به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۵: مشتق و انتگرال گیری عددی

مشتق گیری عددی

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

x_i	$x_۰$	$\boxed{x_۱}$	$\boxed{x_۲}$	$\cdots$	x_n
$f(x_i) = f_i$	$f_۰$	$f_۱$	$f_۲$	$\cdots$	f_n

مشتق گیری عددی

$$f(x-\Delta x)=f(x)-\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}$$

x_i	$x_{۰}$	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$\cdots$	x_n
$f(x_i)=f_i$	$f_{۰}$	$f_{۱}$	$f_{۲}$	$\cdots$	f_n

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots$$

$-$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

تفاضل پیشرو

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

تفاضل پسرو

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

تفاضل مرکزی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

مثال: مشتق مرتبه اول تابع f را در x=1 بیابید؟

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

x	f
0	0
0.5	0.3535
1	1
1.5	1.8371
2	2.8284

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \frac{1.8371 - 1}{0.5} = 1.6742$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1 - 0.3535}{0.5} = 1.2930$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1.8371 - 0.3535}{2 * 0.5} = 1.4836$$

ادامه: بررسی خطا

$$f(x) = x\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}_{x=1} = 1.5$$

تفاضل پیشرو

$$\varepsilon = \left|\frac{1.6742 - 1.5}{1.5}\right| \times 100 = 11.6\ \%$$

تفاضل پسرو

$$\varepsilon = \left|\frac{1.2930 - 1.5}{1.5}\right| \times 100 = 13.8\ \%$$

تفاضل مرکزی

$$\varepsilon = \left|\frac{1.4836 - 1.5}{1.5}\right| \times 100 = 1.1\ \%$$

مشتق مرتبه دوم:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots$$

$+$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

تفاضل پیشرو

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2}$$

تفاضل پسرو

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta x^2}$$

تفاضل مرکزی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

وزارت علوم تحقیقات وفناوری

دانشگاه آیت ا... العظمی بروجردی (ره)

مثال: مشتق مرتبه دوم تابع f را در x=1 بیابید؟

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

x	f
0	0
0.5	0.3535
1	1
1.5	1.8371
2	2.8284

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} = \frac{2.8284 - 2(1.8371) + 1}{0.5^2} = 0.6168$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta x^2} = \frac{1 - 2(0.3535) + 0}{0.5^2} = 1.172$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1.8371 - 2(1) + 0.3535}{0.5^2} = 0.7624$$

ادامه: بررسی خطا

$$f(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3}{4\sqrt{x}} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0.75$$

تفاضل پیشرو

$$\varepsilon = \left|\frac{0.6768 - 0.75}{0.75}\right| \times 100 = 9.7\ \%$$

تفاضل پسرو

$$\varepsilon = \left|\frac{1.172 - 0.75}{0.75}\right| \times 100 = 56.27\ \%$$

تفاضل مرکزی

$$\varepsilon = \left|\frac{0.7624 - 0.75}{0.75}\right| \times 100 = 1.65\ \%$$

روش های دیگر مشتق گیری عددی

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i) = f_i$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

$$P(x) \cong f(x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\partial P}{\partial x}$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

