

## مثال هایی از ریاضی عمومی (سری ها)

1- حاصل سری  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$  چیست؟

جواب:

$$I = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

توجه کنید اگر در  $k, \frac{1}{2k-1}$  را به  $k+1$  تبدیل کنیم  $\frac{1}{2k+1}$  حاصل می شود لذا

طبق قاعده ادغام داریم :

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2k-1} \middle| k=2 - \frac{1}{2k+1} \middle| k=\infty \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{\infty} \right\} = \frac{1}{6}$$

2- وقتی  $n \rightarrow \infty$  حاصل  $s = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$  همگراست به:

2-1      1-2      1/2 -3      1/4 -4

جواب:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\infty} \right) = 1 \end{aligned}$$

3- در سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  مجموع  $K$  جمله اول  $\frac{k}{2k+1}$  است،  $a_n$  چند می شود ؟

جواب:

جمله ی  $n$ ام چنین است:

$$\begin{aligned} a_n &= s_n - s_{n-1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2(n-1)+1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} \\ &= \frac{n(2n-1) - (2n+1)(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 - n - 2n^2 + 2n - n + 1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$