آزمون درجه۲

سیدکامران حسینی

آزمون درجه۲مکمل کلاس های
آنلاین سیدکامران حسینی
ویژه۱۴۰۰
جهت شرکت درکلاس هابا
شماره زیرتماس بگیرید
۰۹۱۴۲۸۴۵۹۶۶

۱ به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^۲ - ۴)x^۲ - ۳x + m = ۰$ است؟

۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۴ ۴) -۴

۲ به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - ۵x + m^۲ - ۳ = ۰$ است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۳ ۴) -۳

سیدکامران حسینی

۳ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۱۲x + ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟

۱) ۲　　۲) ۳

۳) ۴　　۴) ۶

۴ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x(۵x + ۳) = ۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادلهٔ $۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲} , \frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟

۱) ۲۷　　۲) ۲۸

۳) ۲۹　　۴) ۳۱

سیدکامران حسینی

۵ در معادلهٔ $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۶ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\}$ است؟

۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$
۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$
۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

سیدکامران حسینی

۷ اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = (K + ۳)x^۲ - ۴x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

۱) -۴

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۴

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a - ۳)\,x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد؟

۱) $a \leq ۲$

۲) $۰ < a \leq ۲$

۳) $۲ < a < ۳$

۴) $۰ < a < ۳$

سیدکامران حسینی

۹ به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (m - ۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -۳

۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۳

۱۰ اگر منحنی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور xها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m > ۳$

۲) $۳ < m < ۴$

۳) $۳ < m < ۵$

۴) $۴ < m < ۵$

سیدکامران حسینی

۱۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + (a + ۳)x - ۱$، محور xها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

۱) $a < -۹$　　　۲) $a < -۳$

۳) $a > -۱$　　　۴) $-۳ < a < ۰$

۱۲ حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^{۲} + ۴x + ۵} = x^{۲} + ۴x + ۳$ کدام است؟

۱) -۲　　　۲) ۱

۳) ۲　　　۴) ۴

سیدکامران حسینی

۱۳ در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) $۳/۵$
۲) ۴
۳) $۴/۵$
۴) ۵

۱۴ اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد، a کدام است؟

۱) -۱۴
۲) -۱۲
۳) -۸
۴) -۶

سیدکامران حسینی

۱۵ ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 + ax + b = 0$، یک واحد از ریشه های معادلهٔ $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b کدام است؟

۱) -2

۲) -1

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{4}{3}$

۱۶ ریشه های معادلهٔ $3x^2 + ax + b = 0$، از ریشه های معادلهٔ $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

۱) -5

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۶

۱۷ به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -2

۲) -1

۳) ۱

۴) ۲

سیدکامران حسینی

۱۸ اگر معادلهٔ $x^{۴} - (m + ۲)x^{۲} + m + ۵ = ۰$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m < -۴$

۲) $m > ۴$

۳) $-۴ < m < ۴$

۴) $۴ < m < ۹$

۱۹ به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

۱) $\frac{-۳}{۲} < m < ۲$

۲) $۰ < m < ۲$

۳) $\frac{۳}{۲} < m < \frac{۵}{۲}$

۴) $۲ < m < ۳$

۲۰ مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^{۲} + x)^{۲} - ۱۸(x^{۲} + x) + ۷۲ = ۰$، کدام است؟

۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

سیدکامران حسینی

۲۱ اگر یکی از منحنی های تابع درجهٔ دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۶

۲۲ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱

۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و -1

سیدکامران حسینی

۲۳ ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$

۲) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

۳) $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$

۴) $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

۲۴ اگر $x = ۳$ یک جواب معادلهٔ $\frac{a}{x+۱} - ۱ = \frac{۶}{x+۵}$ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) ۴

۴) -۴

سیدکامران حسینی

۲۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۵x-۹} = x-۱$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

۲۶ ۲۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۵ درصد را با $۵۰n$ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت n درصد مخلوط کرده‌ایم. اگر غلظت محلول حاصل ۵/۶ درصد باشد n کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸

۳) ۷   ۴) ۶

سیدکامران حسینی

۲۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $x - \frac{1}{x} = 3$ و $2\alpha - \beta$ و $2\beta - \alpha$ ریشه‌های معادله $x^2 + kx + n = 0$ باشند مقدار k کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳-
۳) ۹
۴) ۹-

۲۸ اگر مجموع ریشه های معادلهٔ $-x^2 + (m-1)x + 2m - 3 = 0$ برابر ۳ باشد، حاصل‌ضرب ریشه ها چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۳-
۳) ۵-
۴) ۵

سیدکامران حسینی

۲۹ به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $(m-۲)x^{۲}+(m^{۲}-۹)x+۳=۰$ دارای دو ریشه قرینهٔ حقیقی است؟

۱) ± ۳
۲) ۳
۳) -۳
۴) ۲

۳۰ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^{۲}+۳x-k+۴$ برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، تابع محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

۱) محور طول ها را قطع نمی کند.
۲) با طول $\frac{۲}{۳}$ قطع می کند.
۳) با طول $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$ قطع می کند.
۴) با طول $\frac{۳}{۲}$ قطع می کند.

