* در سیگنال هرجا گفته شد دامنه منظور همان مقدار سیگنال است

Subject:---------------- Date:--/--/--

سیگنال دو حالت دارد که به دو دسته تقسیم میشوند:

① زمان پیوسته ② زمان گسسته

↓ C.T ↓ D.T

زمان پیوسته	زمان گسسته
C.T = Continue Time	Discrete time
تمام اعداد حقیقی ⇐ تعریف در همه زمان ها را دارد	فقط تعداد صحیح را به خود میگیرد
$x(t)$	$x[n]$
$t \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Z}$

* جمع و ضرب سیگنال ها:

جمع سیگنال ها: حاصل جمع در هر لحظه ی خاص دامنه ها سیگنال ها را با هم جمع میکنیم ~~...~~

جمع میکنیم.

ضرب سیگنال ها: دامنه ها را در هر لحظه ی خاص در هم ضرب میکنیم.

انتگرال کانولوشن

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)$$

Niko

Scanned with CamScanner

مثال مهم: فرمول انتگرال کانولوشن دو سیگنال $x(-t-1)$ و $y(-3t+2)$ را بیابید.

(جواب)

$$z(t)=x(-t-1) * y(-3t+2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau-1)\, y(-3(t-\tau)+2)\, d\tau$$

محاسبه کانولوشن:

(1) روش فرمولی ← جایگذاری $x(t)$ و $y(t)$ در انتگرال تعریف کانولوشن

کاربرد: زمانی که کانولوشن از این روش‌ها سخت شود که فرمول‌ها ساده دارند مثل e^{-t} زمانی که سیگنال‌ها پیوسته است تنها این روش استفاده کنیم شکل است داشته باشد. پس در شرایط خاص استفاده شود + شکل حساب کردنش پیچیده‌تر است

(2) روش ترسیمی:

مراحل:

(1) ابتدا متغیر t به τ تغییر کند یعنی داریم $x(\tau)$ و $h(\tau)$

(2) یکی از دو سیگنال x یا h را ثابت نگه می‌داریم و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم ⇐ $x(\tau)$ و $h(-\tau)$

یا: $x(-\tau)$ و $h(\tau)$

(3) سیگنال معکوس شده را به اندازه $|t|$ به سمت راست به ازای $t>0$ و به سمت چپ به ازای $t<0$ شیفت داده سیگنال

$x(\tau)$ و $h(t-\tau)$

(۴) t را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر داده و با استفاده از انتگرال گیری از حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ به ازای τ ها t ها بدست می‌آوریم.

کاربرد این روش: در حالتهایی می‌توان استفاده کرد که تعداد کانولوشن یک یا چند نقطه خاص باشد.

(۲) روش دوم: کاربرد اساس این روش بسیار مناسب و جامع‌ترین این روش است)

* کانولوشن به روش تحلیلی

$y(t)=u(t+1)$ و $x(t)=e^{-t}u(t)$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}\, \underline{u(\tau)} \cdot u(t-\tau+1)\, d\tau$$

چون استپ‌ها براساس پارامتر تعریف شده است:

$$\underline{u(t-\tau+1)} = \begin{cases} 1 & \tau < t+1 \\ 0 & \tau > t+1 \end{cases} \qquad u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

$t-\tau+1>0 \Rightarrow \underline{t+1>\tau>0} \Rightarrow$ شرط: $(t+1)>0$

$$\Rightarrow \int_{0}^{t+1} e^{-\tau}\, d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{0}^{t+1}$$

$$\left(-e^{-(t+1)}+1\right)$$ شرط $(t+1)>0$

Niko

Scanned with CamScanner

Subject:

حل b در $(t+1)>0$ برای توان انتگرال و تنظیم

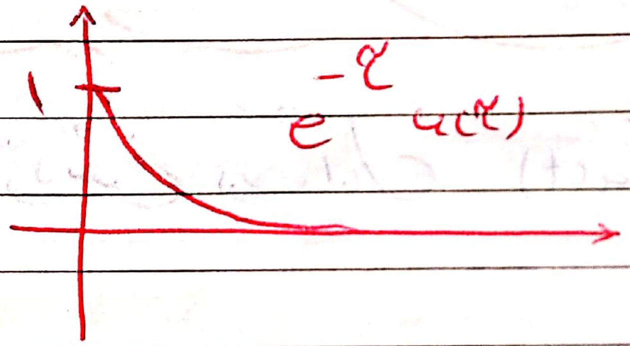
در برای $t>-1$ نقطه شروع دارد

$$\left[-e^{-(t+1)}+1\right]u(t+1) \Rightarrow$$

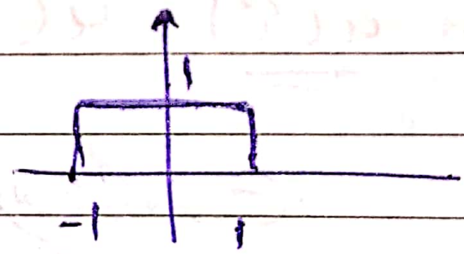
اگر $t+1>0$ نباشد انتگرال از $t+1$ نساختن نمی رسد

چون $0<\tau<t+1$ باید باشد

کانولوشن دو سیگنال $x(t)=e^{-t}u(t)$ و $y(t)=\Pi(\frac{t}{2})$ را بدست آورید.

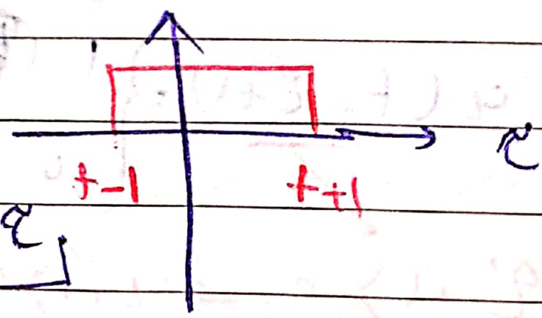


$$y(\tau)=\Pi\left(\frac{\tau}{2}\right)$$



$y(t-\tau)$

$$\cancel{y}=\Pi\left(\frac{t-\tau}{2}\right)$$

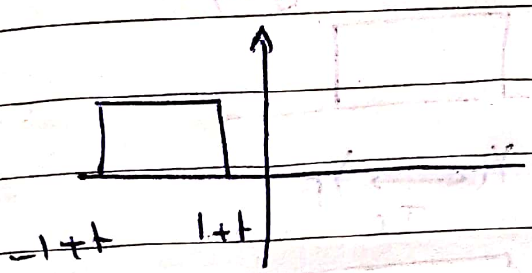


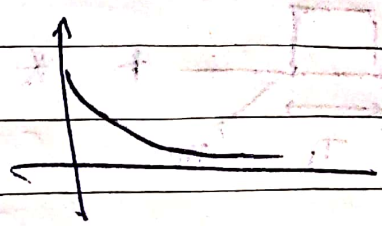
$t-\tau=1 \Rightarrow t-1=\tau$

$t-\tau=-1 \Rightarrow t+1=\tau$

if: $t<-1 \Rightarrow$ مثلاً $t=-۲$

$-1+t=-۳$ / $1+t=-1$

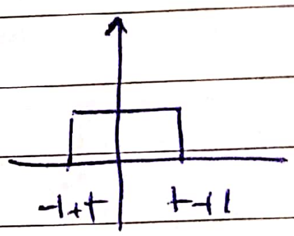


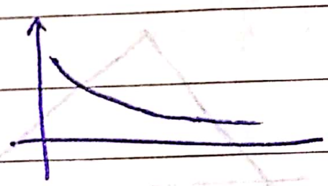


$z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau) =$ صفر

if: $-1\leq t\leq 1 \Rightarrow$ مثلاً $=$ ۰

$-1+t=$ ~~۰~~ -1 / $1+t=1$



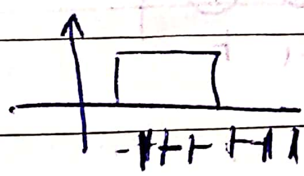


$z(t)=\int_{0}^{t+1} x(\tau)\,y(t-\tau) = \int_{0}^{t+1} e^{-\tau}\, d\tau =$

$-e^{-\tau}\Big|_{0}^{t+1} = -(e^{-(t+1)}-1)$

if: $1<t \Rightarrow$ مثلاً $t=۲$

$-1+t=1$ / $1+t=۳$

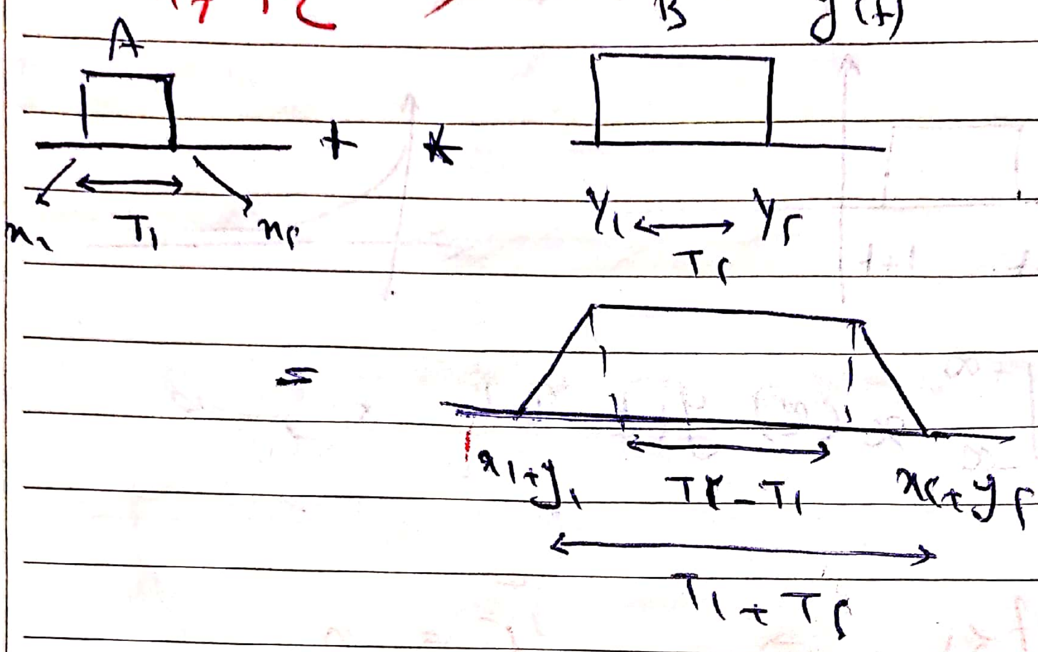


$\Rightarrow z(t)=-e^{-(1+t)}+e^{-(-1+t)}$

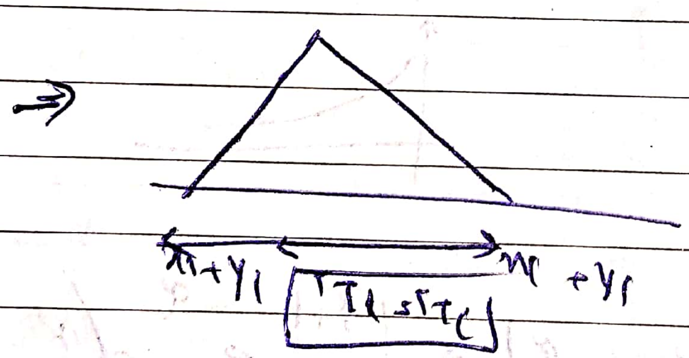
Subject:............... Date:.../.../...

