 0 \quad , \quad g(x) = 2 \sin x$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0 \times \sin \frac{n\pi}{\pi} x \, dx = 0$$

$$B^*{}_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin x \sin \frac{n\pi}{\pi} x \, dx = \frac{2n\pi}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(1-n)x - \cos(1+n)x) \, dx$$

$$=> \begin{cases} n = 1 \\ n \neq 1 \end{cases}$$

$$if \quad n \neq 1 => \frac{2}{n\pi} \frac{\sin(1-n)x}{1-n} \Big]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \frac{\sin(1+n)x}{1+n} \Big]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n\pi}(\sin(1-n)\pi - \sin(1+n)\pi = 0 \;=>\; \begin{cases} 2 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$if \quad n=1 => \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\,sin^2\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}(x-\frac{\sin 2x}{2})\Big]_0^{\pi} => \frac{2}{\pi}(\pi - \sin\frac{2\pi}{2}) = 2$$

تمرین : تمرین شماره ۱

مثال : جواب معادله ی $u_x + u_y = 2(x+y)U$ را به دست آورید؟

$$U(x,y) = F(x)G(y)$$

$$F'(x)G(y) + F(x)G'(y) = 2(x+y)F(x)G(y)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{G'(y)}{G(y)} = 2x+2y \quad => \frac{F'(x)}{F(x)} - 2x = 2y - \frac{G'(y)}{G(y)} = C$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = C + 2x \;=> Ln\,F(x) = Cx + x^2 + c_1 \;=>\; F(x) = c_2 e^{cx+x^2}$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = 2y - C \;=> Ln\,G(y) = y^2 - Cy + c_3 \;=>\; G(y) = c_4 e^{y^2-cy}$$

$$U(x,y) = F(x)G(y) => c_2c_4e^{cx+x^2+y^2-cy} = ke^{x^2+y^2+c(x-y)}$$

تمرین : تمرین شماره ۲

مثال : معادله ی $u_{xx} = u_{tt}$ با تغییر متغیر $r = x + t$ و $s = x - t$ به چه صورتی می شود؟

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 1 \quad , \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = 1$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial t} = u_r - u_s$$

$$u_{tt} = \frac{\partial(u_r - u_s)}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(u_r-u_s)}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial t} = u_{rr} - u_{sr} + u_{ss}$$

$$u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} \; = u_{tt}$$

$$u_{xx} = u_{rr} + 2u_{sr} + u_{ss} => \; u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} - u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} = 0$$

$$-4u_{sr} = 0 \;=>\; u_{sr} = 0$$

تمرین : تمرین شماره ۳

تمرین فصل ششم

۱- جواب سوال زیر را به دست آورید ؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 \quad ; \quad u_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\ u(t,0) = 0 \quad ; \quad u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

۳-جواب معادله ی $xu_x = yu_y$ را به دست آورید ؟

۲-معادله با مشتق جزیی $u_{xx} = 4u_{yy}$ بعد از تغییر متغیر $u = y + 2x$ و $z = y - 2x$ به چه صورتی می شود ؟