فصل دوم: سری، انتگرال و تبدیل فوریه

فهرست مطالب

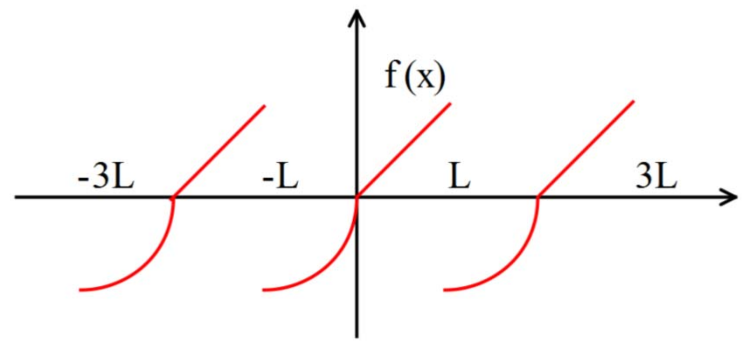
- سری فوریه
- توابع متعامد
- سری فوریه توابع زوج و فرد
- سری فوریه در بازه نامتقارن
- بسطهای نیم دامنه سینوسی و کسینوسی (سریهای فوریه سینوسی و کسینوسی)
- قضیه همگرایی سری فوریه
- رابطه پارسوال
- مشتق و انتگرال سری فوریه
- سری فوریه مختلط
- انتگرال فوریه
- قضیه همگرایی انتگرال فوریه
- انتگرالهای فوریه سینوسی و کسینوسی
- انتگرال فوریه مختلط
- تبدیل فوریه و معکوس آن
- تبدیل فوریه مشتق
- تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه
- تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه مشتق

Dr. Zolfaghari,   zolfaghari@nit.ac.ir

Fourier Series سری فوریه

- تعریف سری فوریه

$$y = f(x); \quad -L < x < L; \quad T = 2L$$



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos\frac{1\pi}{L}x + b_1 \sin\frac{1\pi}{L}x\right) + \left(a_2 \cos\frac{2\pi}{L}x + b_2 \sin\frac{2\pi}{L}x\right) + \ldots$$

$$f(x) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{a_n} \cos\frac{n\pi}{L}x + \boxed{b_n} \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

سری فوریه

ضرایب اویلر

در برخی منابع بصورت A_0
آمده است

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

توابع متعامد (۱)

- دو تابع f_1 و f_2 در بازه *[a,b]* متعامد هستند اگر $\int_a^b f_1(x).f_2(x)=0$

مثال : $\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x.\sin\frac{m\pi}{L}x.dx=\begin{cases}0; & n\neq m\\ L; & n=m\end{cases}$

- اثبات تساوی فوق

-- یادآوری برخی از روابط مثلثاتی

$$\sin\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

توابع متعامد (۲)

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x.\sin\frac{m\pi}{L}x.dx = \int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\left[\cos(n-m)\frac{\pi}{L}x - \cos(n+m)\frac{\pi}{L}x\right]dx$$

$$\text{if } n \neq m:\ \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\frac{\pi}{L}x\Big|_{-L}^{L} - \frac{L}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\frac{\pi}{L}x\Big|_{-L}^{L}\right] = 0$$

$$\text{if } n = m:\ \int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi}{L}xdx = 2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}xdx = 2\times\frac{1}{2}\int_0^L\left(1-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= x\Big|_0^L - \frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x\Big|_0^L = L$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

توابع متعامد (۳)

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi}{L}x \cdot \cos\frac{m\pi}{L}x \, dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ L; & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x \cdot \cos\frac{m\pi}{L}x \, dx = 0$$

ضرایب اویلر سری فوریه (۱)

- برای یافتن ضرایب اویلر، بعنوان مثال ضریب دلخواه a_m، طرفین سری فوریه در $\cos\frac{m\pi}{L}x$ ضرب و سپس در بازه *[-L,L]* انتگرال گیری می شود. m=0, 1, 2, ...

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\longrightarrow\times\cos\frac{m\pi}{L}x\ \text{ and then }\int_{-L}^{L}$$

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x.dx=\int_{-L}^{L}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\right].\cos\frac{m\pi}{L}x.dx$$

انتگرال ۱ : $\displaystyle\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi}{L}x.dx=\frac{a_0}{2}.\frac{L}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{L}x\Big|_{-L}^{L}=0$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ضرایب اویلر سری فوریه (۲)

- انتگرال و سیگما قابل تعویض هستند. بنابراین ابتدا انتگرالها را حساب می کنیم:

انتگرال ۲ : $\int_{-L}^{L} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x.\cos\frac{m\pi}{L}x.dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ a_m L; & n = m \end{cases}$

انتگرال ۳ : $\int_{-L}^{L} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x.\cos\frac{m\pi}{L}x.dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ 0; & n = m \end{cases}$