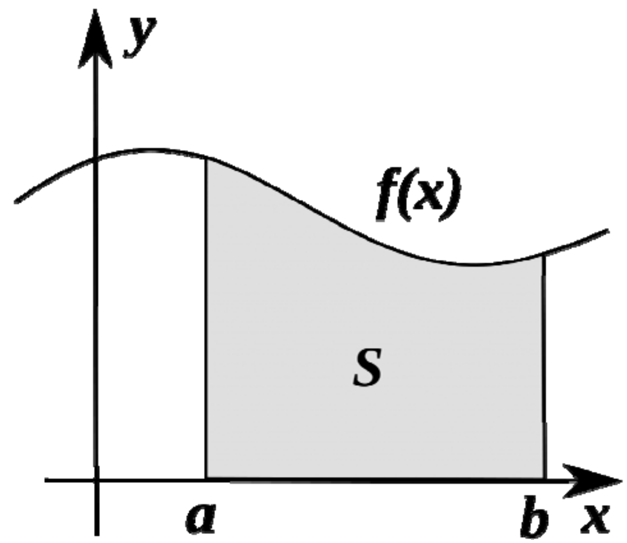
محاسبات عددی

فصل ۵: مشتق و انتگرال گیری عددی

بخش دوم : انتگرال گیری عددی

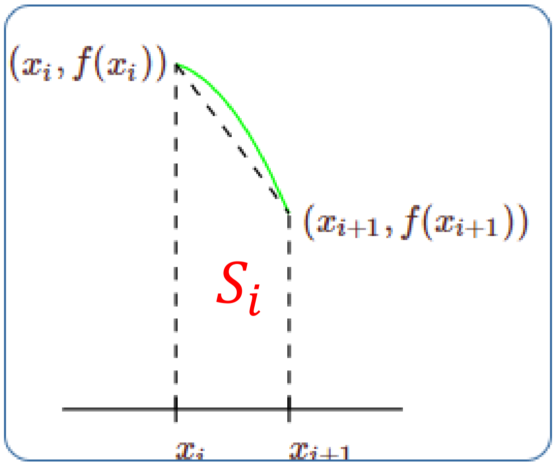
انتگرال گیری عددی

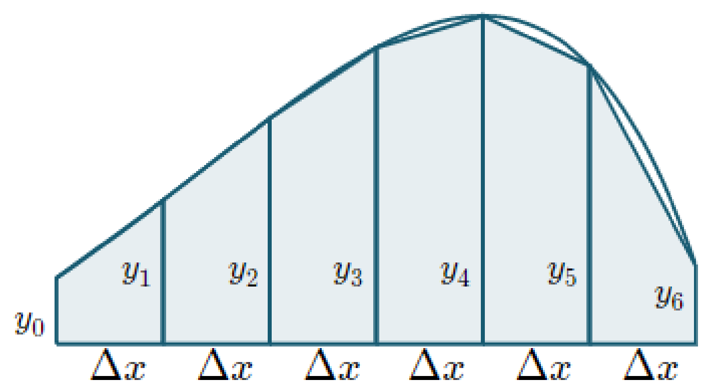
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



روش ذوزنقه ای

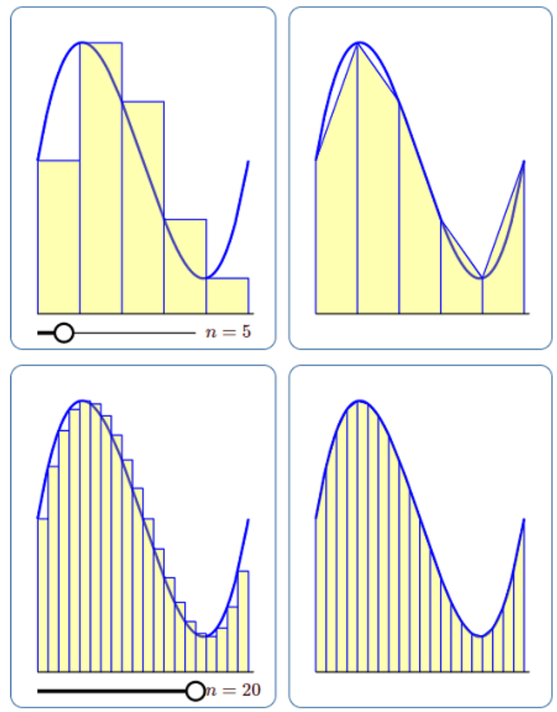
$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \Delta x \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$





$$S = \sum S_i = \frac{\Delta x}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

x	f
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
…	…
x_n	f_n



مثال: محاسبه انتگرال $\int_0^1 x^2dx$ با فرض $\Delta x = 0.25$

x	f
0	0
0.25	0.0625
0.5	0.25
0.75	0.5625
1	1

$$\int_0^1 x^2dx \approx S = \frac{\Delta x}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$S = \frac{0.25}{2}(0 + 2(0.0625) + 2(0.25) + 2(0.5625) + 1)$$

$$S = 0.3437$$

حل دقیق:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = 0.3333$$

نحوه تخمین خطا با تعیین Δx

$$E = \frac{(b-a)\Delta x^2}{12} M$$

M : کران بالای مشتق دوم تابع f(x) در بازه مورد نظر است.

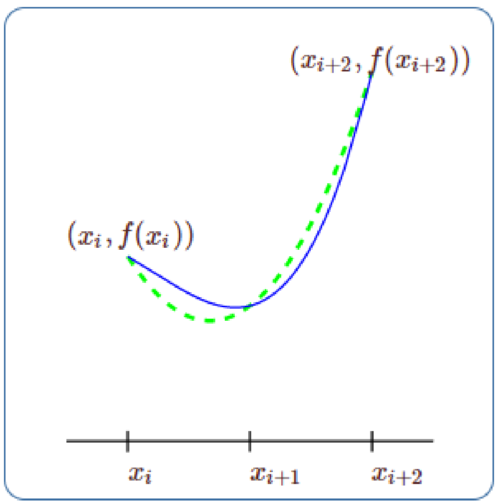
مثال: مقدار Δx در انتگرال $\int_0^1 e^{x^2}dx$ را به روش ذوزنقه ای طوری محاسبه کنید که خطای آن کمتر از ۰.۰۱ شود؟

