خواص ماتریس ها

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B را مساوی می گویند؛ هر گاه

1-هم درجه باشند

2-عناصر نظیر به نظیرشان با هم برابر باشد.یعنی: $a_{ij} = b_{ij}$

جمع و تفریق ماتریس ها

عمل جمع و تفریق روی دو ماتریس تنها برای ماتریس های هم درجه امکان پذیر است و برای محاسبه حاصل کافی است عمل موردنظر را روی درایه های نظیر به نظیر دو ماتریس انجام دهیم.

خواص جمع ماتریس ها:

1-خاصیت جا به جایی

$$A + B = B + A$$

2-خاصیت شرکت پذیری

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3-وجود عضو قرینه

$A + (-A) =$ (-A)+A=0

4- وجود عضو خنثی

A+0=0+A=A

5-قانون حذف

$$A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$$

6-پخش اسکالر

$$K(A + B) = KA + KB$$

ضرب ماتریس ها

ضرب دو ماتریس تنها در حالت خاصی امکان پذیر است که از روال زیر تبعیت کند:

$$A_{m\times p}B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

یعنی ، ضرب تنها هنگامی امکان پذیر است که تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد . در این حالت هر کدام از درایه های ماتریس C به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{p} A_{it}B_{tj}$$

خواص ضرب ماتریس ها:

1-عدم خاصیت جا به جایی در حالت کلی

$$AB \neq BA$$

2-خاصیت شرکت پذیری

A(BC)=(AB)C

3-خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع

A(B+C)=AB+AC

4-وجود عضو خنثی در ضرب ماتریس های مربعی

AI=IA=A

Iماتریس همانی است.

5-عدم وجود قانون حذف

$$AB = AC \nRightarrow B = C$$

6-

$$AB = 0 \nRightarrow A = 0\,, B = 0$$

اگر Bو A تعویض پذیر باشند، یعنی:AB=BA آنگاه اتحادهای جبری در مورد دو ماتریس برقرار است؛ مثلا ، در حالت کلی داریم:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

و اگر AB=BA باشد به دست می آید:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

توان های طبیعی یک ماتریس مربعی:

اگرA یک ماتریس مربعی باشد، داریم؛

$$A^n = A.A.A\ldots A$$

چند نکته در مورد توان ها:

1-با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^n = \left\{\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}\right\} n = 2k$$

$$A^n = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a^n \\ a^n & 0 \end{bmatrix}\right\} n = 2k + 1$$

2-با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^n = \left\{\begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}\right\} n = 2k$$

$$A^n = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} = \right\} n = 2k + 1$$

3-با فرض $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$ داریم:

$$a^n = 0$$

ترانهاده یک ماتریس

اگر در ماتریس A جای سطرها و ستون ها عوض کنیم ، ماتریسی حاصل می شود که آن را ترانهاده A می گویند.

و با A^TیاA' نمایش می دهند،لذا، بدیهی است:

$$A_{m\times n\to A'_{n\times m}}$$

اگر Aو B دو ماتریس هم درجه ،k عددی حقیقی و p عددی طبیعی باشد؛ داریم؛

$$(A')' = A \qquad (KA)' = KA' \qquad (A+B)' = A' + B'$$

$$(AB)' = A'B' \qquad (A^P)' = (A')^P$$

ماتریس متقارن و ضد متقارن

1-ماتریس مربعی A را متقارن می گوییم ، هر گاه $A' = A$ باشد.

2-ماتریس مربعی A را ضد متقارن می گوییم ، هر گاه $A = -A'$

باشد.