توابع متعامد

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x.dx = a_m L \Rightarrow a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x.dx$$

- به طریق مشابه برای یافتن ضرایب b_m سری فوریه را در $\sin\frac{m\pi}{L}x$ ضرب نموده و سپس در بازه *[-L,L]* انتگرال گیری می شود. m=1, 2, 3,…

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x.dx = b_m L \Rightarrow b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x.dx$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ضرایب اویلر سری فوریه (۳)

با توجه به مباحث قبل، برای ضرایب اویلر خواهیم داشت

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x.dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x).dx$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

سری فوریه تابع زوج

- اگر تابع *f* در بازه *[-L,L]* زوج باشد

$$f(-x)=f(x)$$

حاصلضرب تابع زوج و فرد، یک تابع فرد است.
لذا انتگرال آن در بازه متقارن *[-L,L]* صفر است

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx=0$$

حاصلضرب تابع زوج و فرد، یک تابع زوج است. لذا انتگرال آن در بازه متقارن *[-L,L]*، دو برابر آن در فاصله *[0,L]* است

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x.dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x.dx$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x).dx$$

سری فوریه کسینوسی

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

سری فوریه تابع فرد

- اگر تابع *f* در بازه *[-L,L]* فرد باشد

$$f(-x) = -f(x)$$

تابع زیر انتگرال، فرد است

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x.dx = 0$$

$$a_0 = 0$$

تابع زیر انتگرال، زوج است

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx$$

سری فوریه سینوسی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

یک مثال پایه از سری فوریه

سری فوریه تابع روبرو را با $T=2\pi$ بدست آورید

$$f(x)=\begin{cases}-k; & -\pi<x<0\\ k; & 0<x<\pi\end{cases}$$

-- حل: تابع فرد است. بنابراین

$$L=\pi$$

$$a_n=0 \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}k\sin n\,x.dx=-\frac{2k}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2k}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$\cos n\pi=(-1)^n\,,\ f(x)=\frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx$$

بصورت دیگر نیز می توان نشان داد

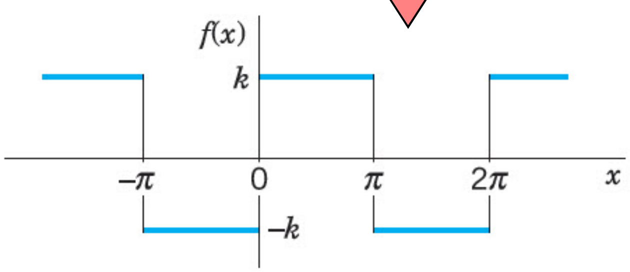
$$b_n=\begin{cases}\dfrac{4k}{n\pi}; & \text{فرد } n\\ 0; & \text{زوج } n\end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}=\frac{4k}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right]$$

$$S_1=\frac{4k}{\pi}\sin x,\ S_2=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right),\ S_3=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

