نکات کنکوری ضرب خارجی یا برداری دو بردار

دو بردار $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ را در نظر بگیرید. ضرب خارجی این دو بردار که حاصل آن یک بردار است به صورت زیر . از بسط یک دترمینان تعریف می شود:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نکات

۱-ضرب خارجی دو بردار خاصیت جا به جایی ندارد، ولی، داریم

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

۲-طول بردار حاصل از $\vec{A} \times \vec{B}$برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که می توان بر روی دو بردار $\vec{A}$و$\vec{B}$ساخت و به تعبیری داریم:

$$S = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$ مساحت متوازی الاضلاع

۳- راستای بردار حاصل از $\vec{A} \times \vec{B}$بر هر دو بردار $\vec{A}$و$\vec{B}$عمود است و به تعبیری از ضرب خارجی دو بردار ،برداری حاصل می شود که بر صفحه گذرنده از دو بردار مذکور عمود است.

۴-شرط توازی دو بردار $\vec{A}$و$\vec{B}$ آن است که ضرب خارجی آنها صفر شود، یعنی داشته باشم:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

۵-

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

۶-ضرب خارجی سه بردار $\vec{A}, \vec{B}$و$\vec{C}$ که حاصل آن یک بردار است به صورت زیر قابل بیان است:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

مثال

مساحت متوازی الضلاعی که دو ضلع مجاور آن بردارهای $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$و$\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ می باشد، کدام است؟

$5\sqrt{6}$(1 $6\sqrt{5}$ (2 $4\sqrt{5}$ (3 $5\sqrt{4}$ (4

حل:

طبق نکته گفته شده در درس داریم:

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| \rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-3-2) - j(-1+6) + k(-1-9) = -5i - 5j - 10k$$

و داریم:

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25(1+1+4)} = 5\sqrt{6}$$