جزوه آموزشی

((توان و نماد علمی))

قسمت اول

❖مقدمه مدرس :

بحث توان یکی از مباحث شیرین و در عین حال پر اهمیت در علم ریاضیات است. این بخش کاربرد فراوانی در اکثر مسائل و موضوعات مختلف ریاضیات داشته و بسیاری از دانش آموزان و علاقه مندان به ریاضی در این بحث دارای پایه ای قوی نیستند. در واقع برای موفقیت در کنکور ابتدا باید پایه خود را قوی گردانید. یکی از این مباحث مهم مبحث توان است.دراین جزوه آموزشی قصد دارم مبحث توان را با تعاریف ساده و مثالها و تستهای متنوع ارائه کرده و دانش آموزان را از مراجعه به هر منبع دیگری بی نیاز کنم. در پایان آموزش هم نمونه تستهای آزمونهای استاندارد از جمله کنکورها و سایر آزمونهای دشوار انتخاب و حل و بررسی می شوند. زبان آموزش در این جزوه برای ضعیف ترین دانش آموز انتخاب شده و لذا سایر دانش آموزان نیز به راحتی می توانند از آن استفاده نمایند.(برای این آموزش از زبان غیر رسمی استفاده کرده ام تا خواننده احساس ارتباط نزدیک با مدرس را لمس نماید.)

منتظر نظرات و انتقادات و پیشنهادات دل گرم کننده شما دوستان عزیز هستم. می توانید به سایت من به آدرس www.gozineto.ir مراجعه و اگر نیاز به مشاوره برای رتبه برتر شدن یا راهنمایی در خواندن همه ی درسها یا سوال ریاضی دارید با من در ارتباط باشید.

همینطور در خصوص نحوه آموزش این جزوه یا ادامه روند آموزشها و مباحثی که بیشتر مورد نظرشما هست هم میتوانید با من در ارتباط باشید. همینطور اگر به اشکالی در نحوه تنظیم جزوه یا اشتباه تایپی برخوردید خوشحال خواهم شد با من درجریان بذارید.

پس از تیرگی، روشنی گیرد آب

بر آید پس از تیره شب، آفتاب

از پی هر شکست پیروزی است

از دل شب، سپیده می آید

مجموعه اعداد طبیعی:

ما برای شمردن چیزها مثلاً ستاره ها از عدد ۱ به بعد استفاده می کنیم. یعنی همیشه از یک شروع به شمردن می کنیم. میگم ۱ ستاره، ۲ ستاره و... و هیچوقت شمردن رو از عدد صفر یا منفی شروع نمی کنیم. مثلاً نمیگیم صفر ستاره، ۱ ستاره و.... پس مجموعه اعداد طبیعی از عدد ۱ شروع میشه و صفر و عدد منفی هم نداره. عدد کسری یا ممیزی هم نداره. ما هیچوقت نمیگیم یک و نیم ستاره(۱/۵) یا نمیگیم دو سوم ($\frac{۲}{۳}$) کفش خریدم.!!! پس یادمون باشه وقتی میگن مجموعه اعداد طبیعی، یعنی مجموعه ای که از عدد ۱ شروع میشه و عدد صفر و عدد منفی و عدد کسری و عدد اعشاری و ممیزی و عدد رادیکالی داخل اون مجموعه نیست. مجموعه اعداد طبیعی رو با N نمایش میدیم به صورت: N={۱,۲,۳,۴,.......} چند نقطه ای که آخر مجموعه گذاشتیم، یعنی هر چقدر ستاره باشه میتونیم شمارش کنیم یعنی بی نهایت تا. به بیان ساده تر یعنی آخرش معلوم نیست چه عددیه.

مجموعه اعداد حقیقی:

مجموعه ای که داخل اون اعداد ممیزی و اعشاری و مثبت و منفی و حتی اعداد طبیعی داریم. مثلاً عدد ۱/۱. این مجموعه رو با R نمایش میدیم. پس معلومه که مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه اعداد طبیعی بزرگتره.

تعریف حاصلجمع:

میدونیم اگه یه عدد فرضی مثلاً عدد ۲ رو ۱۰ بار با خودش جمع کنیم، به صورت زیر نوشته میشه :

$$۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲=۲۰$$

خب به نظر شما اشکالی داره ما این همه عدد ۲ رو که باهم جمع کردیم خلاصه تر بنویسیم؟؟ یعنی چون ۱۰ بار عدد ۲ رو با خودش جمع کردیم بگیم خب من یک عدد ۲ رو نگه میدارم و در عدد ۱۰ ضربش میکنم.(چون ۱۰ تا عدد ۲ داشتم) جواب چند میشه؟بازم ۲۰ میشه. یعنی هیچ فرقی نداشت با حالت اول. فقط فایده ش این بوده که خلاصه تر نوشته شد و مجبور نبودیم اون همه عدد ۲ رو با هم جمع کنیم.

$$۱۰\times۲=۲۰$$

به همین راحتی ما به یک قانون دست پیدا کردیم. قانونی که میگه :

اگر m یک عدد حقیقی باشد یعنی عضو مجموعه R باشد(یعنی ما از داخل مجموعه R انتخابش کنیم.اون بالا گفتیم مجموعه R شامل چه عددهایی میتونه باشه) و این عدد m را n بار با خودش جمع کنیم، (n هم یک عدد طبیعی است یعنی از مجموعه N انتخاب شده است) آنگاه می توان رابطه زیر را نوشت:

$$\boxed{\text{na} = \underbrace{a+a+a+a+\cdots+a}_{\text{n بار}}}$$

حالا شما باتوجه به تعریف بالا میشه بگید عدد ٤π یعنی چی؟؟ آفرین یعنی عدد π ، ۴ بار با خودش جمع شده.