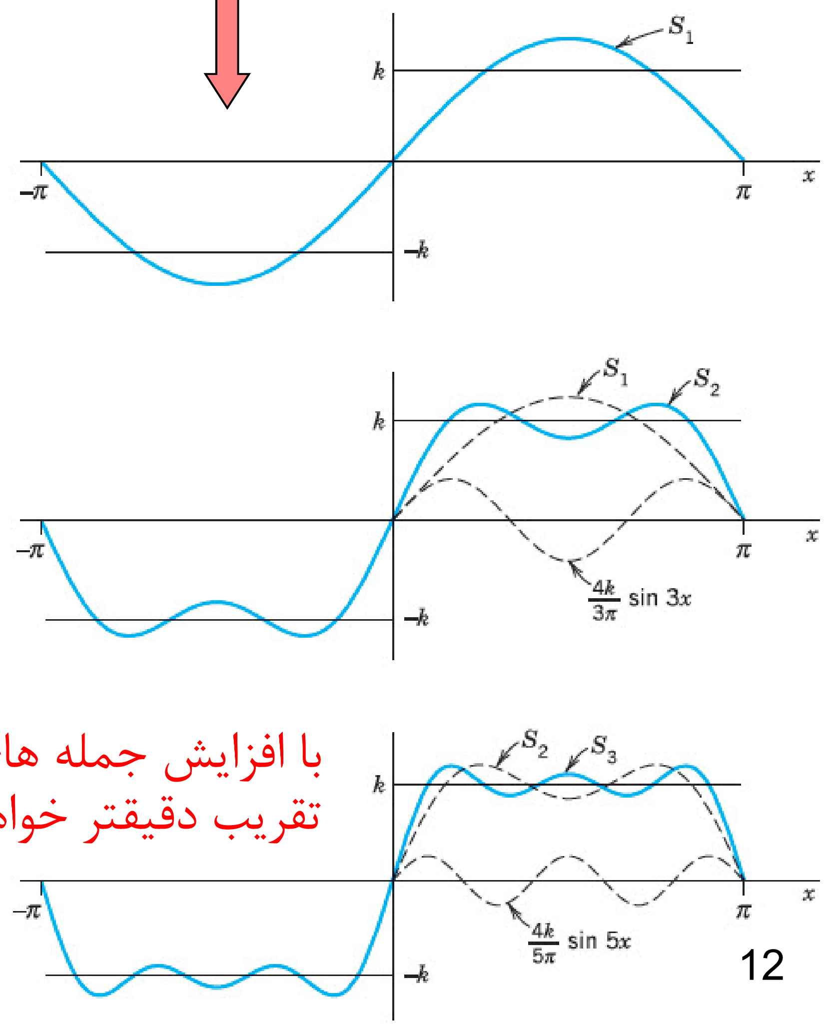
ادامه مثال

$$f(x) = \begin{cases} -k; & -\pi < x < 0 \\ k; & 0 < x < \pi \end{cases}$$



تابع تعریف شده با ضابطه *f(x)*

نحوه تقریب تابع با استفاده از سری فوریه



با افزایش جمله های سری،
تقریب دقیقتر خواهد شد

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

سری فوریه در بازه نامتقارن

اگر *f (x)* در بازه $\alpha < x < \alpha + 2L$ تعریف شده باشد و *T=2L* دوره تناوب آن باشد

$$a_n = \frac{1}{\underset{=\frac{T}{2}}{L}} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{\underset{=\frac{T}{2}}{L}} x dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

مثال–سری فوریه در بازه نامتقارن

سری فوریه تابع $f(x) = x; 0 < x < 2\pi$ را با $T=2\pi$ بدست آورید

حل:

$$L = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{n^2}[1-1] = 0;\ n \neq 0$$

انتگرال جزء به جزء

	x	$cosnx$
+		
-	1	$\frac{1}{n}sinnx$
	0	$-\frac{1}{n^2}cosnx$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}x^2\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\times 4\pi^2 = 2\pi$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin n\, x dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n} - 0\right] = -\frac{2}{n}$$

انتگرال جزء به جزء

+	x	$sinnx$
-	1	$-\frac{1}{n}cosnx$
	0	$-\frac{1}{n^2}sinnx$

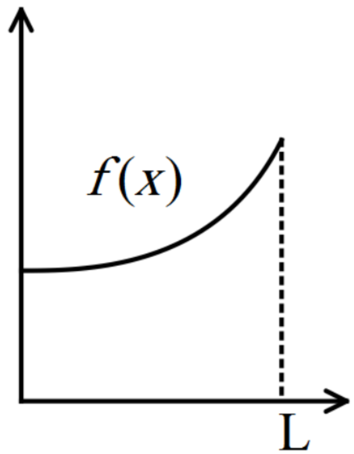
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\boxed{f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

بسطهای نیم دامنه کسینوسی و سینوسی

- تابع $y = f(x)$ را در بازه $0 < x < L$ در نظر بگیرید. می خواهیم سری فوریه این تابع که متناوب نیست را بدست آوریم

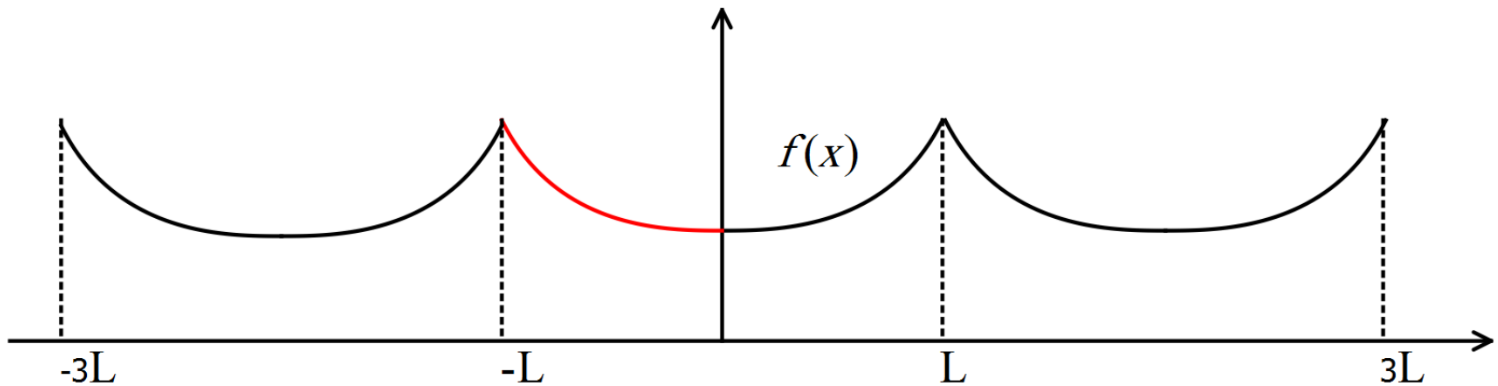


- یادآوری می شود که سری فوریه برای توابع متناوب بکار می رود
- می توان تابع را بصورت زوج و یا فرد گسترش داد و بصورت متناوب فرض کرد. سری فوریه را می توان برای این تابع متناوب بدست آورد
- در محدوده $0 < x < L$ سری فوریه مربوطه قابل دست یابی است
- از گسترش زوج و فرد به ترتیب سریهای فوریه کسینوسی و سینوسی به دست می آید

