

## مثال هایی از ریاضی عمومی (دنباله ها)

1- می خواهیم فاصله جملات دنباله  $\left\{ \frac{1-n}{2n+1} \right\}$  از مقدار همگرایی دنباله

کمتر از  $\frac{1}{11}$  باشد، کوچکترین عدد طبیعی  $n$  برای این منظور چیست؟

$$10-4 \quad 9-3 \quad 8-2 \quad 7-1$$

حل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n+1} = \frac{-1}{2}$$

یعنی، مقدار همگرایی دنباله موردنظر  $\frac{-1}{2}$  است و باید:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-n}{2n+1} - \frac{-1}{2} \right| &< \frac{1}{11} \rightarrow \left| \frac{2-2n+2n+1}{2(2n+1)} \right| < \frac{1}{11} \\ &\rightarrow \left| \frac{3}{2(2n+1)} \right| < \frac{1}{11} \rightarrow \left| \frac{2(2n+1)}{3} \right| > \frac{1}{11} \\ &\rightarrow |2n+1| > \frac{33}{2} \rightarrow 2n+1 > \frac{33}{2} \rightarrow 2n > \frac{33}{2} - 1 \\ &\rightarrow 2n > \frac{31}{2} \rightarrow n > \frac{31}{4} \rightarrow n > 7.75 \end{aligned}$$

یعنی کافی است  $n$  را حداقل 8 انتخاب کنیم.

2- دنباله  $\left\{\frac{8^n}{n!}\right\}$  با کدام شرط زیر نزولی است؟

$$n \geq 6-1 \quad n \geq 7-2 \quad n \geq 8-3 \quad n \geq 9-4$$

حل:

برای نزولی بودن باید داشته باشیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \rightarrow \frac{\frac{8^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{8^n}{n!}} \leq 1 \rightarrow \frac{8^{n+1} n!}{(n+1)! 8^n} \leq 1 \rightarrow \frac{8}{n+1} \leq 1 \rightarrow 8 \leq n + 1 \rightarrow n \geq 7$$

پس باید  $n \geq 7$  باشد.

3- دنباله  $\left\{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right\}$

1- همگراست به صفر      2- همگراست به 1

3- همگراست به  $1/2$       4- واگراست.

حل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$$

$$\left( \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n}} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

4- دنباله  $\{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\}$ :

1- نزولی و واگراست. 2- نزولی و همگراست

3- صعودی و واگراست. 4- صعودی و همگراست.

حل:

$$a_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \left[ \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$$

واضح است که با افزایش  $n$ ،  $a_n$  مرتبا کاهش می یابد، یعنی؛  $a_n$  اکیدا نزولی است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

یعنی دنباله  $a_n$  همگراست به صفر.

5- اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n + 3a_{n+1}}$  کدام است؟

$$\frac{1}{18} - 1 \quad \frac{1}{9} - 2 \quad \frac{1}{3} - 3 \quad \frac{4}{3} - 4$$

حل:

بدیهی است داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

پس می نویسیم:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n + 3a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}{\frac{a_n}{a_{n+1}} + 3} = \frac{\frac{1}{3}}{3 + 3} = \frac{1}{8}$$

6- دنباله  $a_1 = \sqrt{3}$  و  $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$  :

1- کراندار و اکیدا صعودی است. 2- بی کران و اکیدا صعودی است.

3- کراندار و غیر اکیدا یکنواست. 4- بی کران و غیر اکیدا یکنواست.

حل:

$$a_1 = \sqrt{3} \approx 1.7, a_2 = \sqrt{3\sqrt{3} + 4} \approx 3.05, a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3} + 4}} \approx 3.6$$

با این احساس که کران بالای دنباله 4 باشد، با استقراء ریاضی ثابت می کنیم:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 4$$

طبیعی است این موضوع برای  $N=1$  صادق است زیرا:

$$a_1 = \sqrt{3} \leq 4$$

با فرض  $a_n \leq 4$  باید ثابت کنیم

$$a_{n+1} \leq 4$$

مشاهده می شود:

$$a_n \leq 4 \rightarrow 3a_n \leq 12 \rightarrow 3a_n + 4 \leq 16 \rightarrow \sqrt{3a_n + 4} \leq 4 \\ \Rightarrow a_{n+1} \leq 4$$

پس حکم مورد نظر ثابت است.

برای بحث یکنواختی با توجه به مثبت بودن جملات دنباله می نویسیم:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{3a_n + 4}{a_n} = 3 + \frac{4}{a_n} \geq 3 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \sqrt{3}$$

یعنی دنباله موردنظر اکیدا صعودی است.

www.irankonkur.com