یعنی:

$$۴\pi = \pi+\pi+\pi+\pi$$

بله درسته. یعنی طبق قانون بالا عدد π ، ۴ بار با خودش جمع شده و یک عدد π رو در عدد ۴ ضرب کردیم تا خلاصه بنویسیمش.

مثال ۱: عدد $-۳\sqrt{۲}$ رو به صورت حاصلجمع بنویسید.

حل : خیلی راحت طبق قانون بالا و مثال بالا داریم:

$$-۳\sqrt{۲} = (-\sqrt{۲}) + (-\sqrt{۲}) + (-\sqrt{۲})$$

یعنی عدد $(-\sqrt{۲})$ رو ۳ بار با خودش جمع کردیم و برای راحتی یه $-\sqrt{۲}$ رو نگه داشتیم و در ۳ ضربش کردیم. چرا در ۵ ضربش نکردیم؟؟؟؟؟ آقا عجب سوالی می پرسیدها!!! خب معلومه دیگه چون ما سه تا $-\sqrt{۲}$ داشتیم نه پنج تا.

حالا بیکار نشینین و خودتون مثال درست کنین و به صورت قانون بالا بنویسین.

پس دیدین اگه یه عدد رو n بار با خودش جمع کنیم، کافیه تا یه ضرب ساده انجام بدیم و اونو خلاصه تر بنویسیم. مفهوم توان هم یه چیزی تو همین مایه هاس که الان میریم سراغش و به خدمتش میرسیم.

تعریف توان:

ما توی تعریف حاصلجمع که بالا گفتیمش، یه عدد رو چند بار با خودش جمع کردیم. بعد یک عددشو نگه داشتیم و در تعدادش ضرب کردیم.حالا اگه ما بیایم این عدد رو به همون تعداد در خودش ضرب کنیم به جای جمع کردن چی میشه؟؟؟(یعنی عدد ۲ رو ۱۰ بار در خودش ضرب کنیم.)هیچی؟؟؟؟؟ نه بابا میشه تعریف توان.!!!! یعنی:

$$۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲= ۱۰۲۴$$

خب چقدر طولانی شد این ضرب کردن. بهتر نیست خلاصه بنویسیم اون رو مثل تعریف حاصلجمع؟؟؟

چرا میشه. پس مثل تعریف حاصلجمع، اینجا هم یکی از عددهای ۲ رو نگه میداریم و بالای اون یعنی قسمت بالا وگوشه سمت راستش عدد ۱۰ رو میذاریم. یعنی :

$$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

جواب هر دو رابطه هم شد ۱۰۲۴ . یعنی ما خلاصه کاری کردیم. این تعریف توانه. عدد ۲ به توان ۱۰ یعنی ما ۱۰ بار عدد ۲ رو در خودش ضرب کنیم. حالا بازم به یه قانون دیگه دست پیدا کردیم که میگه :

اگر m یک عدد حقیقی باشد یعنی عضو مجموعه R باشد و n هم یک عدد طبیعی(یعنی از مجموعه N انتخاب شده است)آنگاه توان nاُمِ عدد m را به شکل زیر نوشته و می خوانیم: m به توان n . یا m به قوه ی n . یا m با نمای n .

$$m^n = \underbrace{m \times m \times m \times m \times \dots \dots \times m}_{\text{n بار}}$$

در عبارت m^n ، به عدد m میگیم پایه و به عدد n میگیم توان یا نما یا قوه. به خود m^n میگیم یک عدد توان دار.

مثال ۲ : عدد ۲ به قوه ۳ یعنی چی؟؟؟ عدد ۲ به توان ۳ یعنی چی؟؟؟ عدد ۲ با نمای ۳ یعنی چی؟؟؟

حل : همشون یه معنی دارن. اونم اینه که عدد ۲ رو پایین بنویس و عدد ۳ رو بفرست بالا گوشه سمت راست. یعنی به شکل: $۲^۳$

پس فهمیدیم اگر یک عدد رو به توان یک عدد دیگه برسونیم، معنیش اینه عدد اول رو به اندازه اون توان در خودش ضرب کنیم. شاید بپرسین چرا گفتیم توان(یعنی عدد n)رو از مجموعه اعداد طبیعی انتخاب کردیم؟؟آیا همیشه توان باید عدد طبیعی باشه؟؟ نه. توان میتونه حتی عدد منفی باشه و حتی عدد کسری و ممیزی باشه مثل : $۲^{-۱۰}$ یا $۲^{\frac{۲}{۳}}$

مثال ۳ : عبارت $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$ رو به شکل یک عدد توان دار بنویسید.