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

سری فوریه کسینوسی

-- تابع $f(x)$ را بصورت زوج گسترش می دهیم



$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$b_n = 0$$

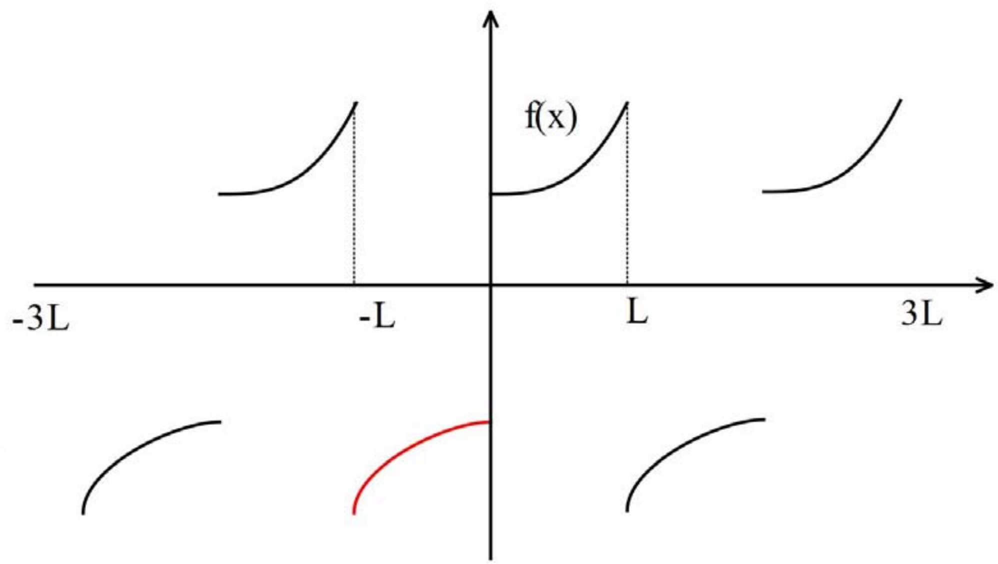
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x;\; 0 < x < L$$

سری فوریه کسینوسی

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

سری فوریه سینوسی

-- تابع $f(x)$ را بصورت فرد گسترش می دهیم



$$a_n = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x;\ 0 < x < L$$ سری فوریه سینوسی

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-سریهای فوریه کسینوی و سینوسی

دو بسط نیم دامنه کسینوسی و سینوسی تابع دو ضابطه ای زیر را به دست آورید

-- حل سری فوریه کسینوسی:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x; \ 0<x<\dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L-x); \ \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{L}\times\frac{2k}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}}x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]$$

$$=\frac{4k}{(n\pi)^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right)$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{L}\times\frac{2k}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}}x\,dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\,dx\right]=k$$

$$\boxed{f(x)=\frac{k}{2}+\frac{4k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right)\cos\frac{n\pi}{L}x}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

-- حل سری فوریه سینوسی

$$a_n = 0$$
$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}\text{xdx} = \frac{2}{L}\times\frac{2k}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} x\ \sin\frac{n\pi}{L}\text{xdx} + \int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}\text{xdx}\right]$$
$$= \frac{8k}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

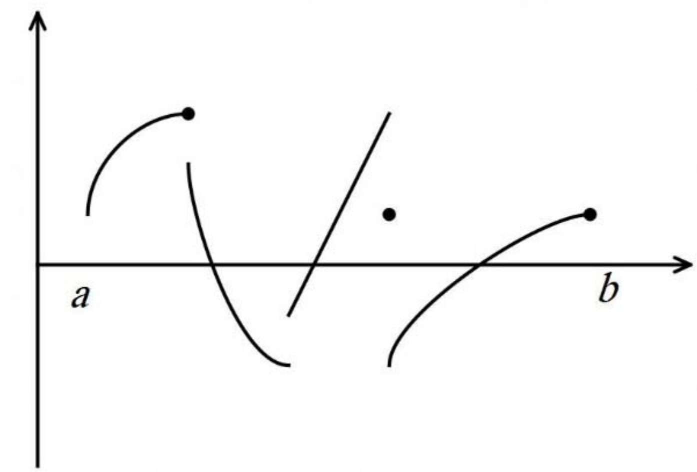
Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