نکته: اگر دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال پالسی باشند:

if: $T_1 \neq T_2$ طول متفاوت

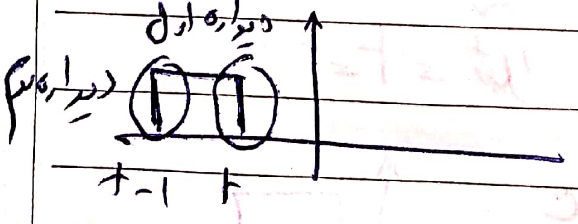


if: $T_1 = T_2$ طول برابر



نوشتن بازه های کانولوشن به روش خودم:

در ابتدا پس از آنکه نمودار $h(t-\tau)$ را بدست آوردیم کافی است دو دیواره جهت اصلاح آن را پیدا کنیم! مثلاً



Scanned with CamScanner

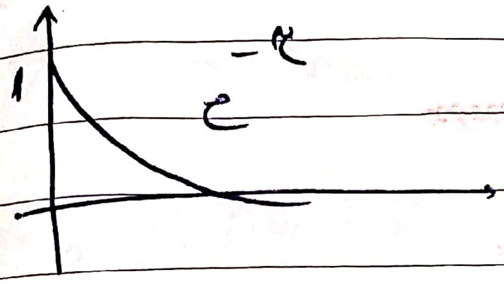
Subject:
Date:

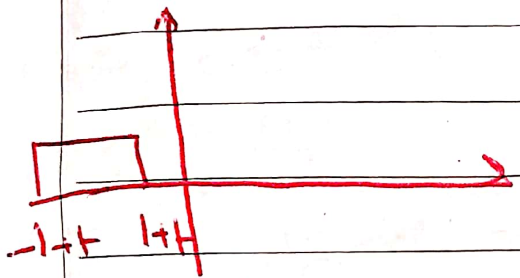
حالا کل دیواره‌ی کانل را به تساوی صفر می‌ذاریم $x(t)$ محور دو برده و سپس دیواره

عکس

هم اثر شروع کن می‌خورد

مثال:





شروع می‌خورد $\Rightarrow$ دیواره‌ی کانل $\Rightarrow 1+t=0 \Rightarrow t=-1$

$t \geq -1 \Longleftarrow$ بازه کانل

بعد از تحلیل سری $t=0$ در نمودار $x(t)$ هیچ نقطه‌ای در نمودار نشان داده نشده کار

ما با هنجار مرزی کانل تمام است!

می‌رویم سراغ دیواره‌ی بعدی!

$-1+t=0 \Rightarrow t=1$

شروع

$-K+t<1 \rightarrow 1>t$

بازه سمت

بازه

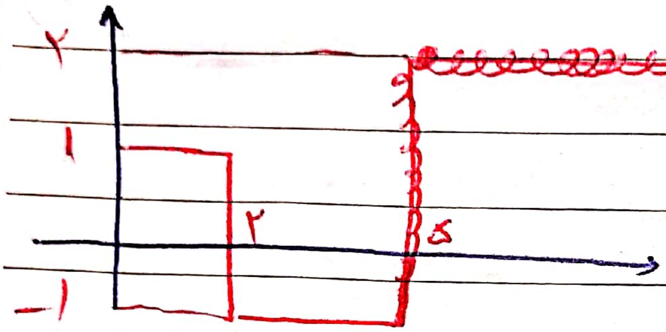
Niko

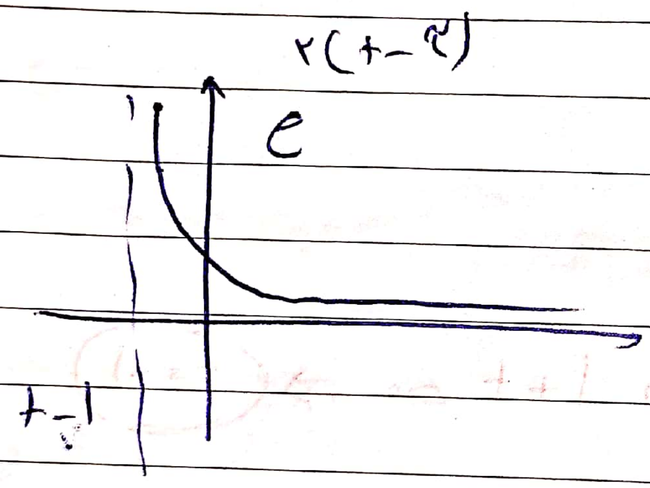
Scanned with CamScanner

محاسبه کانولوشن:

$x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$





$t<1 \Rightarrow \int_0^2 e^{2(t-\tau)} + \int_2^5 -e^{2(t-\tau)}$

$1<t<3 \quad \int_{t-1}^2 e^{2(t-\tau)} + \int_2^5 -e^{2(t-\tau)}$

$3<t<6 \Rightarrow -\int_2^5 e^{2(t-\tau)}$

$6<t \Rightarrow$ صفر

Scanned with CamScanner

Subject:............ Date:.../.../...

1

خواص کانولوشن:

(۱) $x(t) * Ay(t) = Ax(t) * y(t) = A[x(t) * y(t)]$

(۲) $x(t) * [y(t) + z(t)] = [x(t) * y(t)] + [x(t) * z(t)]$

(۳) $x(t) \, \delta(t-t_0) = x(t_0)(t-t_0)$

چون تابع در صفر مقدار دارد

$\delta(t_0) = 1$

در ما بقی مقادیر مقدار آن برابر با صفر است

مثال مهم:

$x(3t) * \delta(t-2) = x(3(t-2)) = x(3t-6)$

(۴) if: $x(t) * y(t) = z(t) \Rightarrow x(at+t_1) * y(at+t_2)$

$= \frac{1}{|a|} z(at+t_1+t_2)$

(برای تشکیل تست تقاضای حالت مهم است ما $a = \pm 1$ باشد)

اثبات مهم برای دوره میارم.

if: $x(t) * y(t) = z(t)$

$x(2t+1) * y(2t-3) = ?$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, y(t-\tau) \, d\tau$$

B So → Niko

Scanned with CamScanner

Subject:............ Date:.../.../...

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(2\tau+1)\, y(2(t-\tau)-3)\, d\tau$$

if: $2\tau+1 = \alpha \Rightarrow 2d\tau = d\alpha \Rightarrow \frac{\alpha-1}{2} = \tau$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, y((2t-2)-\alpha)\, d\tau \quad (A)$$

با تکیه بر B داریم

$$\frac{1}{2}\, z(2t-2)$$

محاسبه با روش تبدیل تناوب به غیر تناوب

$$z(t) = x(t) * \tilde{y}(t) = \underbrace{x(t) * \hat{y}(t)}_{} * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

غیر تناوب — تناوب

$$\hat{z}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

مشتق:

if: $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y'(t) = \frac{dx(t)}{d(t)} * h(t)$$

برای محاسبه مشتق برای y(t) ... کافی است ... استفاده کنیم !!

Niko

Scanned with CamScanner

Subject:............ Date:.../.../...

کانولوشن دو سیگنال متناوب = انتگرال کانولوشن متناوب!

* بدین معناست کانولوشن متناوب دو سیگنال متناوب $x(t)$ و $y(t)$

کافی است کانولوشن معمولی $\hat{x}(t)$ و $y(t)$ را حساب کنیم که $\hat{x}(t)$ یک دوره از $x(t)$ است و در بقیه زمان ها برابر صفر است.

* نکته: x و y هر دو متناوب است

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

کانولوشن نوع گسسته:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k]$$

روش اول اشکال محدود

(1) رسم شکل تعداد حالتی که یک یا دو حالت از زمان خاص در نظر است بیان شود.

(2) رسم شکل تداخل حالت است که شود در چند جا غیر صفر باشد (محدود باشد)

اشکال محدود یا کوتاه از اشکال محدود است.

* اگر یکی از سیگنال ها محدود باشد کم ترین روش تبدیل سیگنال محدود به حاصل جمع سیگنال های ضربه است.

Niko

سوال: اگر $y[n]=x[n]*h[n]$ باشد حاصل $x[n+2]*h[n]$ را بیابید!

میدانیم $x[n+b]*h[n+c] = y[n+b+c]$ است

پس $\Rightarrow y[n+2+0]$ خواهد شد

ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

$$h[n]=u[n+2]$$

فرض کنید $y[n]=x[n]*h[n]$ را رسم کنید.

فرض: $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

$$x_1[n-2]=x[n]$$

و $h_1[n]=u[n]$ ، $h_1[n+2]=h[n]$

$$x_1 * h_1=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[k]\,u[n-k]$$

$$y_1[n]=\sum_{k=0}^{+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \Rightarrow y_1[n] = x_1[n-2]*h_1[n+2] = y[n]$$

در سوال قبل نیز با استفاده از روش و نکته بالا، مسئله حل شد.

رابطه‌ی کلی سیستم‌های LTI به زبان ساده:

اگر پاسخ سیستم به ورودی ضربه را $h[n]$ گوییم خواهیم داشت:

$$\underbrace{y[n]}_{\text{خروجی}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{ورودی}} h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

چند نکته مهم: ① خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه بدست آید.

② هر سیستمی که رابطه بالا در آن صدق کند LTI است!

نکته: برای بدست آوردن پاسخ پله یک سیستم از روی پاسخ ضربه یا برعکس:

$$\underset{\text{ضربه}}{h[n]} \xrightarrow{\quad s[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \quad} \underset{\text{پله}}{s[n]}$$

$$\underset{\text{پله}}{s[n]} \xrightarrow{\quad h[n] = s[n] - s[n-1] \quad} \underset{\text{ضربه}}{h[n]}$$

* $s[n]$: پاسخ سیستم به ورودی $u[n]$ را گویند.

* $h[n]$: پاسخ به ورودی $\delta[n]$ را گویند.

