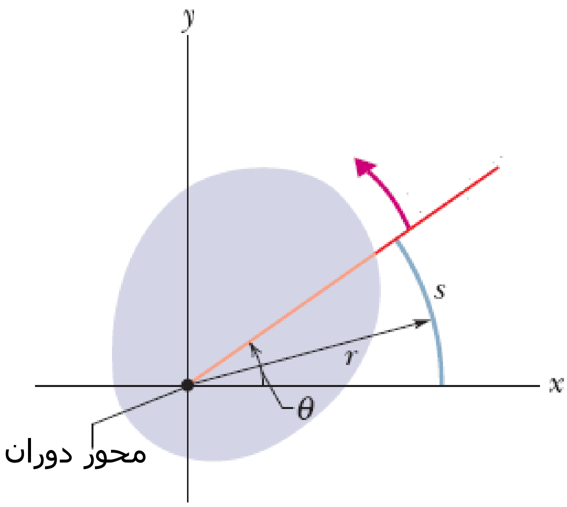
حسین زاده
۰۹۱۲۵۹۱۳۶۴۵

متغییرهای چرخشی

مکان زاویه ای

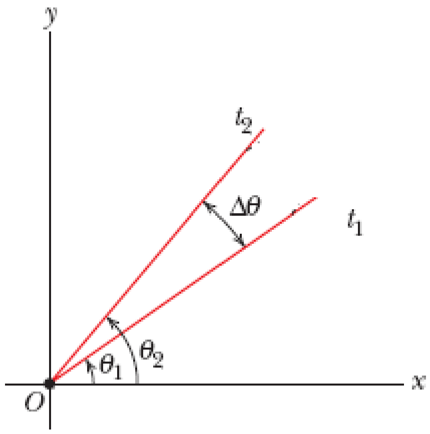


حرکت یک خط مرجع از جسم در حال جرخش را می توان با مشخص کردن مکان زاویه ای این خط نسبت به جهت مثبت محور x اندازه گیری کرد.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$1rev = 360^{\circ} = 2\pi\, rad$$

جابه جایی زاویه ای



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

سرعت زاویه ای

اگر جسم در حال چرخش در لحظهٔ t_1 در مکان زاویه ای θ_1 و در لحظهٔ t_2 در مکان زاویه ای θ_2 باشد سرعت زاویه ای متوسط عبارت است از:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad , \quad \frac{rad}{s}$$

در صورتی که بازه زمانی به سمت صفر میل کند، سرعت زاویه ای متوسط به سرعت زاویه ای لحظه ای تبدیل می شود یعنی:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\theta}{dt}$$

شتاب زاویه ای

اگر سرعت جسم در حال چرخش ثابت نباشد و با گذشت زمان تغییر کند با فرض اینکه در لحظهٔ t_1 سرعت زاویه ای جسم ω_1 و در لحظهٔ t_2 سرعت زاویه ای ω_2 باشد در این صورت شتاب زاویه ای متوسط عبارت است از:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad , \quad \frac{rad}{s^2}$$

در صورتی که بازه زمانی به سمت صفر میل کند، شتاب زاویه ای متوسط به شتاب زاویه ای لحظه ای تبدیل می شود

یعنی:
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\omega}{dt}$$

مثال: پسر بچه ای یک فرفره را با شتاب زاویه ای $\alpha = 5t^3 - 4t$ می چرخاند(یکای ضرایب ثانیه و رادیان سازگارند.) در t=0 فرفره دارای سرعت زاویه ای ۵ رادیان برثانیه و خط مرجع آن در مکان زاویه ای ۲ رادیان است.

الف) عبارتی برای سرعت زاویه ای بدست آورید و سرعت زاویه ای آن را در لحظۀ t=1 بدست آورید.

$$d\omega = \alpha dt \rightarrow \omega = \int \alpha dt \rightarrow \omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + C$$

$$\omega(0) = 5 \rightarrow C = 5 \rightarrow \omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5$$

$$\omega(t=1) = \frac{5}{4} \times 1^4 - 2 \times 1^2 + 5 = \frac{17}{4} = 4.25\ \frac{rad}{s}$$

ب) عبارتی برای مکان زاویه ای بدست آورید و مشخص کنید بعد از ۲ ثانیه، فرفره چند دور چرخیده است؟

$$d\theta = \omega dt \rightarrow \theta = \int \omega dt = \int \left(\frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5\right) dt$$

$$\theta = \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$

$$\theta(0) = 2 \rightarrow C' = 2 \rightarrow \qquad \theta = \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2$$

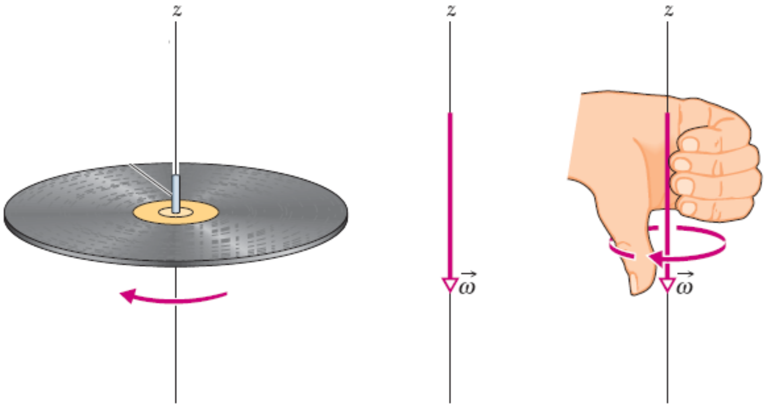
$$\theta(t=2) = \frac{1}{4} \times 2^5 - \frac{2}{3} \times 2^3 + 5 \times 2 + 2 = 14.7\ rad$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_0 = 14.7 - 2 = 12.7\ rad$$

$$\Delta\theta = \frac{12.7}{2\pi} = 2.02\ rev$$

آیا کمیت های زاویه ای بردارند؟

یک جسم که حول یک محور ثابت می چرخد، فقط می‌توان حول این محور ساعتگرد یا پادساعتگرد بچرخد که می توان آنها را با علامت منفی و مثبت از هم متمایز کرد.



برای مشخص کردن جهت ω از قانون دست راست استفاده می کنیم. اگر انگشتان دست راست خود را در جهت صفحهٔ در حال چرخش خم کنید به طوری که انگشتان در جهت چرخش جسم قرار گیرند، در این صورت انگشت شست باز شدهٔ شما جهت بردار سرعت زاویه ای خواهد بود.

چرخش با شتاب زاویه ای ثابت

در یک انتقال خالص، حرکت با شتاب خطی ثابت یک حالت مهم است که قبلا بررسی کردیم. در چرخش هم حالت شتاب زاویه ای ثابت حائز اهمیت است و معادلات مشابهی برای این حالت برقرار است.

معادلات خطی	معادلات زاویه ای
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

ارتباط بین متغییر های خطی و زاویه ای

$$s = r\theta \qquad V = r\omega \qquad a_T = r\alpha \qquad a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$