

تست های عبارات گویا با پاسخ تشریحی

1- در بازه ی $[x, +\infty)$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ بالاتر از خط به معادله ی $y = 3(x - 1)$ قرار نمی گیرد کم ترین مقدار $F(x)$ کدام است؟

1-1 2-2 3-3 4-4

جواب : گزینه 3

$$f(x) \leq 3(x - 1) \rightarrow \frac{1}{2}x + 2 \leq 3x - 3$$

$$\times 2 \rightarrow x + 4 \leq 6x - 6 \rightarrow x \geq 2$$

(سراسری تجربی 82)

2- جواب نامعادله ی $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$ کدام است؟

$$-1 \leq x \leq 1 - 2 \qquad \frac{1}{3} \leq x \leq 1 - 1$$

$$-2 \leq x \leq 1 - 4 \qquad -1 \leq x \leq \frac{1}{3} - 3$$

جواب : گزینه ی 1

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq 3x \leq 3 \rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

(سراسری ریاضی 86)

3- به ازای کدام مقادیر a عبارت $ax^2 + 2x + 4a$ همواره مثبت است؟

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} - 4 \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2} - 3 \quad a \leq -\frac{1}{2} - 2 \quad a > \frac{1}{2} - 1$$

جواب : گزینه 1

عبارت درجه دوم زمانی همواره مثبت است که $a > 0, \Delta < 0$ باشد

بنابراین:

$$\{\Delta < 0 \rightarrow 4 - 16a^2 < 0 \rightarrow a^2 > \frac{1}{4} \rightarrow a > \frac{1}{2} \text{ یا } a < -\frac{1}{2}\}$$

$$\{a > 0\}$$

از اشتراک دو عبارت بالا فقط $a > \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

(سراسری ریاضی 75)

4- حدود m برای آنکه عبارت $mx^2 + 2mx + m + 1$ به ازای جمیع

مقادیر x مثبت باشد کدام است؟

$$|m| > 1 - 4 \quad -1 < m < 1 - 3 \quad m < 0 - 2 \quad m \geq 0 - 1$$

جواب: گزینه 1

وقتی عبارت درجه دوم بالا به ازای جمیع مقادیر x مثبت است که دلتا

منفی و ضریب x^2 مثبت باشد، یعنی:

$$\{m > 0\}$$

$$\{\Delta = (2m)^2 - 4(m)(m + 1) = 4m^2 - 4m^2 - 4m = -4m < 0 \\ \rightarrow m > 0\}$$

اما به ازای $M=0$ نیز عبارت داده شده همواره مثبت است لذا پاسخ تست

$m \geq 0$ است.

5- با کدام مجموعه مقادیر a عبارت $x^2 - ax + a - 2$ به ازای جمیع

مقادیر x مثبت است؟

$$\emptyset - 4 \quad R - 3 \quad \{a: a > 2\} - 2 \quad \{a: a > 0\} - 1$$

جواب: گزینه 4

6- حدود m برای آنکه به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم

$mx^2 + mx - 1 < 0$ کدام است؟

$$m > -4 \quad -4 < m \leq 0 \quad m \leq 0 \quad m < 0$$

جواب: گزینه 1

اگر $M=0$ باشد نامساوی به صورت $-1 < 0$ در می آید که همواره درست است.

$$\{m < 0\}$$

$$\begin{aligned} \{\Delta = (m)^2 - 4(m)(-1) = m^2 + 4m = m(m+4) < 0 \Rightarrow -4 < m < 0 \Rightarrow (-4 < m < 0) \cap (m < 0) \Rightarrow -4 < m < 0\} \end{aligned}$$

اما ملاحظه کردیم که به ازای $M=0$ نیز، نامساوی همواره برقرار است.

لذا جواب نهایی $-4 < m \leq 0$ خواهد بود.

(آزاد تجربی 79)

7- به ازای کدام مقادیر m ؛ نمودار تابع با ضابطه ی

$$y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

همواره در زیر محور x ها است؟

$$\frac{-1}{2} < m < 1 - 2 \quad m < \frac{-1}{2} - 1$$

$$m > \frac{3}{2} - 4 \quad 1 < m < \frac{3}{2} - 3$$

جواب : گزینه 1

برای اینکه نمودار تابع بالا زیر محور x ها قرار گیرد باید همواره $Y < 0$ باشد و این در صورتی است که دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\{a < 0 \rightarrow m - 1 < 0 \rightarrow m < 1$$

$$\{\Delta < 0 \rightarrow \Delta = (\sqrt{3})^2 - 4m(m - 1) < 0 \rightarrow -4m^2 + 4m + 3 < 0$$

حال عبارت $-4m^2 + 4m + 3$ را تعیین علامت می کنیم.

$$\{m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2(-4)} = \frac{-1}{2}$$

$$\{m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2(-4)} = \frac{+3}{2}$$

(سراسری ریاضی 85)

8- به ازای کدام مجموعه مقادیر a هر نقطه از نمودار تابع

$f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

$$1 < a < 2 - 4 \quad a > 2 - 3 \quad a > 1 - 2 \quad a < -1 - 1$$

جواب: گزینه 3

برای آنکه نمودار تابع درجه ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور x باشد، باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد لذا:

$$\{a - 1 > 0 \rightarrow a > 1$$

$$\{\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4a(a-1) < 0 \rightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -1$$

از اشتراک جواب های بالا، $a > 2$ خواهد بود.