سیدکامران حسینی

۳۱ اگر منحنی به معادلهٔ $f(x) = ۲x^۲ - (a+۲)x + ۲$ محور xها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $a > ۲$

۲) $a > -۲$

۳) $-۶ < a < ۲$

۴) $-۶ < a < -۲$

۳۲ در معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل $\alpha^۲ + ۵\beta - \alpha^۲\beta^۲ + ۲$ چقدر است؟

۱) ۱۷

۲) ۲۵

۳) ۲۱

۴) ۲۳

سیدکامران حسینی

۳۳ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که ریشه های آن $\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۲}$ باشد، کدام است؟

۱) $۲۵x^۲ - ۱۶x + ۴ = ۰$

۲) $x^۲ - ۲۵x + ۴ = ۰$

۳) $۱۶x^۲ - ۲۵x + ۴ = ۰$

۴) $x^۲ - ۱۶x + ۴ = ۰$

۳۴ مجموع جواب های معادلهٔ $\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ + ۴\left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۲۱ = ۰$ چقدر است؟

۱) ۷-

۲) ۴-

۳) ۳

۴) ۱۰

سیدکامران حسینی

۳۵ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۳} + ۲x^{۲} - ۳x = ۴$ برابر ۲- باشد، حاصل‌ضرب دو ریشهٔ دیگر چقدر است؟

۱) $-\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۳۶ معادلهٔ درجه دومی که ریشه های آن $\sqrt{a+۴} - ۲$ و $\sqrt{a+۴} + ۲$ باشند، کدام است؟

۱) $x^{۲} - ۴x + a = ۰$ ۲) $x^{۲} + ۴x + a = ۰$

۳) $x^{۲} + ۴x - a = ۰$ ۴) $x^{۲} - ۴x - a = ۰$

۳۷ معادلهٔ $\frac{۲x^{۳} - x}{x^{۳} + ۱} = \frac{x^{۲} - x}{x^{۲} - ۱}$ چند جواب حقیقی دارد؟

سیدکامران حسینی

۱) صفر ۲) ۴

۳) ۲ ۴) ۳

۳۸ اگر $x = ۴$ یک جواب معادلهٔ $\frac{a-۱}{۲x-۴} = \frac{۱}{x^۲-۴} - \frac{x-a}{x^۲-x-۶}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۲

۴) جواب دیگری ندارد.

سیدکامران حسینی

۳۹ اگر معادلهٔ $\frac{2x-2}{x+1}+\frac{a}{x}=1$ جواب حقیقی نداشته باشد، آنگاه مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(9, +\infty)$

۲) $(1, 9)$

۳) $(-1, 9)$

۴) $\varnothing$

۴۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

۱) $m>2$

۲) $-1<m<2$

۳) هر مقدار m

۴) هیچ مقدار m

سیدکامران حسینی

۴۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند به‌طوری‌که $\alpha < \beta$ و $\alpha(\beta + a) = b\sqrt{۳} - ۱$، حاصل $۲a + b$ کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Q})$

۱) صفر

۲) ۱-

۳) ۱

۴) ۲-

۴۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۷x + ۲ = ۰$ باشند حاصل عبارت $A = \alpha^۲ + \beta + \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴}$

۲) $\frac{۳۱}{۴}$

۳) $\frac{۴۳}{۴}$

۴) $\frac{۴۹}{۴}$

سیدکامران حسینی

۴۳ اگر معادلهٔ $mx^{۴} - ۴x^{۲} + m - ۳ = ۰$ دارای چهار ریشهٔ متمایز باشد، حاصل $[m]$ برابر چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۵

۴۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} + ۲mx + m + ۲ = ۰$ در رابطهٔ $-۲ < \alpha < ۱ < \beta$ صادق باشند، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۱, ۲]$
۲) $(-\infty, -۱)$
۳) $(۲, +\infty)$
۴) $(-۱, ۲)$

۴۵ اگر سهمی $f(x) = ax^{۲} + (۲a - ۱)x - ۱$ فقط از سه ناحیهٔ محور مختصات عبور کند، آنگاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $a \in \mathbb{R}$
۲) $a < ۰$
۳) $a \geq \frac{۱}{۲}$
۴) $a \in \varnothing$

سیدکامران حسینی

۴۶ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}=-۱+\sqrt{۲-۲\sqrt{۱-x^۲}}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

سیدکامران حسینی

۴۷ اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۵ = ۰$ باشد حاصل $(\alpha - ۵)(\alpha - ۲)(\alpha + ۱)$ کدام است؟

۱) ۱۵

۲) -۱۵

۳) ۱۰

۴) -۱۰

۴۸ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\{\alpha - \frac{۲}{\beta}, \beta - \frac{۲}{\alpha}\}$ خواهد بود؟

۱) $۳x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$

۲) $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$

۳) $۶x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$

۴) $۶x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$

سیدکامران حسینی

۴۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱$ فقط از ناحیهٔ اول از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a \leq ۲$

۲) $a < ۳$

۳) $-۶ < a < ۳$

۴) $a < -۶$

۵۰ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۵ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + x - \frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) -۱

۳) ۱

۴) -۳

سیدکامران حسینی

۱

گزینه ۴

گام اول

ریشه های معادلهٔ درجه دو را α و β در نظر می گیریم. چون $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، در این صورت $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ است.

سیدکامران حسینی

$$(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های}} \alpha+\beta=-(-\frac{۳}{m^۲-۴})$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۳}{m^۲-۴} \text{ و } \frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{۳}{m^۲-۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow m^۲-۴=۱۲ \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=\pm۴$$

به ازای $m=۴$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و درنتیجه معادله فاقد ریشه می‌شود، پس فقط $m=-۴$ قابل‌قبول است.

سیدکامران حسینی

۲

گزینه ۲

گام اول

α و β را ریشه های معادلهٔ درجه دو فرض می کنیم. $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{۲})^{۲} = ۲$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

سیدکامران حسینی

$$mx^۲ - ۵x + m^۲ - ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{α و β ریشه های}} \alpha\beta = \frac{m^۲ - ۳}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=۲} ۲ = \frac{m^۲ - ۳}{m} \Rightarrow m^۲ - ۳ = ۲m$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m - ۳)(m + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ \\ m = -۱ \end{cases}$$

$$m = ۳ : \quad ۳x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۷۲ < ۰ \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -۱ : \quad -x^۲ - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۸ > ۰$$

پس فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

سیدکامران حسینی

۳

گزینه ۳

اول عبارت $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ را ساده می کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$حاصل ضرب ریشه های معادله است و به‌راحتی محاسبه می شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^{۲} = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$۴x^{۲} - ۱۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{و } \beta \text{ ریشه های } \alpha} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{۱۲}{۴}) = ۳ \\ \alpha\beta = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{۳+۱}=\sqrt{۴}=۲$$

پس حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

سیدکامران حسینی

۴

گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ $x(5x+3)=2$ را به فرم استاندارد معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه های آن است، مقدار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم.