حل : عدد $\sqrt{۲}$ چندبار نوشته شده؟؟ ۴ بار . بینشون چه علامتیه؟؟؟ ضربه. یعنی $\sqrt{۲}$ تعداد ۴ بار در خودش ضرب شده و این تعریف توان میشه. کافیه که ما یکی از $\sqrt{۲}$ ها رو بنویسیم و بالای اون گوشه سمت راست عدد ۴ رو بذاریم. پس:

$$(\sqrt{۲})^{۴}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$$

حالا من میپرسم از شما که اگه در عبارت صورت سوال به جای ضرب، بین رادیکالها جمع بود باید چه کاری انجام میدادیم؟

بله درسته. از قانون حاصلجمع که همون اول گفتیم استفاده می کردیم یعنی:

$$۴\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}$$

مثال ۴ : عدد $\frac{۲}{۳}$ رو به شکل عدد توان دار بنویسید.

حل : مگه میشه همچین کاری کرد؟؟ عدد $\frac{۲}{۳}$ که فقط یکبار نوشته شده و در خودش ضرب نشده که به شکل تواندار نوشتش.!!!

نه دانش آموز عزیز. میتونیم بگیم عدد $\frac{۲}{۳}$ فقط یکبار در خودش ضرب شده و کافیه براش توان ۱ بذاریم. به صورت زیر:

$$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱}=\frac{۲}{۳}\times۱$$

نکته ۱ : هر عدد رو که به توان ۱ برسونیم حاصلش میشه خود همون عدد. $۲^{۱}=۲\times۱=۲$

تا اینجا با مفهوم توان و مفهوم حاصلجمع و نکات مقدماتیش آشنا شدیم. حالا میریم سراغ قانون های حساب کردن توان. یعنی قانونهایی که ما توی حل مسائل توان، باید اونها رو رعایت کنیم و به کار ببریم تا به جواب درست برسیم. ما فعلاً قدم به قدم حل میکنیم تا ذهن شما با به کارگیری این قوانین آشنا بشه و بعداً در مقاطع و دروس بالاترِ ریاضی به راحتی و بدون محاسبه جواب آخر رو می نویسیم.

قوانین محاسبه توانها

قانون شماره ۱:

اگر m و n اعداد طبیعی باشند($m,n\in N$) و عدد a هم یک عدد حقیقی باشد ($a\in R$) آنگاه داریم :

$$a^{m+n}=a^{m}\times a^{n}$$

اما معنیش چیه ؟؟؟ اگر در یک عبارت چندتا عدد توان دار داشتیم که پایه ها مساوی بودن و توانها با هم فرق داشتن، اون وقت یکی از پایه ها رو نگه میداریم و توانها رو باهم جمع میکنیم. باید حواسمون باشه حتماً بین دو تا عدد توان دار، علامت ضرب باشه که بتونیم توانها رو جمع کنیم.

آقا ببخشید چرا میگین باید اعداد طبیعی و حقیقی باشن؟؟؟ یعنی نمیشه توانها هم عدد حقیقی یا مثلاً کسری باشن؟؟؟

چرا دانش آموز عزیز. قبلاً هم اشاره کردم که توان هم میتونه منفی باشه و هم میتونه کسری باشه. ما که فعلاً داریم برای توان از اعداد طبیعی استفاده می کنیم. بعداً از اعداد منفی هم استفاده خواهیم کرد. اعداد کسری هم توی مبحث رادیکال و ریشه گیری که اونم یه جزوه آموزشی جداس تعریفش میکنیم و ازش استفاده هم می کنیم.

نکته ۲ : علامت $\in$ به معنای عضویته. مثلاً علی دایی توی تیم ملی بازی می کنه!!(بازی می کرد یادش بخیر.)

پس باید بنویسیم : (تیم ملی $\in$ علی دایی) می خونیم علی دایی عضو تیم ملی است.

در اینجا تیم ملی یه مجموعه و علی دایی هم عضوی از این مجموعه محسوب میشه. مجموعه هم دسته یا تعدادی شی ء یا شخصه که یه ویژگی خاص و مشترک داشته باشن. یعنی چی؟؟؟ یعنی الان تیم ملی یه مجموعه حساب میشه که تعدادی بازیکن داره که بهشون عضو میگیم. ویژگیشون چیه؟؟؟ اینه که فوتبالیست منتخب تیم ملی هستن.

حالا اگه بخوایم بگیم عضو مجموعه نیست باید چجوری بنویسیم؟؟؟ کافیه به جای علامت $\in$ از علامت $\notin$ استفاده کنیم. الان که علی دایی توی تیم ملی نیست می نویسیم : (تیم ملی $\notin$ علی دایی) و می خونیم علی دایی عضو تیم ملی نیست. یواش یواش به جای آموزش توان تبدیلش کردیم به آموزش مجموعه ها!!!!

مثال ۵ : عبارتهای زیر را به صورت اعداد توان دار بنویسید.