تابع پیوسته تکه ای

تعریف تابع پیوسته تکه ای:

-- اگر x از داخل بازه ها به سمت دو انتهای بازه میل کند، $f(x)$ به سمت حدی متناهی میل می کند

-- به عبارت دیگر $f(x)$ در انتهای بازه ها دارای حدود چپ و راست متناهی هستند

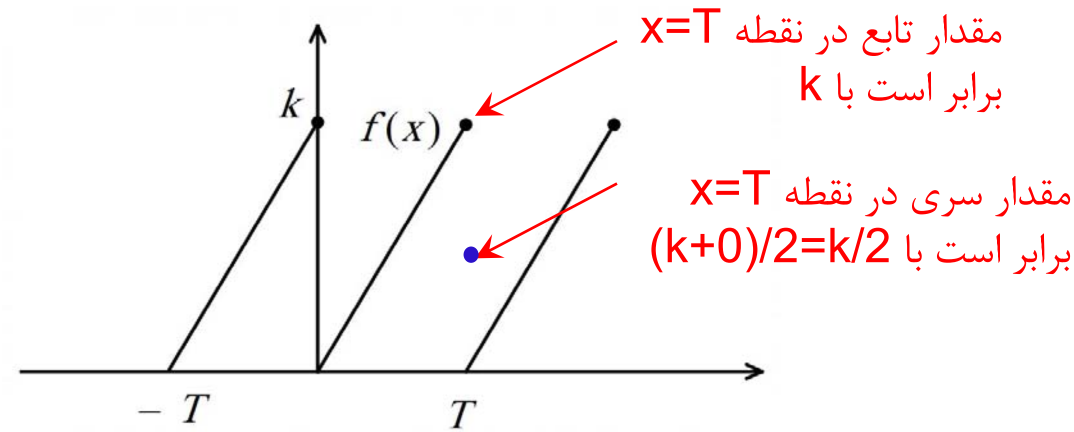


یک تابع با مشخصات پیوسته تکه ای

همگرایی سری فوریه

اگر $f(x)$ در بازه *[L,-L]* یک تابع تکه ای پیوسته و متناوب با *T=2L* باشد، آنگاه
مقدار سری فوریه در x برابر است با میانگین حدود چپ و راست تابع در x

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}$$



Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

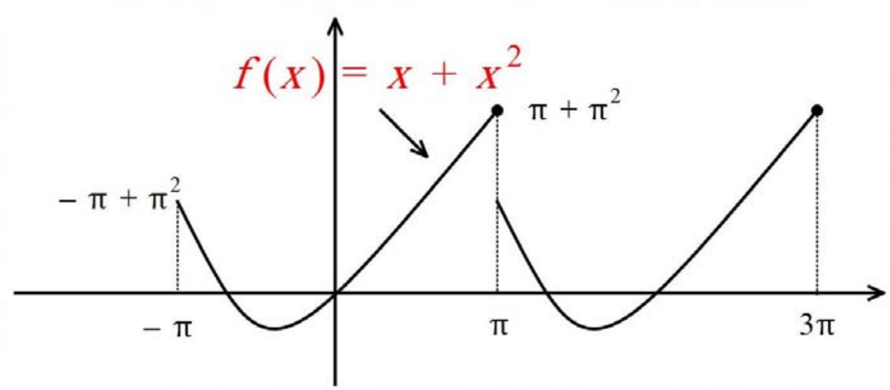
مثال–همگرایی سری فوریه و تعیین سری متناظر

الف) سری فوریه تابع $f(x) = x + x^2$ را در فاصله $-\pi < x \leq \pi$ با دوره تناوب $T=2\pi$ بیابید. ب) با توجه به الف مقدار سری S زیر را بیابید:

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

حل الف:

برای درک بهتر نمودار تابع را رسم می کنیم



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + x^2\right)\cos nx\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + x^2\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + x^2\right)\sin nx\,dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx - \frac{2}{n}(-1)^n \sin nx\right]}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

حل ب:

برای به دست آوردن مقدار سری از قضیه همگرایی سری فوریه استفاده می کنیم

$$x=\pi \Rightarrow \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos n\pi - 0\right]=\frac{1}{2}\left[\pi+\pi^2+\left(-\pi+\pi^2\right)\right]\Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{3}+4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\pi^2 \Rightarrow \boxed{S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}}$$

- یک سری دیگر را با جایگذاری $x=0$ می توان به دست آورد

$$x=0\Rightarrow \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n - 0\right]=\frac{1}{2}[0+0]\Rightarrow$$

$$-\frac{\pi^2}{12}=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{12}}$$

رابطه پارسوال

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\longrightarrow\quad\times f(x)\text{ and then }\int_{-L}^{L}$$

$$\int_{-L}^{L}\left[f(x)\right]^2dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)dx}_{a_0L}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx}_{L.a_n}+b_n\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx}_{L.b_n}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left[f(x)\right]^2dx=\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2+(b_n)^2\right]}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

