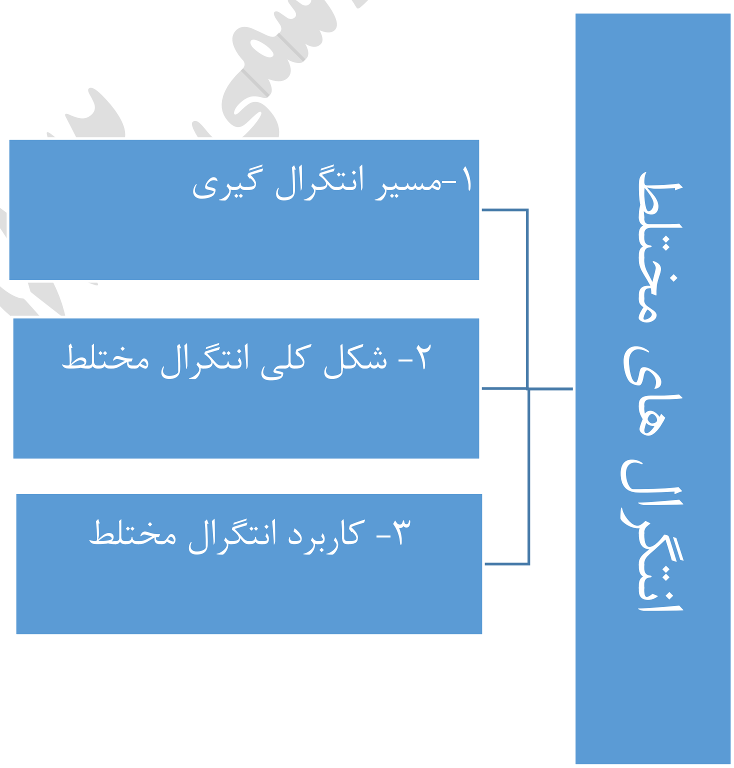
انتگرال های مختلط

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

انتگرال های مختلط از جمله بحث هایی است که در نظر دانشجویان بسیار دشوار به شمار می آید و با مطالعه مراجع مختلف دچار سردرگمی می شوند. با مطالعه این فصل که دسته بندی بسیار منظمی دارد، می توانید این بحث را به سادگی یاد بگیرید. این بحث شباهت زیادی به بحث انتگرال روی خم در ریاضی عمومی (۲) دارد. در این فصل می خواهیم انتگرال یک تابع مختلط را روی یک خم محاسبه کنیم. پس ابتدا بر روی مفهوم خم بحث می کنیم. در ادامه استراتژی کلی حل انتگرال مختلط را بیان کرده و مسائل متنوعی را از آن با هم حل می کنیم. در پایان فصل کاربرد انتگرال های مختلط را بررسی خواهیم کرد.

مطالب این فصل مطابق نمودار درختی زیر آموزش داده خواهند شد:



قسمت اول – باز یا بسته بودن مسیر انتگرال گیری:

در این فصل می خواهیم انتگرال یک تابع مختلط را روی یک مسیر (خم) محاسبه کنیم. یکی از ویژگی های خم (مسیر انتگرال گیری) که در روند حل بسیار اهمیت دارد، باز یا بسته بودن خم است. برای درک بهتر این موضوع به دو شکل زیر توجه کنید.

شکل ۱ : در این شکل نقطه A، نقطه شروع مسیر و نقطه B، نقطه انتهای مسیر است و با توجه به اینکه نقاط شروع و انتها یکسان نیستند، بنابراین این مسیر را یک مسیر باز می نامیم.

شکل ۲ : در این شکل مسیر از نقطه A شروع شده و پس از یک دور چرخیدن مجددا به نقطه A می رسد، این مسیر را یک مسیر بسته می نامیم.

در حالت کلی می توان گفت که اگر مسیر انتگرال گیری، کل یک بیضی، کل یک دایره و ... باشد، با یک مسیر بسته روبرو هستیم ولی اگر بخواهیم بر روی قسمتی از این اشکال انتگرال گیری کنیم، عملا مسیر انتگرال گیری باز است.

قسمت دوم – شکل کلی انتگرال مختلط روی خم و استراتژی حل آن:

هر انتگرال مختلط به فرم $\int_C f(z)dz$ می باشد که در آن $f(z)$ تابع مختلط زیر انتگرال و dz المان دیفرانسیل گیری می باشد. C هم مسیری (خم) می باشد که روی آن انتگرال می گیریم.