الف) $۲^۷ \times ۲ \times ۲^۳$

ب) $۱ \times ٤ \times ٤ \times ٤^۳$

حل : وقتی میگه عبارت رو به صورت عدد توان دار بنویسید یعنی تا اونجا که ممکنه ما باید خلاصه کنیم و در آخر، اون سوال رو به صورت یک پایه و یک توان بنویسیمش. یعنی یک عدد توان دار. توی مثال الف الان سه تا پایه ۲ داریم و سه تا توان ۷ و ۱ و ۳. توجه کنین که توان ۱ رو ننوشته و این یه قرارداد شده که هر وقت توان ننوشتیم یعنی عدد ۱ رو به جای توان اون عدد بذاریم.

طبق قانون شماره ۱ کافیه که فقط یکی از ۲ ها رو نگه داریم و توانها رو جمع کنیم. پس داریم :

$$۲^۷ \times ۲ \times ۲^۳ = ۲^{۷+۱+۳} = ۲^{۱۱}$$

در ادامه هم پایه ۲ رو نوشتیم و توانهاشو جمع زدیم که شد $۲^{۱۱}$. پس ما عبارت صورت سوال رو به یه عدد توان دار تبدیل کردیم.

نکته ۳ : هر عددی رو که به توان عدد صفر برسونیم حاصلش میشه عدد ۱. چه عدد مثبت باشه چه منفی باشه چه کسری باشه چه رادیکالی باشه چه ممیزی باشه. مثل :

$$۲^۰ = ۱ \quad و (-۲)^۰ = ۱ \; و \; (\sqrt{۲})^۰ = ۱ \; و \; (\frac{۲}{۳})^۰ = ۱$$

همه عددهای بالا به توان صفر رسیدن و جواب آخرشون شد ۱.

ادامه حل مثال :

در مثال ب عدد ۱ رو داریم و ۳ تا عدد توان دار با پایه ۴. شما رو نمیدونم اما من خودم دوس دارم همه پایه ها رو شبیه به هم کنم و به جای عدد ۱ یه عدد توان دار با پایه ۴ بنویسم. مگه میشه؟؟؟؟ بله میشه. طبق نکته ۳ میشه. مگه ما نگفتیم هر عدد به توان صفر میشه ۱؟؟؟ خب من میگم عدد ۴ به توان صفر میشه ۱. درسته دیگه؟؟؟ $۴^{۰} = ۱$. خب به جای ۱ معادلش رو میذاریم توی رابطه. البته میتونیم مستقیم در عدد ۱ ضربش کنیم که میدونیم عدد ۱ در هر عددی ضرب بشه تاثیری نداره و میشه خود اون عدد. مثلاً حسن ضرب در ۱ میشه خود حسن.!! حالا عبارت رو بازنویسی می کنیم باهم . یعنی من به جای ۱ معادلش که $۴^{۰}$ میشه رو قرار میدم.

$$٤^{٣} \times ٤ \times ٤ \times ١ = ٤^{٣} \times ٤ \times ٤ \times ٤^{٠} = ٤^{٣+١+١+٠} = ٤^{٥}$$

باید توضیح بدم؟؟؟ نه بابا خودتون میدونین دیگه ۴ یعنی $٤^{١}$. در ادامه هم طبق قانون شماره ۱ یکی از ۴ ها رو نوشتم و توانهاشوجمع کردم با هم.

نکته ۴ : عبارتهای زیر باهم برابر نیستن.

$$a^{m} \times a^{n} \neq a^{m} + a^{n} \quad \text{و} \quad a^{m+n} \neq a^{m} + a^{n}$$

منظور این نکته اینه که حواستون به جمع و ضربهای بین عددهای توان دار باشه. براتون مثال میزنم که متوجه بشین چرا عبارتهای بالا مساوی نیستن.

$$۲^{۳} \times ۲^{۲} \neq ۲^{۳} + ۲^{۲}$$
$$۲^{۳+۲} \neq (۲ \times ۲ \times ۲) + (۲ \times ۲)$$

چیکار کردیم؟؟؟ در طرف سمت چپ که پایه ها برابر بود و توانها رو جمع کردیم طبق قانون ۱ که میشه $۲^{۵}$. اما طرف راست دوتا عدد توان دار داشتیم. نتونیتسم یکی از پایه ها رو بنویسیم و توانها رو جمع کنیم چرا ؟؟؟ چون بینشون جمع بود نه ضرب!! پس اومدیم $۲^{۳}$ رو باز کردیم به صورت ضرب ۳ تا ۲ در هم. همینطور $۲^{۲}$ رو هم باز کردیم به صورت ضرب دوتا ۲ درهم. حالا ادامه میدیم و ضرب میکنیم.

$$۲^{۵} \neq (۸) + (۴) \Rightarrow (۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲) \neq (۱۲) \Rightarrow (۳۲) \neq (۱۲)$$

در ادامه $۲^{۵}$ رو هم به صورت ضرب ۵ تا عدد ۲ نوشتیم. در نهایت دیدیم که سمت راست شد عدد ۳۲ و سمت چپ هم شد عدد ۱۲ و این دوتا برابر نیستن. پس متوجه شدین منظور از این نکته مهم چی بود و چرا دوتا عبارت با هم برابر نبودن.