رابطه پارسوال برای سری فوریه سینوسی

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \quad \longrightarrow \quad \times f(x) \text{ and then } \int_0^L$$

$$\int_0^L \left[f(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\frac{L}{2}b_n} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\right)^2}$$

رابطه پارسوال برای سری فوریه کسینوسی

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \longrightarrow \times f(x) \text{ and then } \int_0^L$$

$$\int_0^L\left[f(x)\right]^2dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^L f(x)\,dx}_{\frac{L}{2}a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\frac{L}{2}a_n}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{2}{L}\int_0^L\left[f(x)\right]^2dx=\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2}$$

مثال–استفاده از رابطه پارسوال

الف) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = sinx$ را در بازه $0 < x < \pi$ بدست آورید. ب) سپس حاصل سری عددی S زیر را بدست آورید

$$S = \frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \ldots$$

حل الف:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x . \cos nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1-n^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]; \; n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x . \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 0; & \text{فرد } n \\ \frac{4}{\pi} . \frac{1}{1-n^2}; & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

حل ب:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(1-4n^2\right)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2-8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-4n^2\right)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2-8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-2n)^2(1+2n)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{S = \frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2-8}{16}}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مشتق و انتگرال سری فوریه

اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته تکه ای در بازه *[-π,π]* با دوره تناوب *T=2π* باشد آنگاه:

-- سری فوریه تابع $f'(x)$ را با مشتق گیری از سری فوریه $f(x)$ می توان بدست آورد

-- می توان جمله به جمله از سری فوریه انتگرال گیری نمود

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-مشتق گیری از سری فوریه

الف) سری فوریه کسینوسی $f(x) = sinx$ را در بازه $0 < x < \pi$ بیابید. ب) سپس با مشتق گیری از نتیجه الف سری فوریه $f(x) = cosx$ را بیابید

حل الف:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x . \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\frac{\left[1+(-1)^n\right]}{\left(1-n^2\right)}; \; n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x . \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \begin{cases} 0; & \text{فرد } n \\ \frac{4}{\pi} . \frac{1}{1-(2n)^2}; & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{\left(1-4n^2\right)}}$$

حل ب: با مشتق گیری از سری بالا

$$\boxed{\cos x = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{1-4n^2}}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-انتگرال گیری از سری فوریه

سری فوریه $f(x) = x^2$ را با انتگرال گیری از سری فوریه $f(x) = x$ در بازه $-\pi < x < x$ بدست آورید

حل: بدون انجام محاسبات سری فوریه سینوسی برابر است با

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

با انتگرال گیری از سری فوق

$$\frac{x^2}{2} = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}}$$

سری فوریه مختلط

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $-L < x < L$ دارای دوره تناوب $T=2L$ باشد، آنگاه فرم مختلط سری فوریه آن برابر است با:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi}{L}x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- فرم حقیقی سری فوریه را می توان از فرم مختلط آن به دست آورد

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

جمع دو عبارت

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

تفریق دو عبارت

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

- یاد آوری از اعداد مختلط

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

جمع دو عبارت

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

تفریق دو عبارت

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

مثال- سری فوریه مختلط

صورت مختلط سری فوریه $f(x) = e^{-x}$ را در بازه $-\pi < x < \pi$ به دست آورید

حل: $L = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}\, dx = \frac{-1}{2\pi(in+1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right]$$

$$e^{-(in+1)\pi} = e^{-\pi}(\cos n\pi - i\sin n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}$$

$$e^{(in+1)\pi} = e^{\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi) = (-1)^n e^{\pi}$$

$$\Rightarrow c_n = (-1)^n \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(in+1)} \xrightarrow[\text{و تقسیم می کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج ضرب}} \times\frac{1-in}{1-in} \Rightarrow c_n = \frac{\sinh\pi}{\pi}.\frac{1-in}{1+n^2}(-1)^n$$

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \sinh\pi$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-in}{1+n^2}(-1)^n e^{inx}}$$

انتگرال فوریه Fourier Integral

اگر تابع $f(x)$ در بازه $-\infty < x < \infty$ تعریف شود و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ کراندار باشد آنگاه انتگرال فوریه تابع وجود داشته و برابر است با

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[a(w)\cos wx + b(w)\sin wx \right] dw$$

$$\left.\begin{aligned} a(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx \\ b(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx \end{aligned}\right\} \text{ضرایب اویلر}$$

w: عدد غیر صحیح است

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

همگرایی انتگرال فوریه

مشابه با همگرایی سری فوریه خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty \left[a(w)\cos wx + b(w)\sin wx\right]dw = \frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-انتگرال فوریه