برای یافتن k باید حاصل $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{4}$ قرار دهیم.

$$x(5x+3)=2 \Rightarrow 5x^2+3x=2 \Rightarrow 5x^2+3x-2=0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{3}{5} \\ \alpha\beta=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می کنیم:

سیدکامران حسینی

$$۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \frac{۱}{\alpha^۲} \text{ و } \frac{۱}{\beta^۲}} \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲} = \frac{k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha^۲ \beta^۲} = \frac{(\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta}{\alpha^۲ \beta^۲} = \frac{k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{(-\frac{۳}{۵})^۲ - ۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲} = \frac{k}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۲۵} + \frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}} = \frac{\frac{۲۹}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}} = \frac{۲۹}{۴} = \frac{k}{۴} \Rightarrow k = ۲۹$$

سیدکامران حسینی

۵

گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $\frac{\alpha}{۲} + ۵$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطهٔ مجموع ریشه ها مقدار α و با استفاده از رابطهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها، m را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۸x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (\frac{\alpha}{۲}+۵) \text{ ریشه‌های}} \alpha + \frac{\alpha}{۲} + ۵ = -(-\frac{۸}{۱}) = ۸ \Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} + ۵ = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} = ۳ \Rightarrow \alpha = ۲$$

مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{۲} + ۵) = \frac{m}{۱} = m \Rightarrow ۲(۱ + ۵) = m \Rightarrow m = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

سیدکامران حسینی

۶

گزینه ۳

ابتدا از روی معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. سپس حاصل $\frac{۱}{\alpha} + ۱ + \frac{۱}{\beta} + ۱$ و $(\frac{۱}{\alpha} + ۱)(\frac{۱}{\beta} + ۱)$ را محاسبه می کنیم. اگر S و P مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های یک معادلهٔ درجه دو باشند، آن معادلهٔ درجه دو به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ نوشته می شود.

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} \\ \alpha\beta = -\frac{۴}{۲} = -۲ \end{cases}$$

S و P را برای معادلهٔ جدید به دست می آوریم:

سیدکامران حسینی

$$S = \frac{۱}{\alpha} + ۱ + \frac{۱}{\beta} + ۱ = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۲ = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{-۲} + ۲ = -\frac{۳}{۴} + ۲ = \frac{۵}{۴}$$

$$P = (\frac{۱}{\alpha} + ۱)(\frac{۱}{\beta} + ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} + \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۱ = -\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴} + ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^{۲} - \frac{۵}{۴}x - \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^{۲} - ۵x - ۱ = ۰$$

سیدکامران حسینی

۷

گزینه ۱

گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکسیمم باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی شود.

گام دوم

ضریب $x^۲$ منفی است پس:

$$K + ۳ < ۰ \Rightarrow K < -۳$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکسیمم) برابر صفر است:

سیدکامران حسینی

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow(-۴)^{۲}-۴(K+۳)K=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶=۴(K+۳)K\Rightarrow K(K+۳)=۴\Rightarrow K^{۲}+۳K-۴=۰$$
$$\Rightarrow (K+۴)(K-۱)=۰\xrightarrow{K<-۳}K=-۴$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه ها می انداختیم تنها گزینه ای که $K<-۳$ باشد، گزینهٔ ۱ یعنی $k=-۴$ است.

سیدکامران حسینی

۸

گزینه ۱

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند این است که ضریب $x^۲$ یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

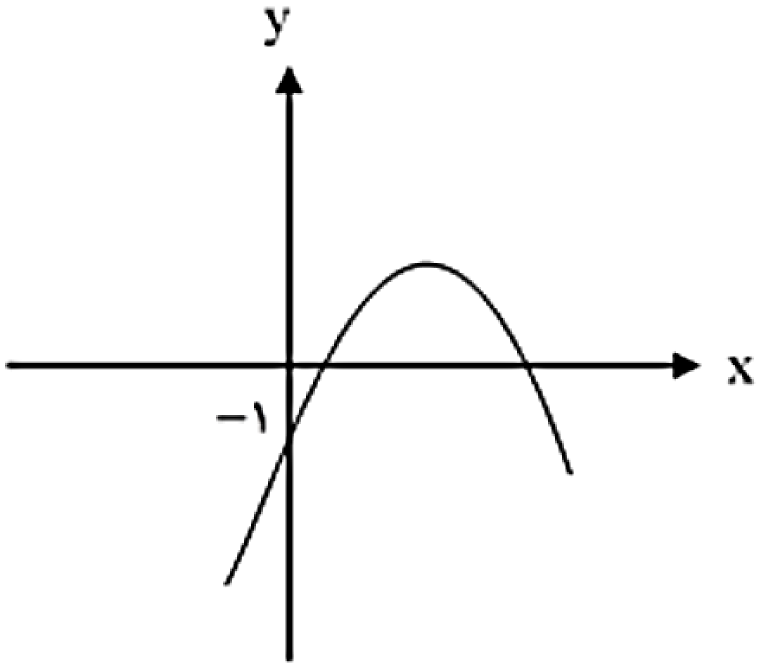
$$a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳$$

سیدکامران حسینی

روش دوم:

با توجه به اینکه $a < ۳$ است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به‌دست‌آمده را از $a < ۳$ کم می کنیم.