قانون شماره ۲ :

اگر m و n اعداد طبیعی باشند(m,n∈ N) و عدد a هم یک عدد حقیقی باشد (a∈ R) آنگاه داریم : با شرط اینکه $(n > m)$

$$a^{(n-m)} = \frac{a^{n}}{a^{m}}$$

منظور این قانون اینه که اگه دوتا عدد توان دار بر هم تقسیم شدن و پایه ها هم یکسان بودن اون وقت یکی از پایه ها رو نگه میداریم و توان بالایی رو منهای توان پایینی می کنیم. توجه کنیم که توی هردوتا قانونی که تا اینجا گفتیم باید پایه ها مساوی باشن و گرنه نمیشه ازشون استفاده کرد. این که چرا توان بالایی منهای توان پایینی میشه رو توی مثالهای زیر توضیح میدم.

مثال ۶ : عبارتهای زیر را به شکل اعداد توان دار بنویسید.

$$\frac{۲^{۴}}{۲^{۲}} \quad و \quad \frac{۴^{۷}\times ۴^{۵}}{۴^{۴}} \quad و \quad ۳^{۳}\times\frac{۳^{۷}\times ۳^{۳}\times ۳}{۳^{۲}\times ۳^{۴}}$$

حل: احساس کردم از شکل مثال آخر ترسیدین بچه ها!!! نه بابا قیافه ش غلط اندازه فقط. بچه خوبیه. اول به نکته پایین توجه کنین.

نکته ۵ : هر وقت یک عدد توان دار رو از مخرج یک کسر بیاریم بالای کسر، توانش منفی میشه. و برعکس هر وقت یک عدد توان دار با توان منفی رو از بالای کسر به پایین کسر منتقل کنیم توانش مثبت میشه.

اگه عدد توان دار مثبت از بالای کسر بره پایین کسر چی میشه؟؟ خب منفی میشه توانش.!!

البته توجه کنیم که علامت بین دوتا عدد توان دار ضرب میشه.

الان به کسر $\frac{۲^{٤}}{۲^{۲}}$ توجه کنید. ما میتونیم عدد $۲^{۲}$ رو از مخرج بیاریم بالای کسر که توانش منفی میشه یعنی: $۲^{-۲}$ و میاد بالای کسر یعنی دیگه کسر از بین میره.

$$\frac{۲^{۴}}{۲^{۲}}= ۲^{۴}\times ۲^{-۲} = ۲^{۴+(-۲)} = ۲^{۴-۲} = ۲^{۲}$$

آقا میشه بگین چیکار کردین؟؟؟ بله صبر کن. اولش که عدد توان دار مخرج رو آوردم بالای کسر که توانش منفی شد و عملاً دیگه کسر از بین رفت چون فقط صورتش موند دیگه. توی نکته بالا هم گفتم علامت بین دو عدد تواندار جدید، ضرب میشه. پس من ضرب گذاشتم. حالا رسیدیم به قانون شماره ۱. یعنی پایه ها یکسان و توان ها باهم جمع. اما یکی از توان ها منفیه. پس من میتونم یا اونجوری جمعشون کنم یعنی $(-۲) + ۴$ یا یک دفعه تفریقشون کنم یعنی $۲ - ۴$!! من جفتشو نوشتم که واضح باشه چیکار کردم. خلاصه اینکه وظیفه مون رو انجام دادیم و تبدیلش کردیم به عدد توان دار $۲^{۲}$. الان هم خدا از ما راضیه هم طراح سوال!!!! صورت سوال از ما نخواسته که حاصلش رو بنویسیم وگرنه مینوشتم ۲ ضرب در ۲ و میشد ۴.

مثال دوم.

$$\frac{۴^{۷}\times ۴^{۵}}{۴^{۴}}$$

برای حل این مثال ما اول باید یه دعوای حسابی با صورت کسر بکنیم و به حسابش برسیم. خب به صورت کسر نگاه کنین. یاد کدوم قانون میفیتین؟؟؟؟ قانون شماره ۱ .آفرین. پایه ها یکسان و توانها مختلف. پس منتظر چی هستین یکی از پایه ها رو نگه دارین و توانها رو جمع کنیم باهم. میشه چی؟؟؟ $٤^{۷+۵} = ٤^{۱۲}$ بسیار خب. حالا کسر رو بازنویسی می کنم که مرتب تر بشه. پس کسر جدید اینجوریه :

$$\frac{۴^{۱۲}}{۴^{۴}}$$

در صورت کسر، عدد تواندار جدید رو نوشتیم. حالا طبق قانون دوم کافیه که عدد تواندار مخرج رو بیاریم بالا و توانشو منفی کنیم و در عدد تواندار صورت ضرب کنیم که بازم بشه قانون اول. نگاه کنین :

$$\frac{۴^{۱۲}}{۴^{۴}} = ۴^{۱۲} \times ۴^{-۴} = ۴^{۱۲-۴} = ۴^{۸}$$

و اما مثال بعدی.