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$h(t) = s'(t)$$

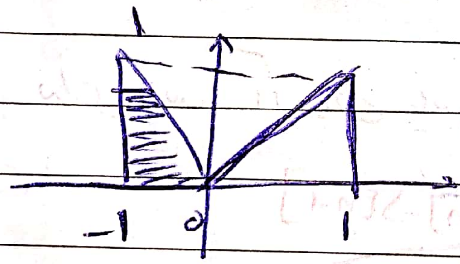
پاسخ ضربه $\longleftrightarrow$ پاسخ پله واحد

$h(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

سوال مهم:

① پاسخ ضربه یک سیستم LTI در زیر نشان داده شده است
پاسخ پله سیستم در لحظه $t=0$ به دست آورید.



در سیستم ها برای بدست آوردن پاسخ پله از پاسخ ضربه حساب می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{0} h(\tau)\, d\tau = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

② اگر پاسخ ضربه واحد یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ باشد پاسخ پله سیستم را به دست آورید.

پاسخ پله یک سیستم LTI به‌صورت $s[n] = ۲^{-n-۱}u[n+۱]$ می‌باشد. پاسخ ضربه آن در $n = ۲$ یعنی $h[۲]$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۱۶}$
۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

حل:

$$h[n]= s[n]-s[n-۱] \xrightarrow{n=۲} h[۲]= s[۲]-s[۱]= ۲^{-۲-۱}u[۲+۱]-۲^{-۱-۱}u[۱+۱]= \frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}= -\frac{۱}{۸}$$

گزینه ۲ صحیح است.

Scanned with CamScanner

$$S[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[n-k] \quad \& \quad S(t) = \int_{0}^{+\infty} h(t-\tau)\,d\tau$$

إسع
صبه

إسج
طه

$$S[n] - S[n-1] = h[n]$$

$$S'(t) = h(t)$$

Subject:

Date: ../../..

Niko

Subject:

Date: / /

$$\sum_{K=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{K} u(K) = \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{K} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

سوال هفتم :

کانولوشن زیر را بدست آوریم :

$$① \begin{cases} x[n] = a^{n} u[n] \\ h[n] = B^{n} u[n] \end{cases} , \quad a \neq B$$

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} a^{K} u[K] \, B^{n-K} u[n-K] =$$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} a^{K} B^{n-K} u[n-K] = \qquad \longrightarrow 0 \leq K$$

$$u[n-K] = \begin{cases} 1 & n \geq K \\ 0 & n \not\geq K \end{cases} \qquad \text{if: } n \geq 0 \Rightarrow$$

چون باید $n \geq K \geq 0$ ، پس $n \geq 0$ ...

$$B^{n} \sum_{K=0}^{n} \frac{a^{K}}{B^{K}} = a^{n} \times \left(1 + \dots + \frac{a^{n}}{B^{n-K}}\right)$$

Subject:............... Date: --/--/--

(۲) $x[n] = h[n] = a^n u[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] \times a^{(n-k)} u[n-k] =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k a^{(n-k)} u[n-k]$$

$$u[n-k] \begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k a^{(n-k)} \text{-----} = (n+1) a^n.$$

نکته: شرط $n \geq 0$ به این دلیل مهم است که اشتباها شروع $k=0$ باید $k \geq 0$ باشد برای $u[k]$؟

ص: پس الآن هم باید برای $n \geq k$ طوری بشه که شرط $k \geq 0$ را نیز صدق کند $\Leftarrow$ $n \geq 0$ $\Leftarrow$ $n \geq k > 0$

(۳) $x[n] = ۳^n u[-n-1]$, $h[n] = (\frac{1}{۴})^n u[n+۳]$

Niko

Subject:

Date: / /

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3^k u[-k-1] \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3]$$

$$-k-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{-1 \geq k} \quad (A)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-k} u[n-k+3]$$

$$n-k+3 \geq 0 \Rightarrow n+3 \geq k \quad (B)$$

اگر بخواهیم شرایط A و B را با هم اشتراک بگیریم:

if $n+3 \geq -1 \Rightarrow n \geq -4 \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{-1} (3)^k \times (4)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{-1} (12)^k$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[0 + \cdots + \frac{1}{12}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{12}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{11}$$

if: $n < -4$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{n+3} (12)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{(12)^n \times 12^3}{11}$$

if: $n = -4 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-k} u[-k-1]$

Niko

Scanned with CamScanner

سوال:

~~$\tau - 2 = \tau'$~~

ورودی و خروجی یک سیستم LTI با رابطه زیر بهم مرتبط شده است

$$y = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)\, d\tau$$

پاسخ ضربه $h(t)$ را بدست آورید:

We knew $\Rightarrow$ $y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau')\, x(\tau')\, d\tau'$

$$\Rightarrow \tau - 2 = \tau' \Rightarrow \tau = 2 + \tau' \Rightarrow d\tau = d\tau'$$

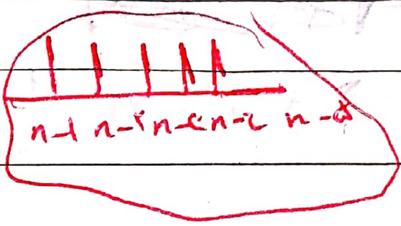
$$\Rightarrow y = \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-2-\tau')}\, x(\tau')\, d\tau'$$

$$h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$$

تکنیک خوب برای حل کانولوشن گسسته در سوالات

نکات:

① شکلی که طول (n) آن کمتر است را به صورت زیر در می‌آوریم:



برای مثال

② شکل دیگر را بدون اینکه به آن دست بزنیم تغییر نمی‌دهیم نگه می‌داریم

Niko

Scanned with CamScanner

۳) شکل اولیه را شبیه داریم وقت می‌دهیم و سه نوع وقت داریم

۱) وارد شدن به شکل (۲) / ۲) قرار گرفتن درون شکل دوم

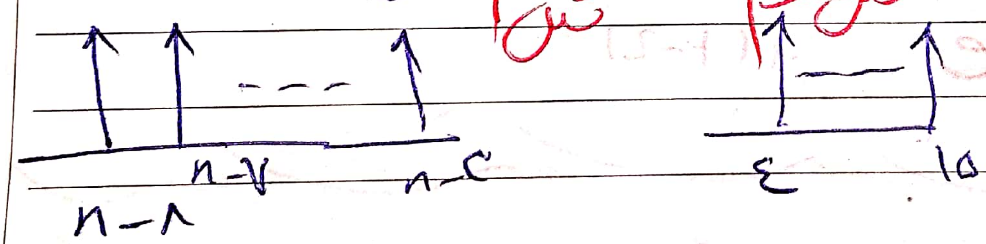
۳) بیرون رفتن از آن.

مثال:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 3 \le n \le 8 \\ 0 & etc \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 4 \le n \le 15 \\ 0 & etc \end{cases}$$

طول اولی کمتر است پس داریم:



چون طول اولی کمتر است شکل اول را حرکت می‌دهیم

حرکت: ۱) وارد شدن ⇐

$$\begin{cases} n-3=4 \Rightarrow n=7 \\ n-8=4 \Rightarrow n=12 \end{cases}$$

$$7 \le n \le 11 \Rightarrow \sum_{4}^{n-3} 1 =$$

$$n-3-4+1 = n-6$$

Subject:

Date:

(۲) کاملاً شده
شکل شروع را رسید ⇒ $n-8=4 \Rightarrow n=12$

$n-3=15 \Rightarrow n=18$

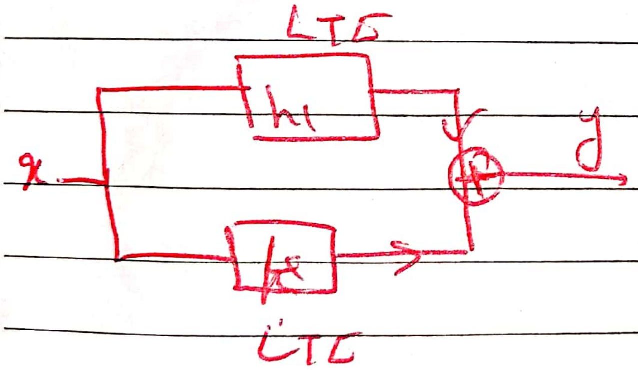
$12<n<18 \Rightarrow \sum_{n-8}^{n-3} 1 = 6$

(۳) بیرون شدن ⇒ $n-8=15 \Rightarrow n=23$

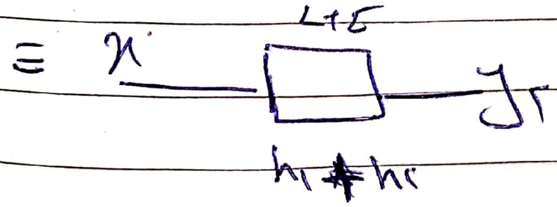
$n-3=15 \Rightarrow n=18$

$19<n<23 \Rightarrow \sum_{n-8}^{15} 1 = 15-n+8+1 = 24-n$

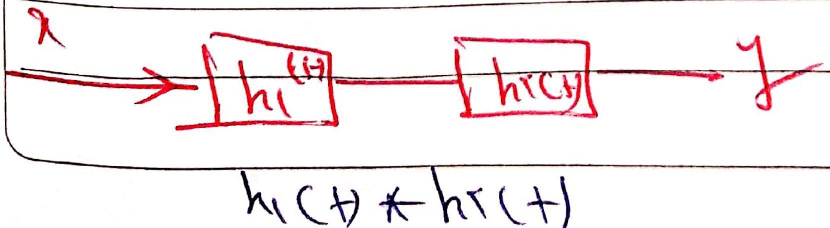
اتصال چند سیستم



(۱)



(۲)



$h_1(t) * h_2(t)$

Niko

Scanned with CamScanner

در کنترل خطی می‌توانستیم که

$x \to \boxed{K_1} \to \boxed{K_2} \to C$

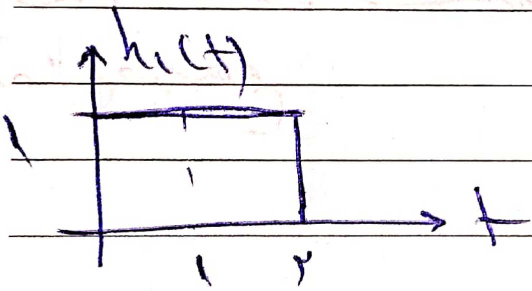
$2 \times K_1 \times K_2 = C$

این موضوع با موضوع ما هیچ ربطی ندارد!! K_1 و K_2 که سیستم (که خطی است) اما h_1 و h_2 پاسخ ضربه سیستم‌ها!!