الف) انتگرال فوریه تابع پیوسته تکه ای $f(x)$ زیر را بدست آورید

ب) سپس مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ را با توجه به الف بدست آورید

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ 1; & 0<x<2\\ 0; & x>2\end{cases}$$

حل الف: ابتدا شرط لازم وجود انتگرال فوریه بررسی می شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^2 dx=2<M$$

پس دارای انتگرال فوریه است

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^2 \cos wx\,dx=\frac{1}{\pi w}\sin wx\,\Big]_0^2=\frac{1}{\pi w}\sin 2w$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^2 \sin wx\,dx=\frac{-1}{\pi w}\cos wx\,\Big]_0^2=\frac{1}{\pi w}(1-\cos 2w)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin 2w}{w}\cos wx+\frac{1}{w}(1-\cos 2w)\sin wx\right]dw}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

حل ب: بر اساس قضیه همگرایی انتگرال فوریه

$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2w}{w}dw=\frac{f\left(\cancelto{0}{0^-}\right)+f\left(\cancelto{1}{0^+}\right)}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin 2w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$$

تغییر متغیر $u=2w$

$$\begin{aligned} u&=2w\\ dw&=du/2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}}$$

انتگرالهای فوریه کسینوسی و سینوسی

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $-\infty < x < \infty$ زوج باشد و شرط لازم انتگرال فوریه برقرار باشد

$$b(w) = 0$$

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty a(w)\cos wx\,dw$$ انتگرال فوریه کسینوسی

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $-\infty < x < \infty$ فرد باشد و شرط لازم انتگرال فوریه برقرار باشد

$$a(w) = 0$$

$$b(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty b(w)\sin wx\,dw$$ انتگرال فوریه سینوسی

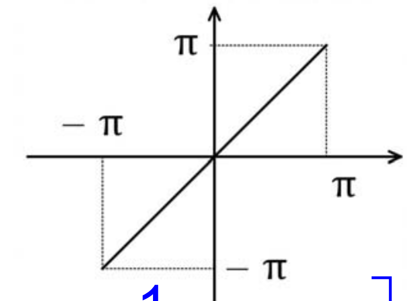
Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-انتگرال فوریه سینوسی

انتگرال فوریه تابع روبرو را به دست آورید

$$f(x)=\begin{cases} x; & |x|<\pi \\ 0; & |x|>\pi \end{cases}$$

حل: تابع فرد است



$$a(w)=0 \qquad b(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$

$$b(w)=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos wx+\frac{1}{w^2}\sin wx\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{w}\cos w\pi+\frac{1}{w^2}\sin w\pi\right]$$

$$=\frac{2}{\pi w}\left[\frac{\sin w\pi}{w^2}-\pi\cos w\pi\right]$$

$$\begin{cases} \sin w\pi\neq 0 \\ \cos w\pi\neq(-1)^n \end{cases}$$

w عدد صحیح نیست. لذا

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{w}\left[\frac{\sin w\pi}{w^2}-\pi\cos w\pi\right]\sin wx\,dw}$$

انتگرال فوریه در $0 < x < \infty$

- در این حالت، همانند سری فوریه می توان تابع را بصورت زوج یا فرد گسترش داد
- با در نظر گرفتن تابع بصورت زوج:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(w)\cos wx\, dw$$

انتگرال فوریه کسینوسی

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\, dx$$

- با در نظر گرفتن تابع بصورت فرد:

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(w)\sin wx\, dw$$

انتگرال فوریه سینوسی

$$b(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\, dx$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال–انتگرال فوریه کسینوسی و سینوسی

انتگرال فوریه کسینوسی و سینوسی تابع $f(x)=e^{-x}$ را در $x>0$ بدست آورید

حل انتگرال فوریه کسینوسی:

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx = \cancel{e^{-x}\frac{\sin wx}{w}\Big|_0^\infty}^{\,0} - \cancel{\frac{e^{-x}}{w^2}\cos wx\Big|_0^\infty}^{\,-1/w^2} - \frac{1}{w^2}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx$$

انتگرال جزء به جزء

+	e^{-x}	$\cos wx$
-	$-e^{-x}$	$\frac{1}{w}\sin wx$
+	e^{-x}	$-\frac{1}{w^2}\cos wx$
		$\int \frac{-1}{w^2}\cos wx\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx = \frac{1}{1+w^2}$$

$$\Rightarrow a(w)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+w^2}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}dw}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

ادامه مثال

حل انتگرال فوریه سینوسی:

$$b(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin wx dx=\frac{2}{\pi}\frac{w}{1+w^2}$$

مشابه با قبل، انتگرال جزء به جزء گرفته شود

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w.\sin wx}{1+w^2}dw}$$

نکته: از تبدیل لاپلاس نیز می توان برای حل انتگرال استفاده کرد

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\sin wt dt=\ell[\sin wt]=\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$\begin{cases} s=1 \\ t\equiv x \end{cases}\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x}\sin wx dx=\frac{w}{1+w^2}$$