$$۳^{۳} \times \frac{۳^{۷} \times ۳^{۳} \times ۳}{۳^{۲} \times ۳^{۴}}$$

خب اول بگین باید چیکار کنیم؟؟ مثل سوال قبل اول صورت کسر رو ساده تر می کنیم.(شما میتونید اول از مخرج کسر شروع کنید. اجباری نیست که حتماً از صورت شروع کنید.) قانون شماره ۱. پایه ها برابر و توانها مختلف. یکی از پایه ها رو می نویسیم و توانها رو جمع میکنیم. میشه چی؟؟؟ درسته. میشه :

$$۳^{۷+۳+۱} = ۳^{۱۱}$$

همین بلا رو سر مخرج کسر هم میاریم. پایه ۳ با توان ۲ به اضافه ۴. میشه :

$$۳^{۲+۴} = ۳^{۶}$$

حالا کسر رو بازنویسی میکنیم با این اعداد توان دار جدیدی که بدست آوردیم.

$$۳^{۳} \times \frac{۳^{۱۱}}{۳^{۶}}$$

من که میدونم از اولم خودتون بلدش بودین!!!!

خب حالا کدوم قانون؟؟؟ بله شماره ۲. مخرج کسر رو میاریم بالا و منفیش میکنیم و در صورت و عدد توان دار قبلش ضرب میکنیم. یعنی اینجوری:

$$۳^{۳} \times \frac{۳^{۱۱}}{۳^{۶}} = ۳^{۳} \times ۳^{۱۱} \times ۳^{-۶} = ۳^{۳+۱۱-۶} = ۳^{۸}$$

خسته نشدین؟؟؟؟ نه بریم سراغ قانون شماره ۳

قانون شماره ۳ :

اگر n یک عدد طبیعی باشند($n \in N$) و اعداد a و b هم دو عدد حقیقی باشند ($a,b \in R$) آنگاه داریم :

$$a^{n} \times b^{n} = (a \times b)^{n} = (ab)^{n}$$

اگه نگاهی گذرا به ۲ قانون قبلی که گفتیم بندازین متوجه میشین که در اون دوتا قانون شرط این بود که پایه ها یکسان باشن. اما در این قانون پایه ها دیگه مختلف میشه. طبق قانون بالا اگه دو تا عدد توان دار مثل a^{n} و b^{n} داشته باشیم و بینشون ضرب باشه، بازم تاکید میکنم که حتماً ضرب باشه، اون وقت کافیه یکی از توانها رو نگه داریم و پایه ها رو درهم ضرب کنیم. توجه داشته باشید که عکس این رابطه هم درسته. یعنی اگه پایه ی یه عدد توان دار به صورت ضرب دوتا عدد بود که با هم به توان یه عددی رسیده بودن، اون وقت میتونیم تک تک به هرکدومشون توان رو بدیم و ضربشون کنیم. یعنی :

$$۳^{۵} \times ۲^{۵} = (۳ \times ۲)^{۵}$$

پایه ها مختلف و توانها یکسان. پس ما یکی از ۵ ها رو به عنوان توان نگه داشتیم و پایه ها رو در هم ضرب کردیم.

$$(۳ \times ۲)^{۵} = ۳^{۵} \times ۲^{۵}$$

اما اینجا ما داخل پرانتز ضرب دو عدد رو داریم و کل پرانتز به توان عدد ۵ رسیده. اینم یه عدد توان دار محسوب میشه که پایه ش به صورت ضرب دو عدد تشکیل شده. خب کافیه که سهم هرکدوم از دو عدد ۳ و ۲ رو بدیم و توان ۵ رو بهشون برگردونیم تا به صورت حاصلضرب دو عدد توان دار در بیاد. اینم میگه که عکس قانون بالا هم درسته.

مثال ۷ : هر کدام از عبارات زیر رو به صورت یک عدد توان دار نمایش دهید.

$$5^3 \times 2^3 \times \frac{2^5 \times 5^5 \times 10^7}{10^2} \quad \text{و} \quad 4^5 \times 2^5 \times 8^2$$

حل: برای حل عبارت کسری، ابتدا کسر رو ساده تر می کنیم. در صورت کسر دوتا عدد توان دار با پایه های مختلف و توانهای برابر داریم. منظورم اعداد توان دار 2^5 و 5^5 هست. طبق قانون ۳ پایه ها رو در هم ضرب می کنیم و به توان ۵ می رسونیم. یعنی :

$$2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

و جواب آخرشم نوشتم. (دوستان عزیز بازم میگم شما مجبور نیستید مثل من از صورت کسر شروع کنید.شما می تونید از مخرج کسر یا حتی از عبارت جلوی کسر یعنی $5^3 \times 2^3$ عملیات رو آغاز کنید.)حالا اون عبارت جلوی کسر رو هم طبق قانون ۳ ساده تر می کنیم. که میشه:

$$5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = 10^3$$

حالا بیایم کسر رو باز نویسی کنیم و تغیرات رو جایگزین کنیم. همین دو تا تغییر جدید که انجام دادیم.

$$5^3 \times 2^3 \times \frac{2^5 \times 5^5 \times 10^7}{10^2} = 10^3 \times \frac{10^5 \times 10^7}{10^2}$$

اعداد توان داری که رنگی شدن به معنای اینه که معادلش رو در کسر جدید نوشتیم.