سیستم LTI را داریم همچنین داریم:

$h_1(t) = h_2(t)$, $h_3(t) = \delta(t+2)$, $h_4(t) = h_1(t-1)$

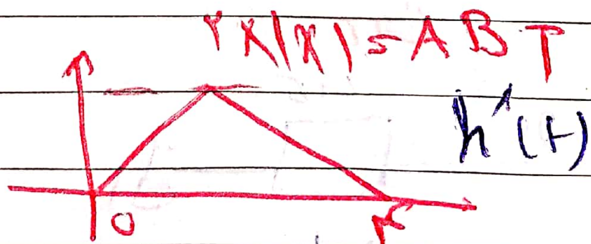
فرض: $h(t) = [h_1(t) * h_2(t)] + [h_3(t) * h_4(t)]$

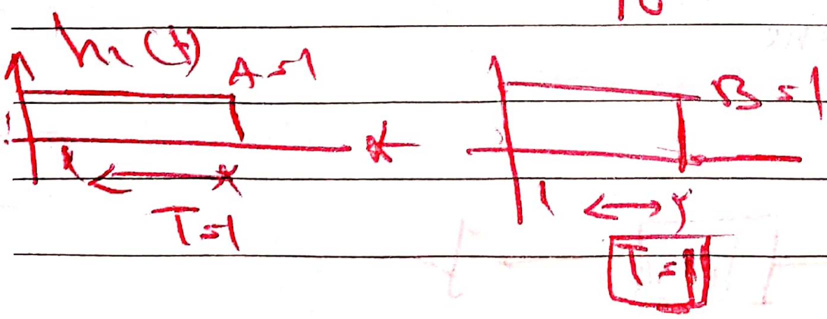


$x(t) = \delta(t+1) + \delta(t)$

$y(0) = ?$

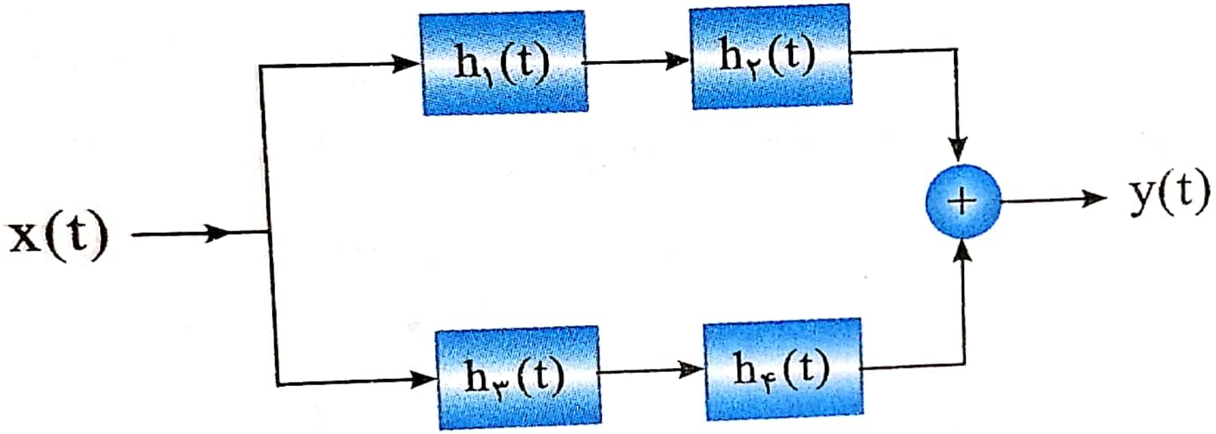
$h_1(t) * h_2(t) =$

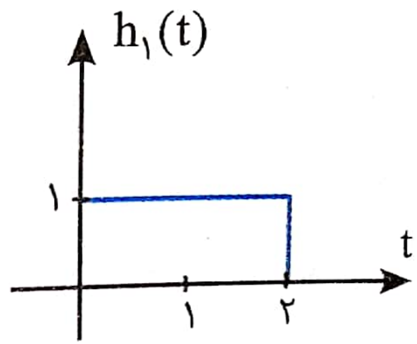




حلش نکنید [illegible]

سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید. در صورتی که $h_۱(t)$ به‌صورت نشان داده شده در شکل باشد، و نیز $h_۲(t)=h_۱(t)$ و $h_۳(t)=\delta(t+۲)$ و $h_۴(t)=h_۱(t-۱)$ باشند، پاسخ سیستم در لحظه $t=۰$ به ورودی $x(t)=\delta(t+۲)+\delta(t)$ برابر است با:





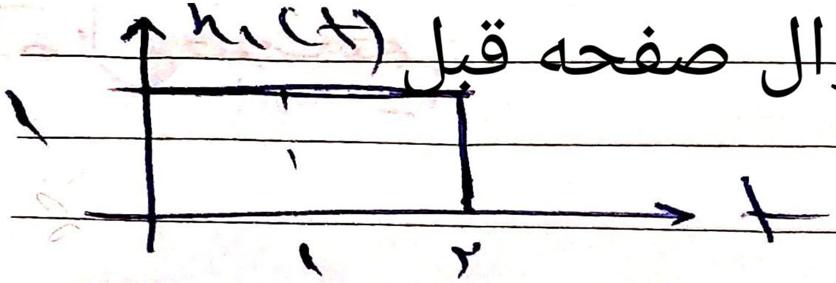
۱) ۰

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

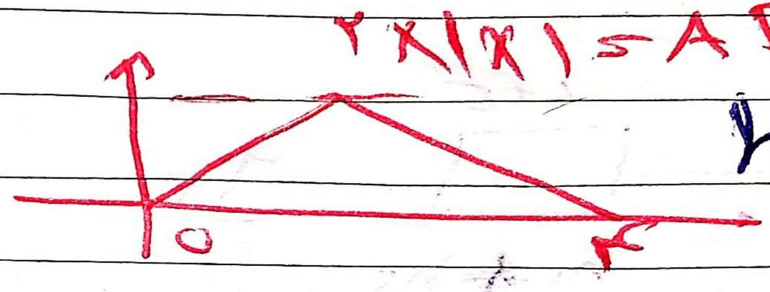
پاسخ سوال صفحه قبل



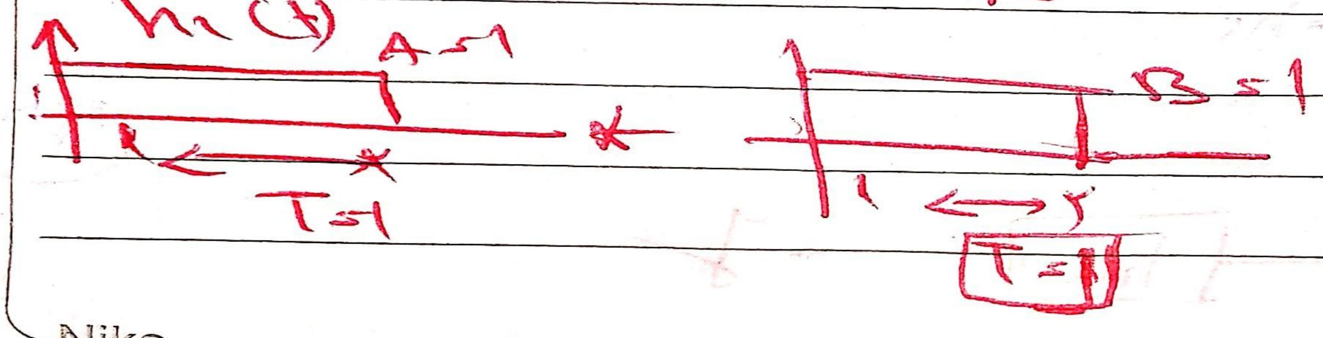
$x(t) = \delta(t+2) + \delta(t)$

$y(0) = ?$

$h_1(t) * h_2(t) =$



$h'(t)$



حاصل تقارن زنگوله ای شده در سه.

ادامه پاسخ صفحه قبل

Date:.../.../...

$(t) = \delta(t+2)$

$\Rightarrow$

$(t) = h_1(t-1)$ $\boxed{h_2 * h_4 = h_1(t+1)}$

$(t) = h'(t) + h_1(t+1)$

$x(0) * h(0) = h'(t+2) + h'(0) + h_1(t+2)$
$+ h_1(t+1)$

$t=0 \Rightarrow h'(2) + \cancel{h'(0)} + \cancel{h_1(2)} + \cancel{h_1(1)} = 3$

صفر صفر 1

مثال ۲۳

رابطه هر کدام از سیستم‌های زیر را به‌صورت یک رابطه کانولوشنی بیان کنید و سپس در مورد LTI بودن و بقیه خواص آن اظهار نظر نمایید.

الف) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\,x(\tau)\,d\tau$

ب) $y(t)=\int_{t+a}^{t+b} x(\tau)\,d\tau$

ج) $y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n-k}\,x[k]$

حل:

الف) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\,x(\tau)\,d\tau$

برای بررسی LTI بودن سیستم فوق، می‌توانیم خطی و TI بودن آن را جداگانه و با همان روش‌های بیان شده در فصل دوم بررسی کنیم؛ ولی در اینجا می‌خواهیم از روش حرفه‌ای‌تری در مورد LTI بودن و بقیه خواص آن اظهار نظر نماییم. برای این کار سعی می‌کنیم که رابطه داده شده را به شکل کانولوشن دو سیگنال نمایش دهیم. دقیقاً به روند کار دقت کنید. ابتدا انتگرال فوق را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\,x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}\underbrace{u(t-\tau)}_{\tau<t}x(\tau)\,d\tau$$

حد بالای انتگرال را به $+\infty$ تغییر دادیم و برای اینکه اثر این تغییر را خنثی کنیم، در داخل انتگرال عبارت $u(t-\tau)$ را اضافه نمودیم، زیرا $u(t-\tau)$ فقط برای $t>\tau$ مقدار دارد. حال با کمی دقت می‌توان انتگرال فوق را به‌صورت کانولوشن زیر نمایش داد:[۲]

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=x(t)*e^{-t}u(t)\longrightarrow y(t)=x(t)*\underbrace{e^{-t}u(t)}_{h(t)}$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه سیستم به‌صورت $y(t)=x(t)*h(t)$ می‌باشد. در نتیجه این سیستم، LTI است و پاسخ ضربه آن نیز برابر $h(t)=e^{-t}u(t)$ می‌باشد. حال از روی پاسخ ضربه سیستم می‌توان بقیه خواص آن را نیز بررسی کرد. با توجه به اینکه $h(t)=e^{-t}u(t)$ برای $t<0$ برابر صفر است و برای $t>0$ مقدار دارد، این سیستمِ LTI، حافظه‌دار و علی می‌باشد. همچنین به دلیل اینکه $h(t)$ انتگرال‌پذیر مطلق است، این سیستمِ LTI، پایدار می‌باشد. در مورد وارون‌پذیری هم همان‌طور که قبلاً اشاره شد، به دلیل LTI بودن سیستم، بهتر است که وارون‌پذیری آن را در حوزه فرکانس بررسی نماییم که در فصل نهم توضیح داده خواهد شد. توجه کنید که همه این خواص (خطی بودن، بدون‌حافظه بودن، علی بودن، TI بودن، پایداری و وارون‌پذیری) را می‌توانستیم با همان روش‌های بیان شده در فصل اول بررسی نماییم، که مسلماً از لحاظ زمانی و محاسبات خیلی طولانی‌تر می‌شد.

