یادآوری ۱- می دانیم یک مجموعه ی n عضوی دارای ۲^n زیر مجموعه است که $۲^{n-۱}$ تای آنها زوج عضوی و همین تعداد فرد عضوی می باشد و از طرفی تعداد زیر مجموعه های خالص(سره) $۲^n-۱$ می باشد.

یادآوری ۲- در امر انتخاب هرگاه بخواهیم از میان n شیء مختلف k شیء انتخاب کنیم، این کار به دو طریق ممکن است:

۱) هنگامی که ترتیب مهم باشد، تبدیل خواهد بود: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=(n)_k$ ← حالت نهایی متفاوت است.

۲) هنگامی که ترتیب مهم نباشد، ترکیب خواهد بود: $C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$ ← حالت نهایی یکسان است.

روابط موجود در ترکیب:

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

$$\binom{n}{۳}=\binom{n}{n-۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n(n-۱)(n-۲)...(n-k+۱)}{k!}$$

(قانون پاسکال)

مثال: $\binom{۵}{۲}$ برابر با کدام مقدار است؟

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲!}=۱۰$$

روابط موجود در تبدیل:

۱) $(n)_۰=۱$

۲) $(n)_n=n!$

۳) $(n)_۱=n$

۴) $(n)_k=k!\binom{n}{k}$

مثال: مطلوب است محاسبه ی $(۱۰)_۲$ ؟

$$(۱۰)_۲=۱۰\times ۹=۹۰$$

مثال: مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ مفروض است. این مجموعه:

الف) چند زیر مجموعه دارد؟ $۲^۶=۶۴$

ب) چند زیر مجموعه ی زوج عضوی دارد؟ $۲^{n-۱}=۲^۵=۳۲$

ج) چند زیر مجموعه ی خالص دارد؟ $۲^۶-۱=۶۳$

د) چند زیر مجموعه ی ۳ عضوی دارد؟ $\binom{n}{k}=\binom{۶}{۳}=۲۰$

ه) چند زیر مجموعه ی ۴ عضوی شامل a و b دارد؟ $\binom{۶-۲}{۴-۲}=۶$

و) چند زیر مجموعه ی ۴ عضوی شامل a و فاقد f دارد؟ $\binom{۶-۱-۱}{۴-۱}=\binom{۴}{۳}=۴$

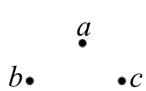
نکته: تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه ی n عضوی که شامل x عضو معین و فاقد x' عضو معین باشد برابر است با:

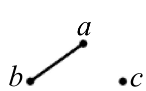
$$\binom{n-x-x'}{k-x}$$

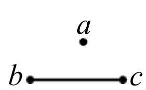
گراف ساده: گراف ساده، زوج مرتبی است مانند $G(V,E)$ که در آن، V مجموعه ای نا تهی و متناهی که به آن مجموعه ی رأس ها گویند و E، زیر مجموعه ای از تمام دو عضوی هایی است که از V می توان ساخت که به آن، مجموعه ی یال ها گویند. تعداد رأس ها را با p (مرتبه ی گراف) و تعداد یال ها را با q (اندازه ی گراف) نشان می دهند.

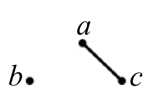
مثال: تمام گراف هایی که با مجموعه ی $V=\{a,b,c\}$ می توان ساخت را رسم کنید.

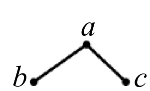
$E\subseteq\{ab,bc,ac\}$

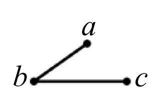
$E_۱=\{\ \}$


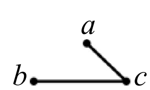
$E_۲=\{ab\}$


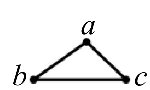
$E_۳=\{bc\}$


$E_۴=\{ac\}$


$E_۵=\{ab,ac\}$


$E_۶=\{ab,bc\}$


$E_۷=\{ac,bc\}$


$E_۸=\{ab,bc,ac\}$


نکته: تعداد گراف های ساده ی برچسب دار p رأسی (با رئوس دارای نـام)، $۲^{\binom{p}{۲}}=۲^{n(E)}$ مـی باشـد. لازم بـه ذکـر اسـت که $n(E)=\binom{p}{۲}$.