حالا بازم سراغ صورت کسر میریم و از قانون شماره ..... اون رو به شکل یک عدد توان دار می نویسیم. قانون شماره چند؟؟؟؟ بله درسته قانون شماره ۱ . چون پایه ها برابر و توانها مختلف هستند.

$$10^5 \times 10^7 = 10^{7+5} = 10^{12}$$

خب بازهم کسر رو بازنویسی می کنیم.

$$10^3 \times \frac{10^5 \times 10^7}{10^2} = 10^3 \times \frac{10^{12}}{10^2}$$

حالا نوبت چیه؟؟؟؟ خواب؟؟؟؟ نه بابا. بله درسته طبق قانون شماره ۲، عدد توان دار مخرج رو بالا میاریم و به صورت توان منفی در صورت ضربش می کنیم.

$$10^3 \times \frac{10^{12}}{10^2} = 10^3 \times 10^{12} \times 10^{-2}$$

بسیار خوب. بعد از یه ماراتن جانانه به این بخش آخر رسیدیم. بچه ها توجه کنین که برای آزمونهای تستی لزومی نداره شما این همه محاسبه رو بنویسین. این فقط برای حل تشریحی که چه عرض کنم برای حل فوق تشریحی و یادگیریه. شما در عرض ۲ ثانیه!!! باید در آزمونهای تستی این عبارت رو ساده کنین.

خب بخش آخر عبارت به قانون اول مربوط میشه. سه تا عدد توان دار با پایه ۱۰ و توانهای متخلف. خب جواب آخر:

$$10^3 \times 10^{12} \times 10^{-2} = 10^{3+12-2} = 10^{13}$$

پس در کل داریم :

$$۵^{۳} \times ۲^{۳} \times \frac{۲^{۵} \times ۵^{۵} \times ۱۰^{۷}}{۱۰^{۲}} = ۱۰^{۱۳}$$

اما حل مثال دوم : آخرشو دیگه توضیح نمیدم چون مشخصه از قانون ۱ رفته.

دو عدد توان دار اول یعنی $۲^{۵}$ و $۴^{۵}$ طبق قانون سوم محاسبه توانها میشه : $۸^{۵} = (۴ \times ۲)^{۵}$ حالا عبارت رو بازنویسی کنیم :

$$۴^{۵} \times ۲^{۵} \times ۸^{۲} = ۸^{۵} \times ۸^{۲} = ۸^{۵+۲} = ۸^{۷}$$

سوال : عدد توان دار $۱۲^{۳}$ را به چند صورت می توان به صورت حاصلضرب اعداد توان دار با پایه های مختلف نوشت؟

حل: این سوال از ما می خواد که عکس قانون شماره ۳ رو انجام بدیم و ۱۲ رو به صورت ضرب اعداد بنویسیم. خب من همه حالتهایی که ضرب ۲ عدد برابر ۱۲ میشه رو می نویسم.

(۴×۳) و (۲×۶) و (۱×۱۲)

میدونید که حاصلضرب اعداد داخل پرانتزها میشه ۱۲.حالا کافیه در عدد توانداز صورت سوال یعنی $۱۲^{۳}$ به جای پایه یعنی ۱۲ هر کدوم از پرانتزها را قرار بدیم.

$$۱۲^{۳} = (۱۲ \times ۱)^{۳} = ۱۲^{۳} \times ۱^{۳}$$
$$۱۲^{۳} = (۶ \times ۲)^{۳} = ۶^{۳} \times ۲^{۳}$$
$$۱۲^{۳} = (۳ \times ۴)^{۳} = ۳^{۳} \times ۴^{۳}$$

دیدید که به جای پایه ۱۲ هر بار معادلش یعنی ضرب دو عدد رو گذاشتیم.

نکته ۶ :

عبارتهای زیر باهم برابر نیستن.

(۱) $a^{n} + b^{n} \neq (a+b)^{n}$

یعنی جمع دو عدد توانداز با پایه های مختلف با یک عد توانداز که پایه ش به صورت جمع دو تا عدد هست برابر نمی باشد.!!!

مثل :

$$۲^{۲} + ۴^{۲} \neq (۲+۴)^{۲} \Rightarrow ۴ + ۱۶ \neq ۶^{۲} \Rightarrow ۲۰ \neq ۳۶$$

پس دیدیم که دو عدد ۳۶ و ۲۰ برابر نبودن طبق نکته بالا.

(۲) $a^{n} - b^{n} \neq (a-b)^{n}$

به طریق مشابه هم ثابت میشه این دو عبارت هم برابر نیستن.

مثل :

$$۴^{۲} - ۲^{۲} \neq (۴-۲)^{۲} \Rightarrow ۱۶ - ۴ \neq ۲^{۲} \Rightarrow ۱۲ \neq ۴$$

قانون شماره ۴ :

اگر n یک عدد طبیعی باشند($n \in N$) و اعداد a و b هم دو عدد حقیقی باشند ($a,b \in R$) آنگاه داریم:

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$$

این قانون منظورش اینه که اگر دوتا عدد توان‌دار با پایه های مختلف و توانهای برابر بر هم تقسیم بشن، کافیه که یکی از توانها رو نگه داریم و پایه ها رو برهم تقسیم کنیم.