---

[۱] $h(t)$ یک تابع دلخواه اما مستقل از ورودی می‌باشد.

[۲] در واقع وقتی داخل یک انتگرال، تابعی از τ و تابعی از $t-\tau$ داریم و حدود انتگرال نیز از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، می‌توان آن انتگرال را به‌صورت کانولوشن دو تابع بیان کرد.

Scanned with CamScanner

روش معادل برای این سوال در ص بعد

۳۰

ب) $y(t)=\int_{t+a}^{t+b} x(\tau)\,d\tau$

ابتدا انتگرال فوق را به شکل مقابل تفکیک می‌کنیم: $y(t)=\int_{t+a}^{t+b} x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t+b} x(\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{t+a} x(\tau)\,d\tau$

حال هر کدام از انتگرال‌های فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t+b} x(\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{t+a} x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\underbrace{u(t+b-\tau)}_{\tau<t+b}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\underbrace{u(t+a-\tau)}_{\tau<t+a}d\tau$$

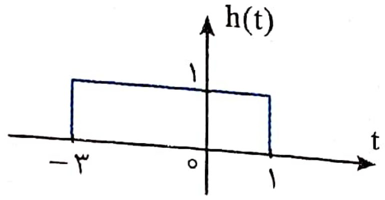
در انتگرال اول، حد بالای انتگرال را به $+\infty$ تغییر دادیم و برای اینکه اثر این تغییر را خنثی کنیم، در داخل انتگرال عبارت $u(t+b-\tau)$ را اضافه نمودیم، زیرا $u(t+b-\tau)$ فقط برای $\tau<t+b$ مقدار دارد. انتگرال دوم را نیز به طریق مشابه بازنویسی کردیم. حال می‌توان انتگرال‌های فوق را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$y(t)=[x(t)*u(t+b)]-[x(t)*u(t+a)]=x(t)*\underbrace{[u(t+b)-u(t+a)]}_{h(t)}$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه سیستم به‌صورت $y(t)=x(t)*h(t)$ می‌باشد. در نتیجه این سیستم، LTI است و پاسخ ضربه آن نیز برابر $h(t)=u(t+b)-u(t+a)$ می‌باشد. حال از روی پاسخ ضربه سیستم می‌توان بقیه خواص آن را نیز بررسی کرد. در حالت خاص فرض کنید $a=-۱$ و $b=۳$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$y(t)=\int_{t-۱}^{t+۳} x(\tau)\,d\tau=x(t)*[u(t+۳)-u(t-۱)] \longrightarrow h(t)=u(t+۳)-u(t-۱)$$

$h(t)$ را درشکل زیر مشاهده می‌کنید:



از آنجا که $h(t)$ برای $t<۰$ مقدار دارد، این سیستم، حافظه‌دار و غیرعلی می‌باشد. همچنین به دلیل اینکه $h(t)$ انتگرال‌پذیر مطلق است (یعنی مساحت $|h(t)|$ محدود می‌باشد)، این سیستم پایدار خواهد بود. وارون‌پذیری را نیز به دلیل LTI بودن سیستم، بهتر است که در حوزه فرکانس بررسی نماییم (فصل نهم).

نکته ۳۸: فرمول پرکاربرد زیر را به خاطر بسپارید.

$$\boxed{\int_{t+a}^{t+b} x(\tau)\,d\tau=x(t)*[u(t+b)-u(t+a)]}$$

a و b مقادیر ثابت حقیقی هستند که می‌توانند نامحدود نیز باشند.[1]

ج) $y[n]=\sum_{k=۰}^{+\infty}(\frac{۱}{۲})^{n-k}x[k]$

ابتدا سیگمای فوق را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y[n]=\sum_{k=۰}^{+\infty}(\frac{۱}{۲})^{n-k}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{۱}{۲})^{n-k}x[k]\underbrace{u[k]}_{k\geq۰}$$

---

[1] در حالت زمان‌گسسته نیز به‌طور معادل فرمول $\sum_{k=n+m_۱}^{n+m_۲} x[k]=x[n]*(u[n+m_۲]-u[n+m_۱-۱])$ را داریم که البته به اندازه حالت پیوسته اهمیت ندارد. ضمناً این فرمول بر خلاف حالت زمان‌پیوسته، فقط به‌ازای $m_۲>m_۱$ برقرار است.

Scanned with CamScanner

Subject:

Date: / /

نوشتم برای این سوال (ست ب)

$$\int_{t+a}^{t+b} x(\tau)\, d\tau$$

$$t+a < \tau < t+b \Rightarrow \begin{cases} 0 < t+b-\tau \Rightarrow u(t+b-\tau) \\ t+a-\tau < 0 \Rightarrow u(t+a-\tau) \end{cases}$$

$$u(t+b-\tau) - u(t+a-\tau)$$

$$\begin{cases} \tau < t+a \Rightarrow \text{Zero} = \text{گذر} \\ t+a < \tau < t+b \Rightarrow 1 = \text{گذر} \\ \cancel{t+b >}\ \tau > t+b \Rightarrow \text{Zero} = \text{گذر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(\tau) * \{u(t+b-\tau) - u(t+a-\tau)\}$$

حد پایین سیگما را به $-\infty$ تغییر دادیم و برای اینکه اثر این تغییر را خنثی کنیم، در داخل سیگما عبارت $u[k]$ را اضافه کردیم، زیرا $u[k]$ فقط برای $k \geq 0$ مقدار دارد. حال با کمی دقت می‌توان سیگمای فوق را به‌صورت کانولوشن زیر نمایش داد:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[k](\tfrac{1}{2})^{n-k} = \left(x[n]u[n]\right) * (\tfrac{1}{2})^n$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه سیستم فوق به‌صورت $y[n] = x[n] * h[n]$ نمی‌باشد. در نتیجه این سیستم، قطعاً LTI نیست. خواص مختلف این سیستم را می‌توان با همان روش‌های بیان شده در فصل اول بررسی کرد، امّا ما در اینجا می‌خواهیم این کار را با کمک رابطه $y[n] = \left(x[n]u[n]\right) * (\frac{1}{2})^n$ انجام دهیم:

بررسی خطی بودن: سیستم خطی است، زیرا:

$$T\{\alpha x[n]\} = \left(\alpha x[n]u[n]\right) * (\tfrac{1}{2})^n = \alpha\left[\left(x[n]u[n]\right) * (\tfrac{1}{2})^n\right] = \alpha T\{x[n]\}$$

بررسی TI بودن: با توجه به اینکه سیستم خطی و غیر LTI است، پس حتماً TV است.

بررسی وارون‌پذیری: با توجه به رابطه $y[n] = \left(x[n]u[n]\right) * (\frac{1}{2})^n$، ورودی ابتدا در سیگنال $u[n]$ ضرب می‌شود و سپس با سیگنال $(\frac{1}{2})^n$ کانوالو می‌شود. پس ورودیِ لحظات منفی از سیستم حذف می‌شوند و نقشی در ساخت خروجی ندارند. در واقع ورودیِ لحظات منفی به خروجی منتقل نمی‌شوند. این موضوع از روی رابطه اولیه هم مشخص است. بنابراین سیستم وارون‌ناپذیر است.

بررسی علی بودن: برای بررسی علی بودن، رابطه کانولوشنی کمکی به ساده کردن مسأله نمی‌کند. بنابراین از خود رابطه اولیه استفاده می‌کنیم. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} x[k]$، خروجی در هر لحظه n، به $x[k]$ بستگی دارد که k با توجه به حدود سیگما از 0 تا $+\infty$ تغییر می‌کند. پس خروجی در هر لحظه n (حتی nهای منفی) به ورودی از لحظه 0 تا $+\infty$ وابسته است. یعنی خروجی در بعضی از لحظات، به ورودی در لحظات آینده بستگی پیدا می‌کند. در نتیجه سیستم غیرعلی است.

بررسی بدون‌حافظه بودن: به دلیل غیرعلی بودن سیستم، بدیهی است که سیستم حتماً حافظه‌دار خواهد بود.[1]

بررسی پایداری: برای بررسی پایداری نیز از خود رابطه اولیه استفاده می‌کنیم (اگرچه می‌توان با استفاده از رابطه کانولوشنی هم استدلال کرد). در رابطه اولیه، به جای ورودی، مقدار محدود A قرار داده و خروجی را محاسبه می‌کنیم:

$$x[n] = A \longrightarrow x[k] = A$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-k} x[k] \underset{x=A}{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-k} A = A(\tfrac{1}{2})^n \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k}_{\infty} = \infty$$

ملاحظه می‌کنید که خروجی نامحدود می‌شود. پس این سیستم ناپایدار است.

سیستم‌های LTI در بسیاری از اوقات، در حوزه فرکانس بسیار ساده‌تر تحلیل می‌شوند تا در حوزه زمان. همچنین بسیاری از این تحلیل‌ها در دو حوزه زمان و فرکانس به‌طور مشترک انجام می‌گیرند. بنابراین برای پرهیز از موازی‌کاری و پراکنده‌گویی، تحلیل کامل‌تر و دقیق‌ترِ سیستم‌های LTI را به فصل نهم موکول می‌کنیم.

---

[1] سیستم‌های بدون‌حافظه حتماً علی می‌باشند و در نتیجه سیستم‌های غیرعلی، حتماً حافظه‌دار هستند.

Scanned with CamScanner

★ اینجا باید در مقدمه بپردازیم خواص سیستم ها را مثل علی بودن و ... تغییرناپذیر خاص پیدا کرد:

اما از این به بعد تصمیم داریم که خواص سیستم LTI را با پاسخ ضربه جلب بسنجیم ($h(t)$)

خاصیت	پیوسته	گسسته
بدون حافظه	$h(t)=0$ $t\neq 0$	$h(n)=0$ $n\neq 0$
	(پاسخ ضربه به ازای $t\neq 0$ و $n\neq 0$ باید برابر با صفر باشد)	
در سیستم علی بودن را		
علی بودن	$h(t)=0$ $t<0$	$h[n]=0$ $n<0$
به ازای $t<0$ و $n<0$	پاسخ ضربه برابر با صفر باشد	

همه برای LTI است

تعبیر سلوک ابتدایی: اگر در زمانی یک ریال شخص صفر بوده است ... به صفر ...