چون عرض از مبدأ -۱ است و $a < ۳$؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



سیدکامران حسینی

و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

۱) باید دو ریشه داشته باشد $\Rightarrow \Delta > ۰$

۲) جمع ریشه ها > ۰

۳) ضرب ریشه ها > ۰

$\Delta > ۰ \Rightarrow a^{۲} - ۴(a - ۳)(-۱) > ۰ \Rightarrow a^{۲} - ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲$ یا $a < -۶ \quad (I)$

جمع ریشه ها $> ۰ \Rightarrow \dfrac{-a}{a - ۳} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۳ \quad (II)$

ضرب ریشه ها $> ۰ \Rightarrow \dfrac{-۱}{a - ۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (III)$

$(I) \quad \cap \quad (II) \quad \cap \quad (III) \Rightarrow ۲ < a < ۳$

سیدکامران حسینی

به ازای بازهٔ به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از $a < ۳$ خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty\,,\,-۳) - (۲\,,\,۳) = (-\infty\,,\,۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

درنتیجه به ازای بازهٔ فوق برای a نمودار تابع از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد.

سیدکامران حسینی

۹

گزینه ۳

گام اول

الف) نمودار تابع درجه دو در صورتی بر محور xها مماس می شود که ریشهٔ مضاعف داشته باشد. دراین صورت $\Delta = ۰$ خواهد بود.

ب) چون نمودار تابع بالای محور xها قرار دارد و از بالا بر محور xها مماس شده است، پس ضریب $x^۲$ مثبت در نظر گرفته می شود.

گام دوم

$$y = (m - ۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$$

$$۱)\ \ m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (I)$$

سیدکامران حسینی

$$y = (m-۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$$

$$۱)\quad m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (I)$$

$$۲)\quad \Delta = ۰ \Rightarrow (-۳)^۲ - ۴(m-۲)(m+۲) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴(m^۲ - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow m^۲ = ۴ + \frac{۹}{۴} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m = \pm\frac{۵}{۲} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{۵}{۲}$ را به ما می دهد.

سیدکامران حسینی

۱۰ گزینه ۳

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می کند، پس معادلهٔ $y = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$$

$$۱)\quad \Delta > ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(۲)(m-۳) > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۸(m-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow ۸(m-۳) < ۱۶ \Rightarrow m - ۳ < ۲ \Rightarrow m < ۵ \quad (\mathrm{I})$$

$۲)\quad S = x_۱ + x_۲ = -(-\frac{۴}{۲}) = ۲ > ۰ \Rightarrow$ همواره برقرار است

سیدکامران حسینی

۲) $S = x_۱ + x_۲ = -(-\frac{۴}{۲}) = ۲ > ۰ \Rightarrow$ همواره برقرار است

۳) $P = x_۱ . x_۲ = \frac{m-۳}{۲} > ۰ \Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \quad (II)$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای m، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می توان نوشت:

$(I) \cap (II): \quad ۳ < m < ۵$

سیدکامران حسینی

۱۱

گزینه ۱

گام اول

الف) نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می کند. معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه ها منفی و حاصل ضرب ریشه ها مثبت در نظر گرفته می شود.

ج) مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a، اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^۲ + (a+۳)x - ۱$$

$$۱)\quad \Delta > ۰ \Rightarrow (a+۳)^۲ - ۴(a)(-۱) > ۰ \Rightarrow (a+۳)^۲ + ۴a > ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۶a + ۹ + ۴a > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۱۰a + ۹ > ۰$$

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

$$\Rightarrow a^{۲} + ۶a + ۹ + ۴a > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۱۰a + ۹ > ۰$$

$$\Rightarrow (a+۹)(a+۱) > ۰ \Rightarrow a < -۹ \text{ یا } a > -۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \ S = x_{۱} + x_{۲} = -\frac{a+۳}{a} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a} > ۰ \Rightarrow a < -۳ \text{ یا } a > ۰ \ (II)$$

$$۳)\ \ P = x_{۱}.x_{۲} = -\frac{۱}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \ \ (III)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -۹$$

۱۲

گزینه ۲

برای حل معادلهٔ دادهشده از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$x^{۲} + ۴x + ۳ = t$$

حالا معادلهٔ جدید برحسب t به صورت زیر درمی آید:

$$x^{۲} + ۴x + ۳ = \sqrt{x^{۲} + ۴x + ۳ + ۲} \Rightarrow t = \sqrt{t + ۲}$$

با حل معادلهٔ به دست آمده مقدار t و در ادامه حاصل ضرب ریشه های معادلهٔ اصلی را محاسبه می کنیم.

$$t = \sqrt{t + ۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^{۲} = t + ۲ \Rightarrow t^{۲} - t - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۲)(t + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \\ t + ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱ \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

اکنون معادلهٔ اصلی را حل می کنیم:

$$t = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۳ = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱x_۲ = ۱$$

$t = -۱$ غیرقابل‌قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد.

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

۱۳

گزینه ۳

گام اول

اگر یکی از ریشه های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشهٔ دیگر برابر ۲α می شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه ها برابر $\frac{۹}{۲}$ است. هر یک از ریشه ها را تعیین می کنیم:

$$\alpha(۲\alpha) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه ها مثبت}} \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲(\frac{۳}{۲}) = ۳$$

بنابراین یکی از ریشه ها برابر $\frac{۳}{۲}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه ها برابر ۴/۵ می شود.

۱۴ گزینه ۱

گام اول

الف) اگر ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، برابر با $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادلهٔ دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

سیدکامران حسینی

برای تعیین مقدار a باید حاصل‌جمع ریشه های معادلهٔ دوم را به دست آوریم:

$$۳x^{۲}+ax+b=۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\alpha} \text{ و } \frac{۲}{\beta}} \frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=-\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha+۲\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=-\frac{a}{۳} \xrightarrow{(I)} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}}=-\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳}=-\frac{a}{۳} \Rightarrow a=-۱۴$$

سیدکامران حسینی

۱۵

گزینه ۲

گام اول

الف) ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ به صورت $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ می شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{۷}{۳} \\ \alpha\beta = \dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

$$x^{۲} + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = b \xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}]{\alpha\beta=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} - \frac{۷}{۳} + ۱ = -۱ = b \Rightarrow b = -۱$$

سیدکامران حسینی

۱۶

گزینه ۴

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه های معادلهٔ $۳x^{۲} - ۴x - ۱ = ۰$ باشند پس می توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ ریشه های معادلهٔ $۳x^{۲} + ax + b = ۰$ هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه های معادله یا همان $(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^{۲} - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۴}{۳} \\ \alpha\beta = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

$$۳x^{۲} + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = \frac{b}{۳}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = \frac{b}{۳} \xrightarrow{(\mathrm{I})} -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} + ۱ = \frac{b}{۳} \Rightarrow \frac{b}{۳} = ۲ \Rightarrow b = ۶$$

سیدکامران حسینی

۱۷

گزینه ۲

گام اول

وقتی گفته می شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ در می آوریم:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \Rightarrow mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می کنیم.