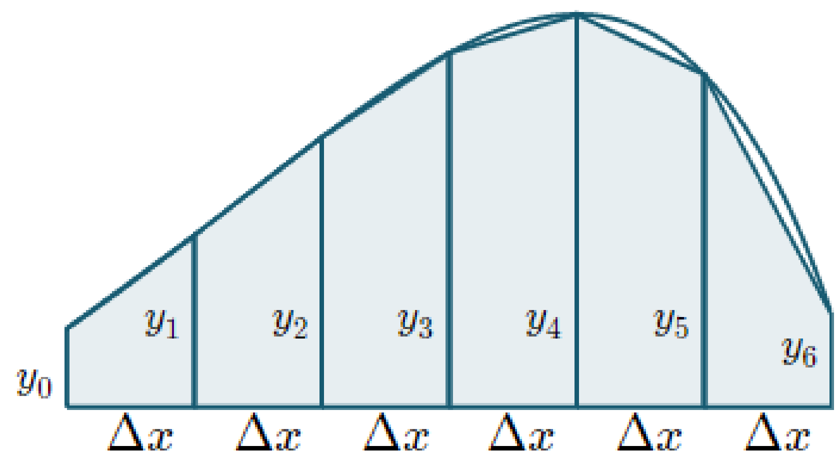
$$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow \ddot{f}(x) = (2+4x^2)e^{x^2} \Rightarrow M = 6e = 16.26$$

$$\frac{h^2}{12} \times 16.26 < 0.01 \Rightarrow h < 0.0859 \Rightarrow h = 0.08$$

روش سیمپسون

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} ax^2 + bx + c\, dx = \frac{\Delta x}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$





$$S = \sum S_i = \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_{3+} \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

x	f
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n

قضیه: فرض کنید f دارای مشتق چهارم $f^{(4)}$ در کل بازه $[a,b]$ بوده و برای همه xهای این بازه، $|f^{(4)}(x)| \le M$. اگر $\Delta x = (b-a)/n$، یک تخمین خطا برای تقریب سیمپسون به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\Delta x) = \frac{b-a}{180} M (\Delta x)^4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M.$$

مثال: محاسبه انتگرال $\int_0^1 x^3 dx$ با فرض $\Delta x = 0.25$

$$S = \sum S_i = \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_{3+} \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

x	f
0	0
0.25	0.0625
0.5	0.25
0.75	0.5625
1	1

$$S = \frac{0.25}{3}(0 + 4(0.0625) + 2(0.25) + 4(0.5625) + 1)$$

$$S = 0.25$$

حل دقیق:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = 0.25$$

نحوه تخمین خطا با تعیین Δx

$$E = -\frac{(b-a)\Delta x^4}{180} M$$

M : کران بالای مشتق چهارم تابع f(x) در بازه مورد نظر است.

تمرین

الف) انتگرال زیر را به صورت عددی به دو روش ذوزنقهای و سیمپسون با دو مقدار $\Delta x = 0.5$ و $\Delta x = 0.25$ به دست آورید؟
خطا را در هر روش محاسبه و مقایسه کنید؟

$$\int_0^2 ax^2 sin(bx)$$

هر نفر باید دو پارامتر a و b را به صورت رندوم در بازه [1,6] انتخاب نماید و انتخاب های هیچ دو نفری شبیه هم نباشد که **نمره صفر** لحاظ خواهد شد. پس ترجیحا اعداد با یک رقم اعشار انتخاب شوند.

ب) مقدار Δx را برای اینکه **خطای** انتگرال در هر روش (ذوزنقه ای و سیپسون) کمتر از ۰.۰۱ باشد تخمین بزنید؟

انتگرال منفرد $\int_a^b f(x)dx$

انتگرالی مشابه زیر را فرض کنید که تابع در یک یا هر دو نقطه انتهایی بازه تعریف نشده باشد