برای محاسبه انتگرال مختلط $\int_C f(z)dz$، گام های زیر را به ترتیب طی می کنیم:

گام اول : بررسی باز یا بسته بودن خم C.

گام دوم : بررسی تحلیلی بودن تابع مختلط $f(z)$.

گام سوم : با توجه به نتایج دو گام قبل، روند حل انتگرال مختلط را از یکی از چهار حالت زیر انتخاب می کنیم:

حالت اول (خم C باز باشد و $f(z)$ هم تحلیلی نباشد) ← از تعریف استفاده می کنیم.

این بحث را با یک مثال آغاز می کنیم. فرض کنید که حاصل انتگرال $\int_{0}^{1+i}|z|\,dz$ روی خط $y = x$ از شما پرسیده شده است. برای پاسخ به این سوال گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول (بررسی باز یا بسته بودن خم) :

گام دوم (بررسی تحلیلی بودن تابع $f(z)$) :

گام سوم (انتخاب روش حل) : از آنجا که خم C باز و $f(z)$ هم غیر تحلیلی است، از حالت اول یعنی تعریف به صورت زیر استفاده کرده و عملا انتگرال مختلط را به یک انتگرال یگانه ساده بر حسب t تبدیل می کنیم:

برای درک بهتر شما از این حالت، تمرین های متنوعی را بررسی خواهیم کرد.

تمرین ۱ : مقدار انتگرال $\int_C \bar{z}\,dz$ را به دست آورید، در صورتی که C نیمه سمت راست دایره $|z| = 2$ از $z = -2i$ تا $z = 2i$ باشد.

تمرین ۲ : حاصل $\int (x - y + ix^{۲})\, dz$، در طول خط راست واصل از $z = ۰$ به $z = ۱ + i$، کدام است؟

(برق – سراسری ۹۵)

۱) $۱ + \frac{i}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}(۱ + i)$

۳) $\frac{۱}{۳}(i - ۱)$

۴) $۱ - \frac{i}{۲}$

حالت دوم (خم C باز باشد و $f(z)$ تحلیلی باشد) ← به راحتی انتگرال می گیریم.

اگر در روند حل به حالتی رسیدیم که خم C باز و تابع $f(z)$ تحلیلی بود، برای حل انتگرال مختلط مراحل زیر را طی می کنیم:

گام اول : این انتگرال به مسیر بستگی نداشته و برای محاسبه آن مانند توابع حقیقی انتگرال را محاسبه می کنیم.

گام دوم : بعد از محاسبه تابع اولیه $f(z)$، حدود انتگرال را به صورت زیر در آن جایگذاری می کنیم:

$$\int_{z_{۱}}^{z_{۲}} f(z)\, dz = F(z_{۲}) - F(z_{۱})$$

تمرین ۳ : حاصل انتگرال $\int_C \ e^{-۲z}\, dz$ که در آن C خط واصل بین نقاط $۱ - i\pi$ تا $۲ + i۳\pi$ می باشد را به دست آورید؟ (برق – سراسری ۷۹)

حالت سوم (خم C بسته بوده و $f(z)$ تحلیلی نباشد) ← از قضیه مانده ها استفاده می کنیم.

اگر در روند حل به حالتی رسیدیم که خم C بسته باشد و تابع $f(z)$ تحلیلی نباشد و همچنین نقاط تکین از نوع تنها باشند، برای محاسبه حاصل انتگرال از قضیه مانده ها به صورت زیر استفاده می کنیم:

گام اول : ابتدا نقاط تکین $f(z)$ را به دست می آوریم.

گام دوم : از بین نقاطی که در گام اول به دست آمده اند، آنهایی که در داخل خم C قرار دارند را مشخص می کنیم.

گام سوم : مانده را برای نقاط به دست آمده در گام دوم محاسبه می کنیم.

گام چهارم : مانده های محاسبه شده در گام سوم را با هم جمع کرده و در $۲\pi i$ ضرب می کنیم. عدد به دست آمده همان حاصل انتگرال است.

روش فوق در محاسبه انتگرال های مختلط به قضیه مانده ها مشهور بوده و به صورت زیر است:

$$\oint_c f(z)\, dz = ۲\pi i \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

دقت داشته باشید که اکثر سوالات کنکور کارشناسی ارشد این فصل از این قسمت می باشد و برای حل آن تسلط به مفاهیم فصل قبل ضروری است.

حالت چهارم (خم C بسته بوده و $f(z)$ تحلیلی باشد) ← حاصل انتگرال صفر است.