سیدکامران حسینی

$$mx^{۲}+۳x+m^{۲}-۲=۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } x_{۱} \text{ و } x_{۲}} x_{۱}x_{۲}=۱ \Rightarrow x_{۱}x_{۲}=\frac{m^{۲}-۲}{m}=۱$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۲=m \Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=۲ \Rightarrow ۲x^{۲}+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(۲)(۲)=۹-۱۶=-۷<۰ \\ m=-۱ \Rightarrow -x^{۲}+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(-۱)(-۱)=۹-۴=۵>۰ \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > ۰$ فقط $m=-۱$ جواب قابل‌قبول است.

سیدکامران حسینی

۱۸

گزینه ۲

سیدکامران حسینی

گام اول

الف) معادلهٔ درجه چهار را با تغییر متغیر $y = x^۲$ به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادلهٔ درجه چهار داده‌شده دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، در این صورت برای معادلهٔ درجه‌دو تشکیل‌شده، باید داشته باشیم $\Delta > ۰$.

ج) نکتهٔ دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل‌ضرب و هم حاصل جمع ریشه ها مثبت است.

گام دوم

$$x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰ \xrightarrow{x^۲=y} y^۲ - (m+۲)y + m + ۵ = ۰$$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴(m+۵) > ۰ \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ - ۴m - ۲۰ > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۱۶ \Rightarrow |m| > ۴ \Rightarrow m < -۴ \text{ یا } m > ۴ \quad (\mathrm{I})$$

حاصل جمع ریشه ها مثبت است پس:

$$-(-\frac{(m+۲)}{۱}) > ۰ \Rightarrow m+۲ > ۰ \Rightarrow m > -۲ \quad (II)$$

حاصل ضرب ریشه ها نیز مثبت است پس:

$$\frac{m+۵}{۱} > ۰ \Rightarrow m+۵ > ۰ \Rightarrow m > -۵ \quad (III)$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد بین مجموعه جواب های به‌دست‌آمده اشتراک می گیریم:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : m > ۴$$

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

۱۹ گزینه ۲

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادلهٔ جدید باید دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می‌آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل‌قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادلهٔ اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادلهٔ جدید یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

سیدکامران حسینی

گام دوم

$$mx-3\sqrt{x}+m-2=0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2-3(\sqrt{x})+m-2=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2-3t+m-2=0$$

حالت اول : $t_1t_2<0 \Rightarrow \dfrac{m-2}{m}<0 \Rightarrow 0<m<2(\mathrm{I})$

حالت دوم : $mt^2-3t+m-2=0 \xrightarrow{\Delta=0} 9-4m(m-2)=0 \Rightarrow 9-4m^2+8m=0$

$$\Rightarrow -4m^2+8m+9=0 \Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{m>0} m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2} \quad (\mathrm{II})$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه‌به گزینه‌ها جواب به‌صورت $0<m<2$ می‌شود.

۲۰

گزینه ۲

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می کنیم:

سیدکامران حسینی

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} + x = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = -۴ \\ x_{۲} = ۳ \end{cases}$$

$$t = ۶ \Rightarrow x^{۲} + x = ۶ \Rightarrow x^{۲} + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۳} = -۳ \\ x_{۴} = ۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + x_{۴} = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

سیدکامران حسینی

۲۱ گزینه ۴

در تابع درجه‌دو به فرم $y = ax^۲ + bx + c$، محور تقارن منحنی ، خط $x = -\frac{b}{۲a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار aرا به دست می آوریم:

$$y = (a-۱)x^۲ + x + ۳ \xrightarrow{\text{x=۲ محور تقارن}} x = -\frac{۱}{۲(a-۱)} = ۲ \Rightarrow a - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجه‌دو به صورت $y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳$ درمی‌آید. معادلهٔ $y = ۰$ را حل می کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times(-۴)} x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = -۲ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

چون در سؤال ذکرشده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = ۶$ قابل‌قبول است.

۲۲

گزینه ۱

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده، باشد می دانیم $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۶$ است. $\alpha^۲ + \beta^۲$ برابر است با:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P = ۶$$

ب) درصورتی‌که $\Delta > ۰$ باشد معادلهٔ درجه‌دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{m + ۳}{m} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{۵}{m} \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{m+3}{m}\right)^2-2\left(\frac{5}{m}\right)=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2+6m+9-10m=6m^2 \Rightarrow 5m^2+4m-9=0 \Rightarrow (5m+9)(m-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=-4<0 \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2-\frac{6}{5}x+5=0 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m=-\frac{9}{5}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

۲۳

گزینه ۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{3}{2} \\ P=\alpha\beta=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ است، لذا:

$$S' = (\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}-۲ = -۵$$

$$P' = (\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱) = \frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$= \frac{۱-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+۱ = \frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}+۱ = ۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^{۲}-S'x+P' = ۰ \Rightarrow x^{۲}+۵x+۲ = ۰$$