این قانون تفاوتی که با قانون شماره ۲ داره اینه که اونجا پایه ها برابر بودن و توانها مختلف.!!!

نکته ۷ :

گاهی اوقات در هنگام محاسبه تقسیم اعداد و عبارات توان‌دار، به جای کسر، از نماد ÷ که معرف تقسیم هست استفاده می کنیم. یعنی دو عبارت زیر هیچ تفاوتی با هم ندارن.

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n \div b^n$$

مثال ۸ : عبارات زیر را به صورت اعداد توان دار بنویسید.

$$۳^۴ \times \frac{۶^۵}{۲^۵} \quad \text{و} \quad ۷^۲ \div ۵^۲ \quad \text{و} \quad ۲^۵ \times ۲ \times \frac{۳^۵ \times ۴^۵}{۶^۵}$$

حل:

$$۳^۴ \times \frac{۶^۵}{۲^۵}$$

ابتدا به سراغ کسر می ریم. دو عدد توان‌دار برهم تقسیم شده اند که پایه های اونا مختلف و توانهاشون برابره. پس طبق قانون شماره ۴ یکی از توانها را نگه داشته و پایه ها رو برهم تقسیم می کنیم. یعنی:

$$\frac{۶^۵}{۲^۵} = (\frac{۶}{۲})^۵ = ۳^۵$$

عدد ۶ رو بر ۲ تقسیم و نهایتاً کسر عبارت مورد سوال به عدد توان دار $۳^۵$ تبدیل شد. حالا عبارت رو بازنویسی می کنیم.

$$۳^۴ \times \frac{۶^۵}{۲^۵} = ۳^۴ \times ۳^۵ = ۳^{۴+۵} = ۳^۹$$

دقت کنید که در ادامه از قانون شماره ۱ استفاده کردیم و نهایتاً به عدد توان دار $۳^۹$ رسیدیم.

حل عبارت دوم:

$$۷^۲ \div ۵^۲$$

برای درک و فهم آسان تر این عبارت و طبق نکته شماره ۴ این علامت تقسیم رو به شکل خط کسری مینویسیم.

$$۷^۲ \div ۵^۲ = \frac{۷^۲}{۵^۲}$$

حال طبق قانون شماره ۴ یکی از توانها را نگه داشته و پایه ها رو برهم تقسیم می کنیم و عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار می نویسیم.

$$۷^۲ \div ۵^۲ = \frac{۷^۲}{۵^۲} = (\frac{۷}{۵})^۲$$

حاصل کسر از این بیشتر ساده نمشه لذا به همان صورت باقی می ذاریمش.

حل عبارت سوم:

$$2^5 \times 2 \times \frac{3^5 \times 4^5}{6^5}$$

ابتدا صورت کسر را طبق قانون شماره ۳ ساده می کنیم . یعنی به صورت :

$$(3 \times 4)^5 = 12^5 \quad 3^5 \times 4^5 =$$

در ادامه عبارت جلوی کسر یعنی 2×2^5 رو طبق قانون شماره ۱ (پایه ها یکسان و توانها مختلف) به شکل یک عدد تواندار در می آوریم.

$$2^6 = 2^{5+1} = 2^5 \times 2$$

حال کسر رو با تغییرات جدید بازنویسی می کنیم.

$$2^5 \times 2 \times \frac{3^5 \times 4^5}{6^5} = 2^6 \times \frac{12^5}{6^5}$$

خب الان طبق قانون شماره چهار کسر رو تبدیل به عدد توان دار می کنیم. یعنی پایه ها تقسیم برهم و یکی از توانها رو می نویسیم.

$$2^6 \times \frac{12^5}{6^5} = 2^6 \times \left(\frac{12}{6}\right)^5 = 2^6 \times 2^5 = 2^{11}$$

توضیح اینکه حاصل تقسیم ۱۲ بر۶ رو نوشتیم و نهایتاً طبق قانون شماره ۱ به عدد تواندار 2^{11} رسیدیم.

خب دانش آموزان عزیز خسته نباشید.این بخش تا همین جا فکر کنم کافی باشه تا بتونید خوب اونو مطالعه کنید و خسته کننده نباشه براتون. چند تا قانون و نکته و مثال جالب دیگه و همینطور بخش نماد علمی مونده به همراه تستهای ویژه و تقریباً سخت که یاد گرفتنش شمارو تو بحث توان تا پایان دوره دانشگاهتونم بی نیاز میکنه رو براتون ارائه میدم. این تستها از آزمونهای مختلف حتی کنکور سراسری و آموزنهای المپیاد انتخاب شدن و چون شما مطالب رو ریشه ای و به زبان ساده یاد میگیرید بنابراین به راحتی میتونید خودتون حلشون کنید.

تا جلسه بعدی شما رو به خدا میسپارم.

امیر مرادپور