و

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cos wt dt=\ell[\cos wt]=\frac{s}{s^2+w^2}$$

$$\begin{cases} s=1 \\ t\equiv x \end{cases}\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x}\cos wx dx=\frac{1}{1+w^2}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

انتگرال فوریه مختلط

همانند سری فوریه مختلط، انتگرال فوریه یک تابع حقیقی را نیز می توان بصورت مختلط نوشت

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w) e^{iwx} dw$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

تبدیل فوریه و معکوس

- همانند تبدیل لاپلاس یک تابع $f(x)$، تبدیل فوریه نیز بر $f(x)$ عمل می کند
- در تبدیل لاپلاس داریم $l\{f(t)\}=F(s)$. در اینجا: $t\rightarrow s$
- در تبدیل فوریه داریم $F\{f(x)\}=\tilde{f}(w)$. در اینجا: $x\rightarrow w$

تبدیل فوریه

$$F\{f(x)\}=\tilde{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$$

تبدیل فوریه معکوس

$$F^{-1}\{\tilde{f}(w)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(w)e^{iwx}dw$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-تبدیل فوریه

الف) تبدیل فوریه تابع *f(x)* داده شده را بدست آورید. ب) سپس مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ را با توجه به الف محاسبه نمایید

$$f(x)=\begin{cases}1; & |x|<1\\ 0; & |x|>1\end{cases}$$

حل الف:

$$\tilde{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Bigg]_{-1}^{1}=\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)}_{2i\sin w}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}}$$

حل ب:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}e^{iwx}dw=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}e^{iwx}dw$$

$$x=0\Rightarrow 1=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw$$

تابع زوج است $=2\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}dw$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

تبدیل فوریه مشتق مرتبه اول

- اگر $|x| \longrightarrow \infty$ داشته باشیم $f(x) \longrightarrow 0$

if $|x| \to \infty,\ f(x) \to 0$ $\Longrightarrow$ $F\{f'(x)\} = iwF\{f(x)\}$

- اثبات: کراندار است $\cos wx - i\sin wx$

$$F\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iw \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right]$$

انتگرال جزء به جزء

$\lim f(x) \to 0$
$x \to -\infty$
$x \to \infty$

+	e^{-iwx}	$f'(x)$
-	$-iwe^{-iwx}$	$f(x)$
		$\int f(x)dx$

$$= iw \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = iwF\{f(x)\}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

تبدیل فوریه مشتق مرتبه دوم

- اگر $|x| \longrightarrow \infty$ داشته باشیم $f(x) \longrightarrow 0$ و $f'(x) \longrightarrow 0$

$$\text{if } |x| \to \infty, \quad \begin{cases} f(x) \to 0 \\ f'(x) \to 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad F\{f''(x)\} = -w^2 F\{f(x)\}$$

- مانند قبل اثبات می شود

تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی

$$y = f(x);\ 0 < x < \infty$$

$$F_c\{f(x)\} = \tilde{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx$$ تبدیل فوریه کسینوسی

$$F_c^{-1}\{\tilde{f}_c(w)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_c(w)\cos wx\,dw$$ تبدیل فوریه کسینوسی معکوس

$$F_s\{f(x)\} = \tilde{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$ تبدیل فوریه سینوسی

$$F_s^{-1}\{\tilde{f}_s(w)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_s(w)\sin wx\,dw$$ تبدیل فوریه سینوسی معکوس

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی مشتقات

اگر داشته باشیم

$$\text{if } x \to \infty, \quad \begin{cases} f(x) \to 0 \\ f'(x) \to 0 \end{cases}$$

- تبدیل فوریه کسینوسی مشتقات

$$F_c\{f'(x)\} = wF_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

$$F_c\{f''(x)\} = -w^2F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$$

- تبدیل فوریه سینوسی مشتقات

$$F_s\{f'(x)\} = -wF_c\{f(x)\}$$

$$F_s\{f''(x)\} = -w^2F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0)$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

مثال-تبدیل فوریه کسینوسی

تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-ax}; a > 0$ را به دست آورید

حل:

$$\left(e^{-ax}\right)'' = a^2 e^{-ax} \Longrightarrow f''(x) = a^2 f(x) \xrightarrow[\text{کسینوسی گرفته شود}]{\text{از طرفین تبدیل فوریه}}$$

$$a^2 F_c\{f(x)\} = F_c\{f''(x)\} = -w^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

$$-ae^{-ax}\Big|_{x=0} = -a$$

$$\left(a^2 + w^2\right) F_c\{f(x)\} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Rightarrow F_c\{f(x)\} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + w^2}}$$

Dr. Zolfaghari, zolfaghari@nit.ac.ir

Thanks for
Your Attention
and
Any Question?