سیدکامران حسینی

۲۴

گزینه ۲

$x = ۳$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{۶}{۸} = ۱ - \frac{a}{۴} \Rightarrow a = ۱$$

$$\frac{۶}{x + ۵} = ۱ - \frac{۱}{x + ۱} = \frac{x}{x + ۱}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۵x = ۶x + ۶ \Rightarrow x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۳, -۲$$

سیدکامران حسینی

۲۵

گزینه ۳

$$x \geq \frac{۹}{۵} \Rightarrow ۵x - ۹ = (x - ۱)^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۷x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow x = ۲, ۵$$

سیدکامران حسینی

۲۶

گزینه ۴

$$\frac{۵/۶}{۱۰۰} = \frac{۲۰۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} + ۵۰n \times \frac{n}{۱۰۰}}{۲۰۰ + ۵۰n}$$

$$\frac{۵۶}{۱۰۰۰} = \frac{۱۰ + \frac{۱}{۲}n^۲}{۲۰۰ + ۵۰n} \Rightarrow \frac{۷}{۱۲۵} = \frac{۲۰ + n^۲}{۴۰۰ + ۱۰۰n}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۵} = \frac{۲۰ + n^۲}{۱۶ + ۴n} \Rightarrow ۵n^۲ - ۲۸n - ۱۲ = ۰ \Rightarrow n = ۶$$

سیدکامران حسینی

۲۷ گزینه ۲

$$x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha + \beta = ۳$$

$$-k = (۲\alpha - \beta) + (۲\beta - \alpha) = \alpha + \beta = ۳ \Rightarrow k = -۳$$

۲۸ گزینه ۳

$$-x^{۲} + (m - ۱)x + ۲m - ۳ = ۰$$

$$S = -\frac{b}{a} = ۳ \Rightarrow \frac{-(m-۱)}{-۱} = ۳ \Rightarrow m - ۱ = ۳ \Rightarrow m = ۴$$

$$-x^{۲} + ۳x + ۵ = ۰ \Rightarrow p = \frac{c}{a} = -۵$$

سیدکامران حسینی

۲۹

گزینه ۳

دو ریشه قرینهٔ حقیقی :
$$\begin{cases} b = ۰ \Rightarrow b = m^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow m = \pm ۳ \\ \Delta > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ : x^۲ + ۳ = ۰ \quad (\Delta < ۰) \text{ غیر قابل قبول} \\ m = -۳ : -۵x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \end{cases} \end{cases}$$

سیدکامران حسینی

۳۰

گزینه ۳

$$f(x) = -x^۲ + ۳x - k + ۴$$

$$f(-\frac{b}{۲a}) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow f(\frac{۳}{۲}) = -\frac{۹}{۴} + \frac{۹}{۲} - k + ۴ = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۳x - \frac{۳}{۲}$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۳}}{۲}$$

محور xها را با طول $\frac{۳ \pm \sqrt{۳}}{۲}$ قطع می کند.

سیدکامران حسینی

۳۱

گزینه ۱

شرط داشتن دو ریشه حقیقی مثبت:

$$\begin{cases} ۱)\ S > ۰ \Rightarrow \dfrac{a+۲}{۲} > ۰ \Rightarrow a > -۲ \\ ۲)\ P > ۰ \Rightarrow \dfrac{۲}{۲} > ۰ \Rightarrow \mathbb{R} \\ ۳)\Delta > ۰ \Rightarrow (a+۲)^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow (a+۲)^۲ > ۱۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+۲ > ۴ \text{ یا } a+۲ < -۴ \Rightarrow a > ۲ \cup a < -۶$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} a > ۲$$

سیدکامران حسینی

۳۲

گزینه ۳

$$x^۲ - ۵x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} = ۵ \\ P = \dfrac{c}{a} = ۲ \end{cases}$$

$\alpha \Rightarrow \alpha^۲ - ۵\alpha + ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۲ = ۵\alpha$ ریشه معادله است

$$\alpha^۲ + ۲ + ۵\beta - \alpha^۲\beta^۲ = ۵\alpha + ۵\beta - \alpha^۲\beta^۲ = ۵(\alpha + \beta) - (\alpha\beta)^۲$$
$$= ۵S - P^۲ = ۲۵ - ۴ = ۲۱$$

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

۳۳

گزینه ۳

$$۲x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$$

$$\beta, \alpha \Rightarrow \begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{۳}{۲} \\ \\ P = \dfrac{c}{a} = -۲ \end{cases}$$

$$S' = \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲} = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲} = \frac{S^۲ - ۲P}{P^۲} = \frac{\frac{۹}{۴} + ۴}{۴} = \frac{۲۵}{۱۶}$$

$$P' = \frac{۱}{\alpha^۲} \times \frac{۱}{\beta^۲} = \frac{۱}{\alpha^۲\beta^۲} = \frac{۱}{P^۲} = \frac{۱}{۴}$$

معادلهٔ جدید : $x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۲۵}{۱۶}x + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۱۶x^۲ - ۲۵x + ۴ = ۰$

۳۴

گزینه ۲

$$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۴\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۲۱=۰$$

$$x+\frac{۱}{x}=t \Rightarrow t^{۲}+۴t-۲۱=۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۷)=۰$$

$$\Rightarrow t=۳\ ,\ \ t=-۷ \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{۱}{x}=۳ \Rightarrow x^{۲}-۳x+۱=۰ \Rightarrow S_{۱}=۳ \\ x+\frac{۱}{x}=-۷ \Rightarrow x^{۲}+۷x+۱=۰ \Rightarrow S_{۲}=-۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=S_{۱}+S_{۲}=-۴$$

سیدکامران حسینی

۳۵

گزینه ۱

$$ax^{۳} + ۲x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$$

ریشهٔ معادله : $x = -۲ \Rightarrow -۸a + ۸ + ۶ - ۴ = ۰ \Rightarrow -۸a = -۱۰ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{5}{4}x^3 + 2x^2 - 3x - 4 & \quad x+2 \\
\cline{2-2}
\underline{-\frac{5}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2} & \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \\
\quad -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4 & \\
\quad \underline{+\frac{1}{2}x^2 + x} & \\
\qquad -2x - 4 & \\
\qquad \underline{+2x + 4} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\frac{5}{4}x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)(x+2) \Rightarrow$ حاصل‌ضرب دو ریشهٔ دیگر : $\frac{c}{a} = \frac{-2}{\frac{5}{4}} = \frac{-8}{5}$

