استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

می گوییم ، بردارهای $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\dots\dots\vec{V_n}$ وابستگی خطی دارند، هر گاه بتوانیم اعداد ثابتی ، مانند، $\varphi_1,\varphi_2,\dots.,\varphi_n$(که تواما صفر نمی باشند) پیدا کنیم به طوری که:

$$\varphi_1\vec{v}_1+\varphi_2\vec{v}_2+\cdots+\varphi_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

و در غیر این صورت بردارهای مذکور را مستقل خطی می نامند.

نکات

۱-دو بردار $\vec{v}_1$و$\vec{v}_2$ وابستگی خطی دارند ،اگر و فقط اگر ، یکی از آنها مضرب دیگری باشد(به تعبیری دو بردار مذکور موازی باشند)

۲-سه بردار زیر را که در فضا تعریف شده اند ، در نظر بگیرید:

$$\vec{v}_1=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}\qquad\vec{v}_2=b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}\qquad\vec{v}_3=c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k}$$

شرط لازم و کافی برای آنکه سه بردار مذکور وابستگی خطی داشته باشند، آن است که در یک صفحه واقع باشند(به تعبیری ضرب مخلوط آنها صفر شود)

۳- در فضا هر چهار بردار دلخواهی ، وابستگی خطی دارند.

مثال

سه بردار $(3-m,3,m+2)$, $(2-m,1,2)$ و $(1,2,m)$ به ازاء چه مقدار m در یک صفحه واقعند(وابستگی خطی دارند)؟

1) $m=1$ 2) $m=\pm 2$ 3) هر مقدار m 4) هیچ مقدار m

جواب:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2-m & 1 & 2 \\ 3-m & 3 & m+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\to 1(m+2-6) - 2(4-m^2-6+2m) + m(6-3m-3+m) = 0$$

$$\to m-4-2(-m^2+2m-2) + m(-2m+3) = 0$$

$$\to m-4+2m^2-4m+4-2m^2+3m=0 \to \quad 0=0$$

معادله مبهم است، یعنی، به ازای همه مقادیر m دترمینان صفر بوده، سه بردار وابسته خطی اند.