(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

9) منحنی به معادله ی $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را

فقط در یک نقطه قطع می کند . مجموعه ی مقادیر a به کدام صورت است؟

$$0 < a < 2 - 2 \quad -4 < a < 0 - 1$$

$$a > 4 - 4 \quad 0 < a < 4 - 3$$

جواب: گزینه 3

در صورت سوال گفته شد منحنی تابع محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند . پس معادله ی بالا تنها یک ریشه دارد اما:

$$(x - 1)(x^2 - ax + a) = 0 \rightarrow x = 1$$

بنابراین تنها ریشه ی معادله $x=1$ است، پس معادله ی $x^2 - ax + a = 0$ فاقد ریشه خواهد بود یعنی $\Delta < 0$ پس:

$$\Delta = a^2 - 4a < 0 \rightarrow 0 < a < 4$$

(سراسری ریاضی 83)

10) مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه ی

(a,b) بزرگتر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار b-a به کدام صورت است؟

4-1 5-2 5/5-3 6-4

جواب: گزینه ی 4

$$f(x) > \frac{7}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \rightarrow -x^2 + 4x + 12 > 7 \rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \rightarrow -1 < x < 5 \rightarrow x \in (-1, 5) \rightarrow \text{Max}(b-a) = 5 - (-1) = 6$$

(سراسری تجربی-89)

11) نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4, x > -1$

در بازه ی (a,b) زیر محور x هاست. بیشترین مقدار b-a کدام است؟

2-1 3-2 4-3 5-4

جواب: گزینه 2

ابتدا تابع را بخ صورت زیر به ضرب تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^3 - x)(4 - 4x^2) \\ &= x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = (x - 4)(x^2 - 1) \\ &= (x - 4)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

معادله دارای سه ریشه ی 1- و 1 و 4 است لذا چهار بازه ی جدول زیر را داریم:

x	-1	1	4	
F(x)	- 0	+ 0	- 0	+

پس با توجه به شرط $x > -1$ ، تابع f در فاصله ی (1,4) پایین محور x ها قرار دارد، بنابراین $A=1$ و $B=4$ است، لذا:

$$b - a = 4 - 1 = 3$$

(سراسری ریاضی 88)

12- تعداد جواب های معادله ی $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

0(1 1(2 2(3 3(4

جواب: گزینه ی 2

توجه می کنیم که $x \neq 2$ و $x \neq -2$ زیرا ریشه های مخرج هستند.
با مخرج گیری داریم:

$$\frac{(x-2)^2 + x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$\frac{2x^2 - 2x + 4}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{x^2-4} \rightarrow \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

$x=2$ قابل قبول نیست پس $x=-1$ و در نتیجه معادله فقط یک ریشه دارد.

(سراسری ریاضی 75)

13- معادله ی $2x + \frac{3}{x} = -1$ چه وضعی دارد؟

1- دو ریشه ی مثبت دارد. 2- ریشه ی حقیقی ندارد

3- دو ریشه ی منفی دارد. 4- ریشه ی مضاعف دارد.

$$2x + \frac{3}{x} = -1 \xrightarrow{\times x} 2x^2 + 3 = -x \rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta$$

$$= 1^2 - 4(2)(3) = -23 < 0$$

پس معادله ی مورد نظر ریشه ی حقیقی ندارد.

(آزاد غیر پزشکی 90)

14- معادله ی $(x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) - 1 = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

1- صفر 2- 4 3- 1 4- 2

جواب : گزینه ی 4

(آزاد پزشکی صبح-88)

15- در کدام فاصله نامساوی $\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$ برقرار است؟

(1) $[1, +\infty)$ (2) $(-1, +\infty)$ (3) $(1, +\infty)$ (4) $(0, \infty)$

جواب: گزینه 3

$$\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 \leq x < 1 \rightarrow \text{مجموعه ی جواب } [-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

(آزاد ریاضی 77)

16) مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

جواب: گزینه ی 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3} &\rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} > 0 \\ &\rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} > 0 \rightarrow (x-1)(x-3) < 0 \rightarrow 1 \\ &< x < 3 \end{aligned}$$

(سراسری تجربی 83)