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

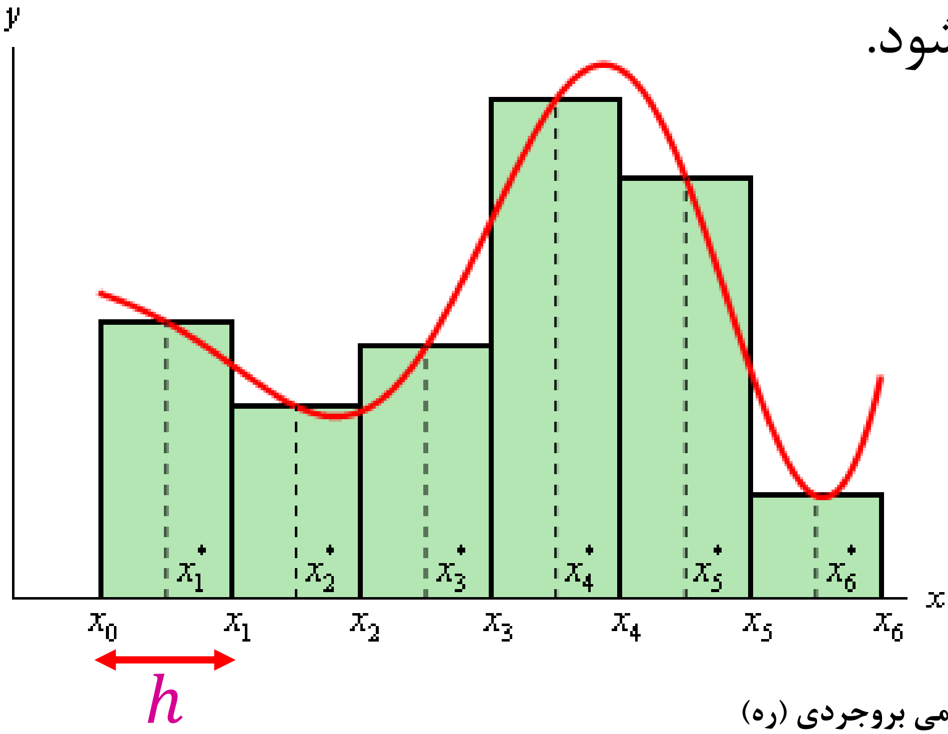
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

مثلا نقطه $x=0$ نقطه منفرد (تکین) تابع $1/\sqrt{x}$ است.

روش نقطه میانی

برای محاسبه مساحت زیر نمودار تابع f در فاصله $[x_i,x_{i+1}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$ استفاده می شود.



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

مثال ۱۴. تقریبی از $\int_{0}^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h = 0.03$ و $h = 0.01$ به روش نقطه میانی به دست آورید.

$$\int_{0}^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.03) = 0.03(f(0.015) + f(0.045) + f(0.075))$$
$$= 0.03(8.1650 + 4.7140 + 3.6515)$$
$$= 0.4959$$

$$\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(۰٫۰۱) = ۰٫۰۱[\frac{۱}{\sqrt{۰٫۰۰۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۰۱۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۰۲۵}} + \cdots$$
$$+ \frac{۱}{\sqrt{۰٫۰۸۵}}] = ۰٫۵۳۹۵۸۷$$

توجه: مقدار واقعی انتگرال عبارتست از $\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} = ۰٫۶$ ، زیرا

$$\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [۲\sqrt{x}]_{۰}^{۰٫۰۹} = ۰٫۶$$

* قاعده‌ی دو نقطه‌ای گاوس:

فرمول های قاعده‌ی گاوس برای فاصله‌ی $[-1, 1]$ بدست می‌آید. با استفاده از تغییر متغیر زیر بازه های $[a, b]$ را به سادگی می‌توان به بازه $[-1, 1]$ تبدیل کرد.

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right] \qquad dx = \frac{b-a}{2}\,du$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

$$g(u) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)u + (b+a)\right]$$

فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

مثال $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ را با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس بدست آورید:

$$\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}(u+1) \rightarrow dx = \frac{\pi}{4}du$$

$$\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(u+1)\right) du = \frac{\pi}{4}\left[\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right] + \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)\right]$$

$$= \boxed{0/998482}$$

ABADANOMRAN

مثال ۱۲ : با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{1}^{2} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

حل . با قرار دادن $x = \frac{u+3}{2}$ خواهیم داشت $dx = \frac{1}{2} du$، لذا

$$\int_{1}^{2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{(\frac{u+3}{2})} du$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3} du \simeq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

که در آن $f(x) = \dfrac{\sin^{۲}(\frac{x+۳}{۲})}{x+۳}$ لذا

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۲۶۶۴۷۵۲۳۶ \quad , \quad f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۳۶۱۶۹۱۲۳۱$$

بنابراین :

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx \simeq ۰/۶۲۸۱۶۶۴۶۷$$

تمرین

الف) انتگرال زیر را به صورت عددی به دو روش ذوزنقهای و سیمپسون با دو مقدار $\Delta x = 0.5$ و $\Delta x = 0.25$ به دست آورید؟

خطا را در هر روش محاسبه و مقایسه کنید؟

$$\int_0^2 ax^2 sin(bx)$$

هر نفر باید دو پارامتر a و b را به صورت رندوم در بازه [1,6] انتخاب نماید و انتخاب های هیچ دو نفری شبیه هم نباشد که **نمره صفر** لحاظ خواهد شد. پس ترجیحا اعداد با یک رقم اعشار انتخاب شوند.

ب) مقدار Δx را برای اینکه **خطای** انتگرال در هر روش (ذوزنقه ای و سیپسون) کمتر از ۰.۰۱ باشد تخمین بزنید؟