۳۶

گزینه ۴

$$x_1 = ۲ - \sqrt{a + ۴}$$
$$x_۲ = ۲ + \sqrt{a + ۴}$$
$$\Rightarrow S = ۴ \ , \ P = (۲ - \sqrt{a+۴})(۲ + \sqrt{a+۴}) = ۴ - a - ۴ = -a$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - a = ۰$$

سیدکامران حسینی

۳۷

گزینه ۳

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{2x^3 - x}{x^3 + 1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^3 - x}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

حال با در نظر گرفتن شرط $x \neq -1, 1$ خواهیم داشت:

سیدکامران حسینی

$$\frac{x\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\cancel{(x+۱)}} = \frac{۲x^۳ - x}{\cancel{(x+۱)}(x^۲ - x + ۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۱} = \frac{۲x^۳ - x}{x^۲ - x + ۱} \Rightarrow x^۳ - x^۲ + x = ۲x^۳ - x$$

$$\Rightarrow x^۳ + x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ + x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x(x-۱)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۲$$

ازآنجاکه $x \neq ۱ , -۱$، معادله دو جواب $x = -۲$ و $x = ۰$ دارد.

سیدکامران حسینی

سیدکامران حسینی

۳۸ گزینه ۲

چون $x = ۴$ یک جواب معادله است پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{۴ - a}{۱۶ - ۴ - ۶} - \frac{۱}{۱۶ - ۴} = \frac{a - ۱}{۸ - ۴} \Rightarrow \frac{۴ - a}{۶} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{a - ۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۲} (۸ - ۲a) - ۱ = ۳a - ۳ \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x - ۲}{x^۲ - x - ۶} - \frac{۱}{x^۲ - ۴} = \frac{۱}{۲x - ۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x - ۲}{(x + ۲)(x - ۳)} - \frac{۱}{(x - ۲)(x + ۲)} = \frac{۱}{۲(x - ۲)}$$

با ضرب طرفین معادلهٔ اخیر در ک.م.م مخرج کسرها داریم:

$$۲(x-۲)^{۲}-۲(x-۳)=x^{۲}-x-۶ \Rightarrow ۲x^{۲}-۸x+۸-۲x+۶=x^{۲}-x-۶$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۹x+۲۰=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۴, x=۵$$

سیدکامران حسینی

۳۹

گزینه ۲

$$\frac{a}{x}+\frac{2x-2}{x+1}=1\Rightarrow\frac{2x-2}{x+1}=1-\frac{a}{x}\Rightarrow\frac{2x-2}{x+1}=\frac{x-a}{x}$$

$$\xrightarrow{x\neq 0,-1} 2x^2-2x=x^2+x-ax-a$$

$$\Rightarrow x^2+(a-3)x+a=0\xrightarrow[\Delta<0]{\text{فاقد ریشهٔ حقیقی}}(a-3)^2-4a<0$$

$$\Rightarrow a^2-10a+9<0\Rightarrow 1<a<9$$

سیدکامران حسینی

۴۰

گزینه ۴

گام اول

الف) منحنی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.

ب) منحنی در دو نقطهٔ منفی محور xها را قطع می‌کند بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \quad , \quad S = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده داریم:

سیدکامران حسینی

$$a = (m - ۲)\ ,\quad b = -۲(m + ۱)\quad ,\quad c = ۱۲$$

حال هر سه شرط گفته‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$\mathrm{I})\Delta > ۰ \Rightarrow ۴(m+۱)^{۲} - ۴\,(m-۲)\,(۱۲) > ۰ \Rightarrow ۴m^{۲} + ۸m + ۴ - ۴۸m + ۹۶ > ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^{۲} - ۴۰m + ۱۰۰ > ۰ \xrightarrow{\div ۴} m^{۲} - ۱۰m + ۲۵ > ۰ \Rightarrow (m-۵)^{۲} > ۰ \Rightarrow m \neq ۵$$

$$\mathrm{II})\quad S < ۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{۲\,(m+۱)}{m-۲} < ۰ \quad\Rightarrow\quad -۱ < m < ۲$$

$$\mathrm{III})\ \ P > ۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{۱۲}{m-۲} > ۰ \quad\Rightarrow\quad m - ۲ > ۰ \quad\Rightarrow\quad m > ۲$$

اشتراک بین دو مجموعهٔ جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

سیدکامران حسینی

۴۱ گزینه ۲

$$x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ - \sqrt{۳} \\ \beta = ۲ + \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\alpha(\beta + a) = b\sqrt{۳} - ۱ \Rightarrow \alpha\beta + a\alpha = b\sqrt{۳} - ۱$$

$$\Rightarrow ۱ + a(۲ - \sqrt{۳}) = b\sqrt{۳} - ۱ \Rightarrow ۲a - a\sqrt{۳} = b\sqrt{۳} - ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a = -۲ \\ -a = b \end{cases} \Rightarrow a = -۱, b = ۱$$

پس $۲a + b = -۱$ است.