Subject:............... Date:.../.../...

سیستم پایدار:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

نکته:

① خاصیت پایداری سیگنال یعنی اینکه مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

② پایداری سیستم و سیگنال در مفهوم آنها تفاوت دارد.

مفهوم انتگرال پذیری: سیگنالی که انتگرال آن محدود باشد انتگرال پذیر

مفهوم پایداری یا مطلقاً انتگرال پذیری: اندازه انتگرال آن محدود شود

شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه آن سیگنالی پایدار باشد.

★ وارون پذیری:

$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$

~~اگر سیگنالی وارون پذیر است~~

اگر یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ وارون پذیر باشد پاسخ ضربه وارون آن $h_1(t)$ خواهد بود به طوری که

$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$

به وسیله حوزه فرکانس یا لاپلاس ساختن آن را حل خواهیم کرد

Scanned with CamScanner

*h مثال ۲-۱۱ کتاب ص ۱۰۳ آنچه مهم است x

راه حل: ابتدا می‌خواهیم پاسخ ضربه را بدست آوریم:

$h(t) = \delta(t-t_0)$

~~پاسخ ضربه~~ $\cancel{x(t-t_0) * \delta(t) = x(t-t_0)}$ ~~h(t)~~

← پاسخ ضربه یعنی پاسخ به ورودی ضربه یعنی اگر به جای $x = \delta$ داشته باشیم

if: $t \neq t_0$

این شرط را ندارد و $h(t) = 0$ ، $t \neq 0$ ⇐ بدون حافظه بودن

این شرط را نیز ندارد ⇐ $h(t) \neq 0$ ⇐ $t < 0$ ⇐ علی بودن

$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)}$

وارون‌پذیری ⇐ $\delta(t-t_0) * h = \delta(t)$

$$\text{پایداری} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_0)| \, \delta(t+t_0) = 1 < \infty$$

* یک مثال دیگر سیستم داریم:

در واقع شرط پایداری و علی بودن یک سیستم پایداری و علی بودن

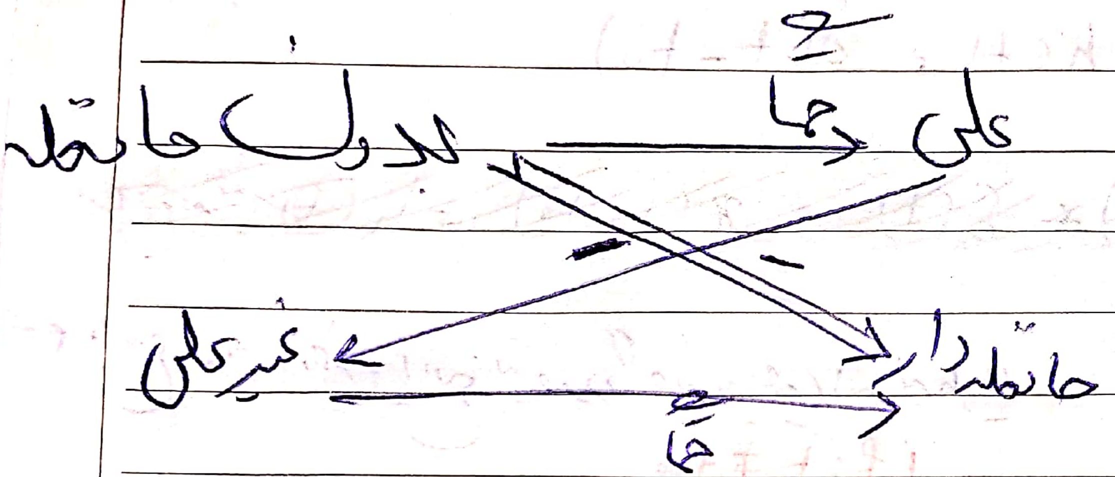
مثال ضربه آن است که

نکته مهم

خلاصه

حما کلی است ⟸ بدون کلی است

حا نقطه دار ⟸ تبدیل کلی است



تبدیل شیب واحد:

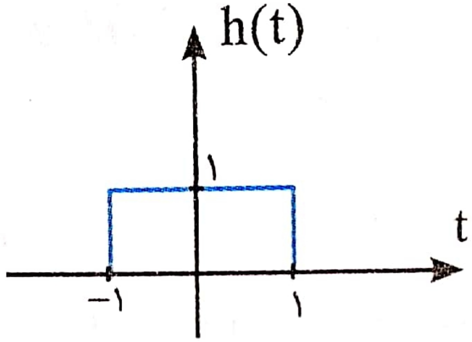
معرفی تابع خاص است ⟸ $r(t+1) = (t+1)u(t+1)$

برای تبدیل تابع خاص شیب واحد را برای تبدیل های زیر بنویسید.

$r(t) = ?$ → $t \times u(t)$

$r(t+2) = ?$ → $(t+2)\,u(t+2)$

۲. پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر ورودی سیستم برابر با $x(t) = u_{-۲}(t+۱) - u_{-۲}(t) - u_{-۱}(t-۳)$ باشد، در این صورت خروجی در لحظه $t = ۲$ کدام است؟ ($u_{-۱}(t)$ معرف تابع پله واحد و $u_{-۲}(t)$ معرف شیب واحد می‌باشد). (سراسری ۸۲)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۱/۵

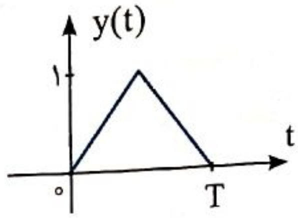
حل:

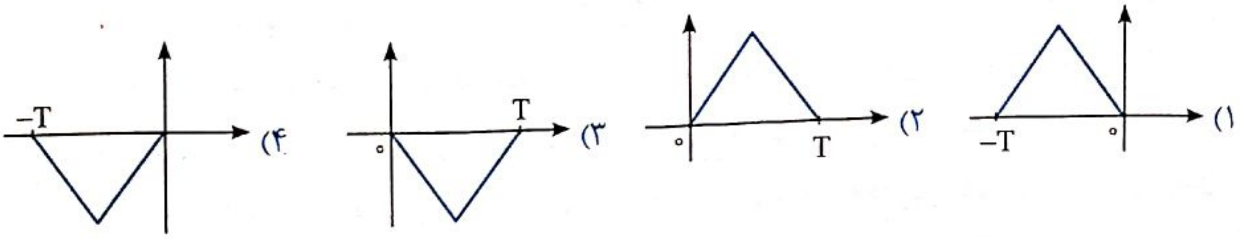
با توجه به این که $u_{-۲}(t) = r(t) = tu(t)$ و $u_{-۲}(t+۱) = r(t+۱) = (t+۱)u(t+۱)$ می‌باشد، داریم:

$$x(t) = r(t+۱) - r(t) - u(t-۳) = (t+۱)u(t+۱) - tu(t) - u(t-۳) = \begin{cases} ۰ & , \quad t < -۱ \\ t+۱ & , \quad -۱ < t < ۰ \\ ۱ & , \quad ۰ < t < ۳ \\ ۰ & , \quad t > ۳ \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

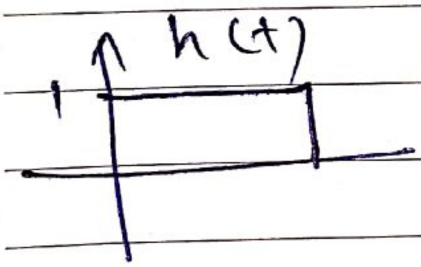
۴. پاسخ ضربه یک سیستم LTI سیگنالی فرد است. اگر خروجی سیستم برای یک سیگنال $x(t)$، به‌صورت $y(t)$ مطابق با شکل زیر باشد، خروجی سیستم برای سیگنال $x(-t)$ چگونه است؟ (سراسری ۹۱)





پاسخ سوال

← می‌توان برای حل این سوال سیگنال $h(t)$ را به صورت زیر در نظر گرفت (چون فرد است)



تا با این طریق خواسته سوال شروع به حل کنیم:

$$x(t) * h(t) = y(t)$$

$$x(-t) * h(t) \Rightarrow -h(-t) = h(t)$$ چون فرد است

$$\Rightarrow -\{x(-t) * h(-t)\} = -y(-t)$$

Niko

Scanned with CamScanner

Date:---/---/---

اگر $x(2t) * \delta(4-2t)$ باشد، $g(t)$ را بیابید

آزمون ۹۰

می‌دانیم که: $x(t) * \delta(t-t_0) = \underline{g(t-t_0)}$

پس $\delta(4-2t) = \delta(2t-4) = \delta(2(t-2))$

$= \frac{1}{|2|}(\delta(t-2))$

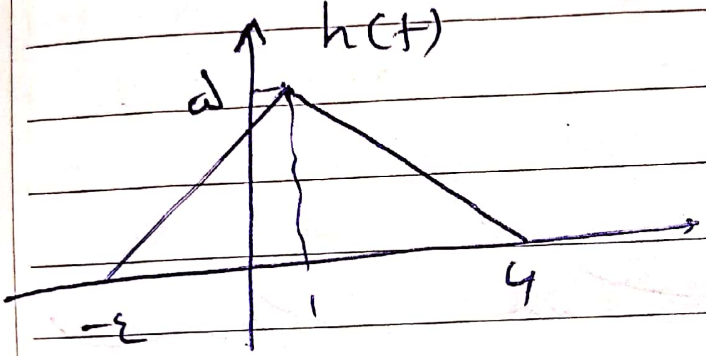
$\frac{1}{|2|} \times \delta(t-2) * x(2t) = \boxed{\frac{1}{2} x(2(t-2))}$

Scanned with CamScanner

Subject:.............. Date:.../.../...

سوال مهم: سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) به شکل زیر مفروض است.

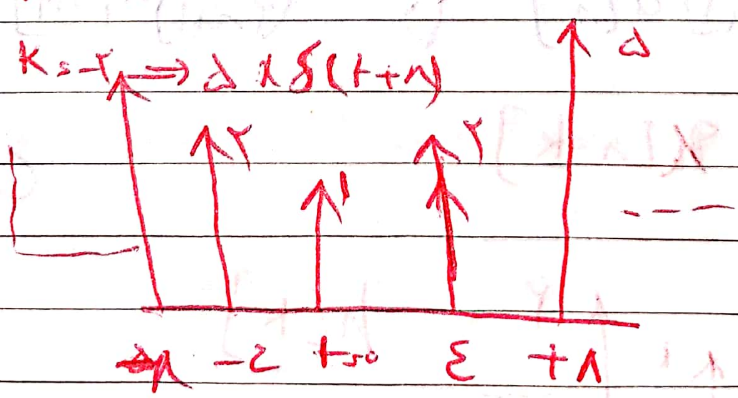
سیگنال $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)\delta(t-4k)$ از این سیستم عبور می‌کند خروجی در لحظه $t=2$ برابر کدام است.