اگر در روند حل $\int_C \ f(z)dz$، تابع $f(z)$ تحلیلی بوده و خم C هم بسته باشد آنگاه حاصل این انتگرال برابر صفر است.

در ادامه تمرین های متنوعی را حل و بررسی خواهیم کرد.

تمرین ۴ : حاصل $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z^2-4)}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) $-\frac{\pi i}{2}$ ۲) πi

۳) $\frac{\pi i}{2}$ ۴) صفر

تمرین ۵ : حاصل انتگرال $\oint_c \ z\sin\frac{1}{z+2}\,dz$ که در آن c دایره $|z| = 3$ در جهت مثبت می باشد، کدام است؟

۱) $-2\pi i$

۲) $2\pi i$

۳) $-4\pi i$

۴) $4\pi i$

تمرین ۶ : حاصل انتگرال $\oint z^2\, e^{\frac{1}{z-1}}$ حول دایره $|z| = 2$ و در جهت مثلثاتی کدام است؟

(برق – ۸۸ و مکانیک ۹۴)

۱) $\frac{\pi i}{3}$

۲) $\frac{7\pi i}{3}$

۳) $\frac{۱۳\pi i}{۳}$

۴) $۴\pi i$

تمرین ۷ : حاصل $\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{|z|=۱} e^{(z+\frac{۱}{z})}$ ، کدام است؟ (مکانیک – ۹۵)

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!}$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!(n+۱)!}$

۴) ۱

تمرین ۸ : اگر c مرز (منحنی) دایره $|z| = ۲$ پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار $\oint_c \frac{\cosh z}{z^۲(z^۲+\frac{\pi^۲}{۴})}dz$ کدام است؟ (مکانیک – ۹۰)

۱) $-۴\pi i$

۲) صفر

۳) $۴\pi i$

۴) $۲\pi i$

قسمت سوم – کاربرد انتگراهای مختلط

یکی از کاربردهای انتگرال های مختلط، محاسبه بعضی از انتگرال های حقیقی است، که به روش های معمول که تا به حال خوانده ایم قابل محاسبه نیستند. این انتگرال ها را در این قسمت بررسی خواهیم کرد:

حالت اول)

اگر انتگرالی به فرم $I=\int_{0}^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$ باشد، این واقعیت که θ از صفر تا 2π تغییر می کند، این ایده را در ذهن تداعی می کند که می توان θ را به عنوان زاویه نقطه z واقع بر دایره واحد C به مرکز مبدا در نظر گرفت. بنابراین با در نظر گرفتن $0\le\theta\le 2\pi$ $\quad z=e^{i\theta}$، خواهیم داشت:

در این صورت انتگرال $\int_{0}^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$ برابر خواهد شد با:

انتگرال فوق را می توانیم با استفاده از قضیه مانده ها حل کنیم.

برای درک بهتر شما از این حالت، تمرین زیر را حل خواهیم کرد:

تمرین ۹ : حاصل انتگرال $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ را بیابید.

حالت دوم)

اگر انتگرالی به فرم $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ باشد، و درجه مخرج بیشتر از ۱ واحد از درجه صورت باشد (شرط همگرایی)، حاصل انتگرال را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = ۲\pi i \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

برای درک بهتر شما، تمرین های زیر را بررسی خواهیم کرد:

تمرین ۱۰ : حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۲}+۱}\,dx$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۱ : حاصل $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) π

۴) $\frac{\pi}{۸}$

حالت سوم)

در محاسبه انتگرال هایی به فرم $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\alpha x}\,dx$ که در آن درجه مخرج حداقل یک واحد از درجه صورت بیشتر باشد، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\alpha x}\,dx=۲\pi i\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$+\pi i\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

از طرفی با استفاده از رابطه اویلر $e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos\alpha x\;\,dx=Re(I)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin\alpha x\;\,dx=Im(I)$$

تمرین ۱۲ : حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\,(x^{۲}+۱)}dx$ کدام است؟ (برق – ۸۱)

۱) صفر

۲) $-\frac{\pi}{e}$

۳) $\pi(۱-\frac{۱}{e})$

۴) $\pi(۲-\frac{۱}{e})$

تمرین ۱۳ : مقدار انتگرال $\int_{۰}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^{۲}+x^{۲}}dx$ برابر است با: (مکانیک – ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{۶a}\,e^{-ab}$ ۲) $\frac{\pi}{۴b}\,e^{-ab}$ ۳) $\frac{\pi}{۹b}\,e^{-ab}$ ۴) $\frac{\pi}{۲b}\,e^{-ab}$