سیدکامران حسینی

۴۲

گزینه ۱

$$۲x^۲ + ۷x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = S = -\frac{۷}{۲} \\ \alpha.\beta = P = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{\beta}, \beta = \frac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

$$A = \alpha^۲ + \beta + \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta} = \alpha^۲ + \beta + \beta^۲ + \alpha = (\alpha^۲ + \beta^۲) + (\alpha + \beta)$$

$$= S^۲ - ۲P + S = (-\frac{۷}{۲})^۲ - ۲ + \frac{-۷}{۲} = \frac{۴۹}{۴} - \frac{۱۱}{۲} = \frac{۲۷}{۴}$$

سیدکامران حسینی

۴۳

گزینه ۲

با فرض $a = x^۲$ داریم:

$$ma^۲ - ۴a + m - ۳ = ۰$$

معادله دارای چهار ریشه است وقتی‌که معادلهٔ اخیر دو ریشهٔ مثبت داشته باشد پس:

$$۱)\Delta > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴m(m-۳) > ۰ \Rightarrow -۴(m^۲ - ۳m - ۴) > ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۴$$

$$۲)S > ۰ \Rightarrow \frac{۴}{m} > ۰ \Rightarrow m > ۰$$

$$۳)P > ۰ \Rightarrow \frac{m-۳}{m} > ۰ \Rightarrow m < ۰ \cup m > ۳$$

درنتیجه $۳ < m < ۴$ و بنابراین $[m] = ۳$ است.

سیدکامران حسینی

۴۴

گزینه ۲

x	-۲		α		۱		β	
$f(x)=x^۲+۲mx+m+۲$		+	۰	−			۰	+

$$۱)\Delta > ۰ \Rightarrow ۴(m^۲ - m - ۲) > ۰ \Rightarrow m < -۱ \cup m > ۲$$

$$۲)f(-۲) > ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴ - ۴m + m + ۲ > ۰ \quad \Rightarrow \quad m < ۲$$

$$۳)f(۱) < ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱ + ۲m + m + ۲ < ۰ \quad \Rightarrow \quad m < -۱$$

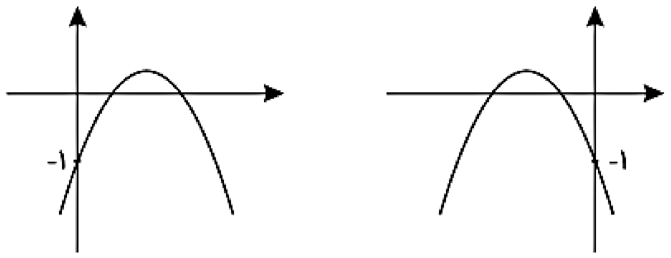
درنتیجه باید $m \in (-\infty, -۱)$ باشد.

سیدکامران حسینی

۴۵

گزینه ۲

باتوجه‌به $f(\circ) = -۱$ پس تابع حتماً از ناحیهٔ سوم و چهارم عبور می‌کند و فقط کافی است از ناحیهٔ اول یا ناحیهٔ دوم (فقط یکی از آن‌ها) عبور کند پس:



$۱)\Delta > \circ \Rightarrow (۲a-۱)^۲ + ۴a = ۴a^۲ + ۱ > \circ$ همواره برقرار است

$۲)P > \circ \Rightarrow \frac{-۱}{a} > \circ \Rightarrow a < \circ$

سیدکامران حسینی

۴۶

گزینه ۱

$$\sqrt{(\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x})^{۲}}=|\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}|$$

باتوجه‌به $D=[-۱,۱]$ و اینکه ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=۰$ است داریم:

$$۱)\ -۱\leq x\leq ۰:\ \sqrt{۱-x}-\sqrt{۱+x}=-۱+\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱+x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}$$

$$۲)\ ۰\leq x\leq ۱:\ \sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}=-۱+\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱+x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

پس مجموع ریشه‌ها صفر است.

روش دوم: چون معادله زوج است پس مجموع ریشه‌ها برابر صفر می‌شود.

سیدکامران حسینی

۴۷

گزینه ۴

$$\alpha^{۲} - ۲\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^{۲} = ۲\alpha + ۵$$

$$(\alpha + ۱)(\alpha - ۲)(\alpha - ۵) = (\alpha^{۲} - \alpha - ۲)(\alpha - ۵) = (۲\alpha + ۵ - \alpha - ۲)(\alpha - ۵)$$

$$= (\alpha + ۳)(\alpha - ۵) = (\alpha^{۲} - ۲\alpha - ۱۵) = (\cancel{۲\alpha} + ۵ - \cancel{۲\alpha} - ۱۵) = -۱۰$$

سیدکامران حسینی

۴۸

گزینه ۱

$$\alpha\beta = ۳ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۳}{\beta} \Rightarrow \alpha - \frac{۲}{\beta} = \frac{۳}{\beta} - \frac{۲}{\beta} = \frac{۱}{\beta} \\ \beta = \frac{۳}{\alpha} \Rightarrow \beta - \frac{۲}{\alpha} = \frac{۳}{\alpha} - \frac{۲}{\alpha} = \frac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

پس کافی است چندجمله‌ای وارونهٔ $x^{۲} - ۷x + ۳ = ۰$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$۳x^{۲} - ۷x + ۱ = ۰$$

سیدکامران حسینی

۴۹

گزینه ۴

سهمی باید روبه‌پایین و دارای دو ریشهٔ منفی باشد.

$$a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳$$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶$$

$$S < ۰ \Rightarrow \frac{-a}{a - ۳} < ۰ \Rightarrow -a > ۰ \Rightarrow a < ۰$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{(a - ۳)} > ۰ \Rightarrow a - ۳ < ۰$$

اشتراک : $a < -۶$

سیدکامران حسینی

۵۰

گزینه ۲

$$x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^{2}+\frac{1}{x^{2}}-2=t^{2} \Rightarrow x^{2}+\frac{1}{x^{2}}=t^{2}+2$$
$$\Rightarrow (t^{2}+2)+t=5 \Rightarrow t^{2}+t-3=0$$

ریشه‌ها را t_1 و t_2 در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} t=t_1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=t_1 \Rightarrow x^{2}-t_1x-1=0 \Rightarrow x_1+x_2=t_1 \\ \text{یا} \\ t=t_2 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=t_2 \Rightarrow x^{2}-t_2x-1=0 \Rightarrow x_3+x_4=t_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=t_1+t_2=-1$$

سیدکامران حسینی

خلاص