حل:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)\delta(t-4k)$$

if:
- $k=0 \Rightarrow 1\,\delta(t)$
- $k=1 \Rightarrow 2\times\delta(t-4)$
- $k=-1 \Rightarrow 2\times\delta(t+4)$
- $k=2 \Rightarrow 5\times\delta(t-8)$
- $k=-2 \Rightarrow 5\times\delta(t+8)$



$$\Rightarrow x(t)*h(t)=h(t)+2\big(h(t-4)+h(t+4)\big)+5\big(h(t-8)+h(t+8)\big)+0=$$

if: $\boxed{t=2}$ $\Rightarrow$ $h(2)+2(h(t-4)+h(t+4))$

$+5(h(t-n)+h(t+n))=$

$\underbrace{h(2)}_{4}+2(\underbrace{h(-2)}_{2}+\underbrace{h(6)}_{\text{صفر}})+5(\cancel{h(-4)}_{0}+\cancel{h(10)}_{0})$

$\boxed{4+4=8}$

یک سوال مهم: if: $h[n]=[n+1]u[n+1]$

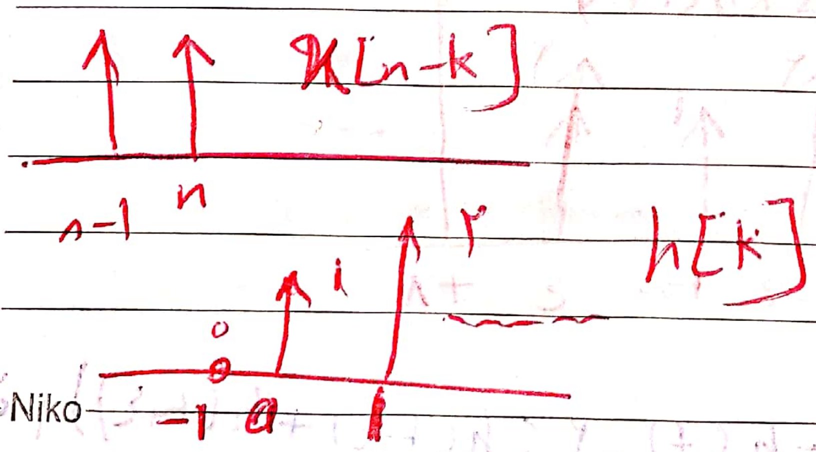
$x[n]=u[n]-u[n-1]$

$Y[n]=?$

الف) $2n\,u[n]$ ب) $n\,u[n]$

ج) $(2n+1)\,u[n]$ د) $(n+1)\,u[n]$

روش اول:

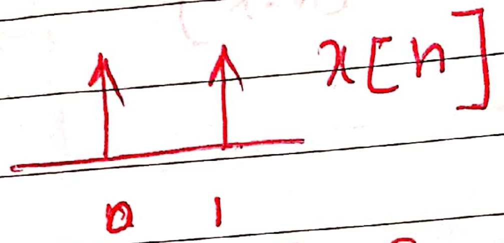


Scanned with CamScanner

چون در حاصل ضرب $u[n]$ داریم تنها برای بازای $n\geq 0$ مشترک است سیگنال $x[n-k]$ داخل $h[k]$ قرار میگیرد!

$$\sum_{n-1}^{n} (n+1)\times 1 = (n+n+1) = 2n+1$$

روش دوم:



$$\Rightarrow x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow [n+1]u[n+1] * \delta[n] + [n+1]u[n+1] * \delta[n$$

$$[n+1]u[n+1] + n\,u[n] \Rightarrow$$

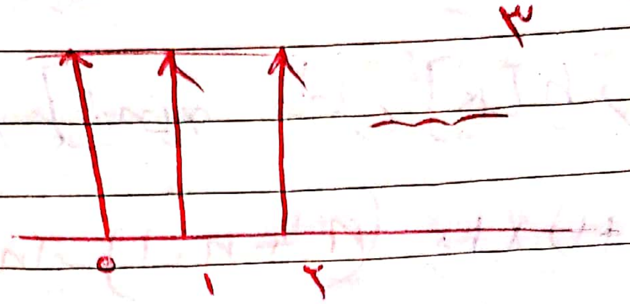
چون بازای $n\geq 0$ خواسته است $\Leftarrow$

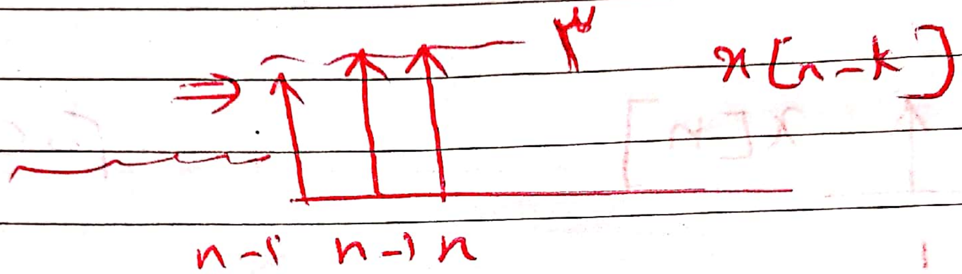
$$[n+1]u[n] + n\,u[n] = [2n+1]u[n] \checkmark$$

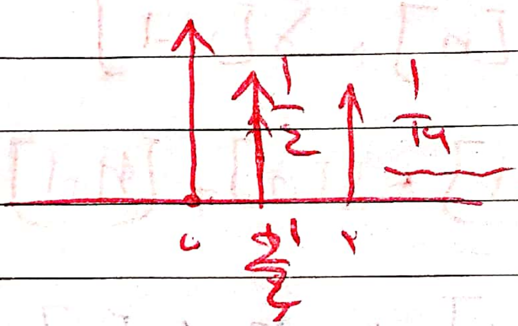
اگر پاسخ ضربه واحد یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $[\frac{1}{4}]^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی که به ازا

چیست؟

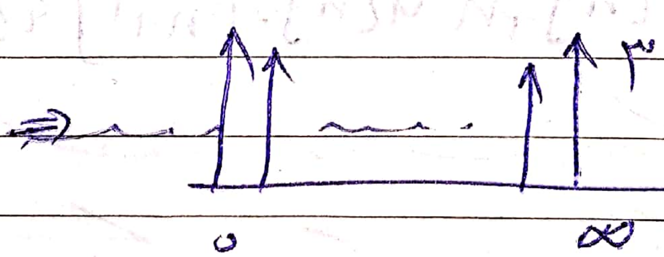
$x[k]$ ،

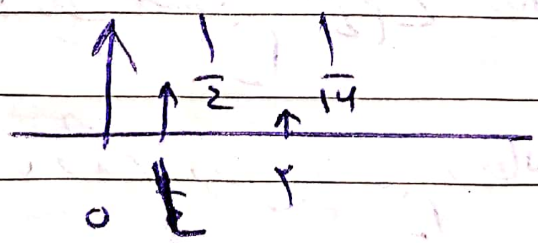






⇒ با شیفت داریم ⇒ $x[\infty-k]$





$\sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، K

Scanned with CamScanner

* عبارت زیر را ساده کنید.

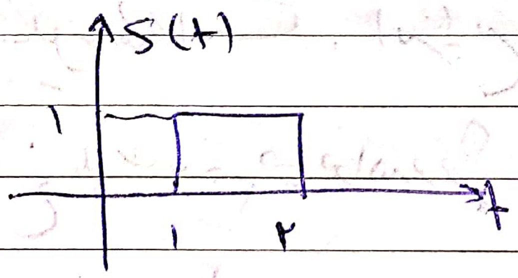
$$-\delta(t) + \delta(t)\,(e^{t}+e^{-t}) - (e^{t}u(-t)+e^{-t}u(t))$$

$t=0$ → $(1+1)$

$$-\delta(t) + 2\delta(t) - (e^{t}u(-t)+e^{-t}u(t))$$

$$\delta(t) - e^{-|t|}$$

یک سیستم LTI با پاسخ پله $S(t)$ مطابق شکل زیر است. اگر دو سیستم را با هم متوالی ببندیم پاسخ پله سیستم حاصل کدام است؟



$$S(t) = u(t-1) - u(t-2) \Rightarrow S'(t) = h(t)$$
$$= \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

در واقع یک سیستم داریم که $u(t) \to \boxed{h(t)} \to S(t)$ حالا در نظر می‌گیریم.

$$u(t) \to \boxed{h*h} \to S_2 = ?$$

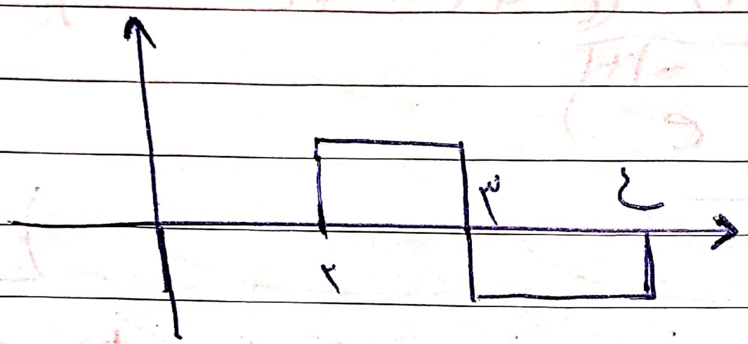
Niko

Scanned with CamScanner

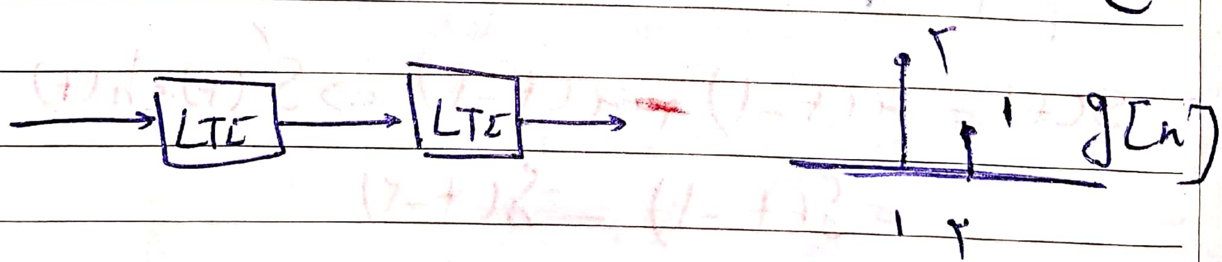
$$\{\delta(t-1)-\delta(t-2)\} * \{\delta(t-1)-\delta(t-2)\} =$$

$$\delta(t-2)+\delta(t-4)-2\delta(t-3)=H(t)$$

$$u(t) * H(t) = u(t-2)+u(t-4)-2u(t-3)$$



سیستم زمان گسسته ای از دو طبقه LTI مطابق شکل زیر تشکیل شده است. اگر پاسخ ضربه هر طبقه به صورت g[n] است. پاسخ ضربه سیستم چه خواهد بود؟



$$g[n] = 2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

Scanned with CamScanner

Subject:

Date: / /

برای تبدیل پاسخ پله به ضربه داریم:

$$g[n] - g[n-1] = h[n]$$

$$\Rightarrow 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$= 2\delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$h[n] * h[n] = H[n]$$

$$4\delta[n-2] - 2\delta[n-3] - 2\delta[n-4] + \delta[n-4] - 2\delta[n-3] + \delta[n-5] + \delta[n-6] - 2\delta[n-4] + \delta[n-5] =$$

$$\{4\delta[n-2] - 4\delta[n-3] - 3\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + \delta[n-6]\} = H[n]$$

$$H[n] * u[n] =$$

$$\underbrace{4u[n-2] - 4u[n-3]}_{4\delta[n-2]} - 3u[n-4] + 2u[n-5] + u[n-6]$$

Subject: .... Date: ---/---/---

پایداری سیستم $h(t) = e^{jat} u(3t+1)$ را بررسی کنید

پاسخ صحیح

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{jat} u(3t+1) \right| = \int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} \underbrace{\left| e^{jat} \right|}_{1}$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} 1 = +\infty$$ (ناپایدار)

دلیل:

$$e^{jat} = \cos at + j \sin at$$

$$\Rightarrow \left| e^{jat} \right| = \sqrt{\cos^2 at + \sin^2 at} = 1$$

آیا سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر علی است؟!

$$h[n] = n\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

همیشه علی است $n<0$ به ازای $h[n] = 0$!!

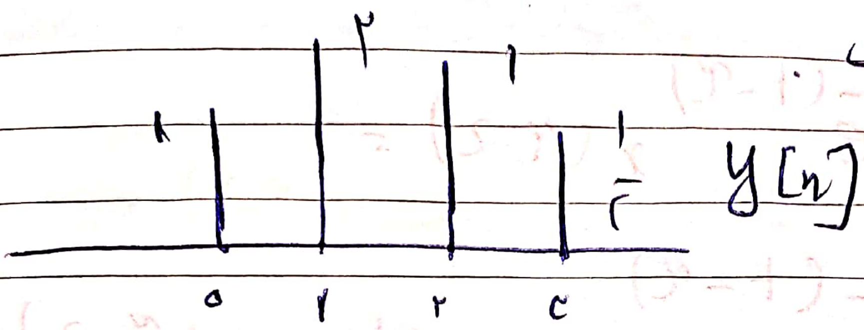
$\Leftarrow$ $n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ فقط از ۱ به بعد وجود دارد و به ازای $n \geq 1$ باید تست ها مثبت است

Niko

Subject:

Date:

پاسخ یک سیستم LTI به $x[n]=\delta[n-1]$ به صورت شکل مقابل است، درمورد پایداری، علی و حافظه‌دار بودن آن چه می‌توان گفت



پاسخ:

$$x[n]*h[n]=y[n]$$

$$\underbrace{\delta[n-1]*h[n]}_{h[n-1]}=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-3]$$

$\Rightarrow$

$$h[n]=\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]$$

غیر علی / حافظه‌دار / $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]\right|=$

$$\underset{n=-1}{1}+\underset{n=0}{2}+\underset{n=1}{1}+\underset{n=2}{\frac{1}{2}}=4.5$$

پایدار

Niko

Scanned with CamScanner

مثال: رابطه‌ی ورودی خروجی یک سیستم LTI به صورت

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau-2)$ است. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau-2) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}\, \underbrace{u(t-\tau)}_{t>\tau}\, x(\tau-2) =$$

$$e^{-t}u(t) * x(t-2) = e^{-t}u(t) * \delta(t-2) * x(t) =$$

$$e^{-(t-2)}u(t-2) * x(t)$$

Subject:.............. Date:.../.../...

رابطه‌ی ورودی - خروجی یک سیستم LTI به صورت $\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)$ می‌باشد. پاسخ ضربه؟!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)$$

اگر ورودی را ضربه در نظر بگیریم مثل این است که داریم:

$$1 * h = h$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)\, u(t-\tau)$$

$$\tau < t \Rightarrow 0 < t-\tau$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau-2)\, u(t-\tau) =$$

$$e^{-(t-2)} \times u(t-2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-2)}_{1} =$$

$$e^{-(t-2)} u(t-2)$$

Niko

Scanned with CamScanner

ورودی و خروجی یک سیستم LTI به صورت زیر است.

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau-2)\,d\tau$ ، خروجی این سیستم

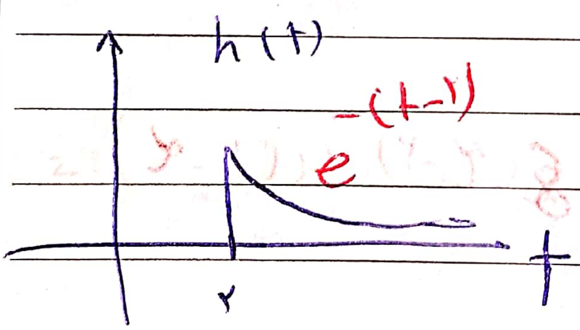
به صورت $x(t)=u(t+1)-u(t-2)$ باشد در لحظه $t=2$!

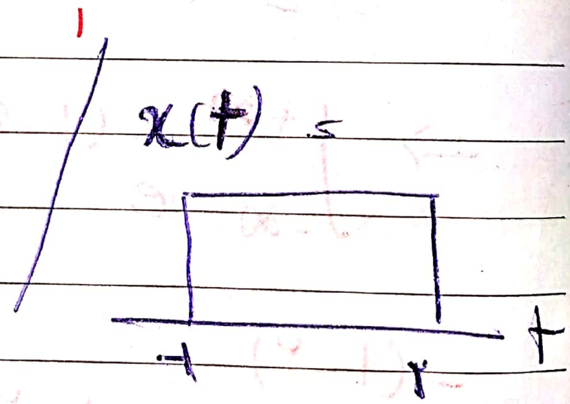
$$h(t)=? \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\,\delta(\tau-2) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}\,\delta(\tau-2)\,u(t-\tau) \Rightarrow$$

$$\tau<t$$

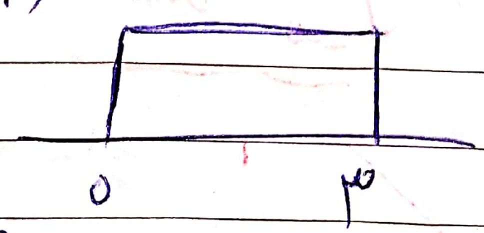
$$e^{-(t-2)}\,u(t-2)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-2) = h(t)$$





$x(2-\tau)$

$\Rightarrow$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(2-\tau)\,h(\tau) = \int_{+2}^{3} e^{-(\tau-2)}\,d\tau =$$

رابطه ی ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته با زمان خطی به صورت

$y(t-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(\tau - t)$ است. $h(t)$ را بیابید.

$$y(t-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(\tau - t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(\tau - t + 1) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, u(\tau - t + 1) \Rightarrow \boxed{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)}}$$

$$u(\tau - t - 1)$$

سوال: فاصله ی ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ داریم

کدام سیستم LTI است؟

$$\text{SYS 1}: \; y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x[k-n]$$

Niko

Scanned with CamScanner

if: $x=\delta$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|}\, x[k-n]\, u[n-k] =$$

$$\boxed{k<n} \Rightarrow 2^{-|n|}\, \cancel{u[k]} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-n]}_{1} = h[n]$$

$x[n] * u[n] * h[n]$ LTI نیست!

Sys2: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x[n-k] \Rightarrow$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|}\, x[n-k]\, u[n-k] \Rightarrow$$

$$x=\delta \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|}\, \delta[n-k]\, u[n-k] =$$

$$2^{-|n|}\, u[0] \times 1 = \overset{?}{2^{-|n|}} = h[n]$$

$h[n] * x[n]u[n]$. LTI است

Subject:..........

Date:…/…/…

ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ به صورت $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t+\tau)$ است که در آن

$h(t)$ به صورت زیر است، آیا این سیستم LTV است یا LTI؟!

$$h=\begin{cases} 0 & t\geq 0 \\ e^{t} & t<0 \end{cases}$$

if: $x(t)=\delta(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, h(t+\tau)=$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\right] \times h(t)=e^{t}u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t}u(-t)=\int_{-\infty}^{0} \left|e^{t}u(-t)\right| < \infty \quad \text{پایدار}$$

$$\underbrace{e^{t}u(-t)}_{h(t)} * h(t) = LTI$$

نکته: برای اینکه بفهمیم سیستم تغییر پذیر با زمان است یا نه، کافیست ببینیم $x(t)*h(t)$ است یا نه که LTI است.

~~درمورد سیستم~~ $y(t)=\int_0^{+\infty} e^{-a}x(a-t)\,da$ ~~بحث کنید~~

پایداری و LTI را بررسی؟

$y(t)=\int_0^{+\infty} e^{-a}x(a-t)\,da=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a}x(a-t)u(a)\,da$

$\Rightarrow x=\delta \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a}\delta(a-t)u(a)\,da=$

$\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(a-t)\right]}_{1} e^{-t}u(t)=h(t)$

$x(a-t)$ داریم!!

$\Rightarrow \cancel{h(t)*x(-t)}$ پس ~~LTI~~ است و

LTI نیست

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t)=\int_0^{+\infty}|e^{-t}|<\infty$ پایدار

Subject: Date: / /

آخرین بحث از کانولوشن:

اگر سیستم را با ضربه شیفت شده یعنی $\delta[n,k]$ تحریک کنیم یعنی

در اینصورت داریم $h[n,k]$!!

حال از تعریف کانولوشن محاسبه شود $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h[t,k]\, d\tau$!!

← نکته: هیچ شرایطی از [تکرار] $\tau * \delta(t-\tau)$ } خواص کانولوشن

برای کانولوشن شیفت شده استفاده نشود !! →

Scanned with CamScanner