تست: با رئوس $V=\{a,b,c,d\}$:

الف)چند گراف ساده می توان تشکیل داد؟

ب)چند گراف ساده ی ۵ رأسی و ۸ یالی می توان تشکیل داد؟

نکته: تعداد گراف های ساده ی برچسب دار p رأسی و q یالی برابر است با: $\binom{\binom{p}{۲}}{q}$

تست: با $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند گراف ساده ی ۵ یالی می توان تشکیل داد که $ab,cd\in E$ و $ef\notin E$ ؟

نکته: طبق تعریف، گراف با صفر رأس و بی نهایت رأس وجود ندارد.

نکته: در هر گراف ساده داریم: $۰\le q\le\binom{p}{۲}$

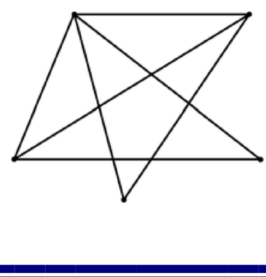
تست: کدام گزینه نمی تواند یال های یک گراف ۶ رأسی باشد؟

۱) ۰		۲) ۱۰		۳) ۱۵		۴) ۱۶

دو رأس مجاور: دو رأس را گویند که توسط یک یال به هم متصل باشند.

درجه ی هر رأس: به تعداد یال هایی که به یک رأس متصل باشند گویند که بزرگ ترین درجه ی هـر گـراف را بـا Δ و کوچک ترین در جه ی هر گراف را با δ نمایش می دهند.

مثال: در گراف شکل مقابل مطلوب است $\delta^۳+\Delta^۵$ ؟



$\Delta=۴,\delta=۰\to\delta^۳+\Delta^۵=۰^۳+۴^۵=۱۰۲۴$

نکته ی مهم: مجموع درجات فرد + مجموع درجات زوج = $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

تست: در یک گراف ساده که ۵ رأس درجه ۴، دو رأس درجه ۳، یک رأس درجه ۲، و ۴ رأس درجه ۱ دارد، چند یال وجود دارد؟

تست: گرافی دارای ۲۰ یال می باشد و مجموع درجات زوج آن ۲۴ است. اگر رئوس فرد هم درجه باشند، این گراف چند رأس درجه فرد دارد؟

نکته ی بسیار مهم: تعداد رئوس فرد هر گراف ساده همواری عددی زوج است.

تست: گراف ساده ی G از مرتبه ی ۴۵ است. کدام گزینه می تواند تعداد رئوس زوج این گراف باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۹ ۳) ۳۶ ۴) ۴۶

نکته: تعداد رأس های زوج از لحاظ فردی و زوجی با مرتبه مطابقت دارد.

میانگین درجات:

$$q - \binom{p-1}{2} \le \delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta \le p - n - 1$$

رأس ایزوله: رأسی را گویند که از درجه ی صفر باشد.

تست: گراف ساده ای از مرتبه ی ۱۰ دارای ۳ رأس ایزوله می باشد. max درجه کدام است؟

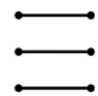
تست: گراف ساده ی G از مرتبه ی ۱۳ دارای Δ درجات ۷ می باشد. مطلوب است تعیین بیش ترین تعداد یال؟

تست: گراف ساده ی G از مرتبه ی ۱۰ دارای ۲۶ یال است. مطلوب است تعیین کم ترین مقدار Δ و بیش ترین مقدار δ؟

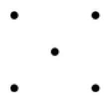
تست: گراف G از مرتبه ی ۷ دارای ۱۹ یال است. کم ترین مقدار δ کدام است؟

تست: گراف G از مرتبه ی ۱۰ دارای ۳۴ یال است. کم ترین مقدار δ کدام است؟

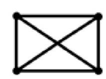
گراف r–منتظم از مرتبه ی p: اگر درجه ی همه ی رئوس گراف G برابر r باشد به G، r–منتظم از مرتبه ی p گویند که $r \le p-1$.



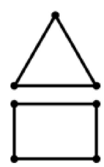
۱ – منتظم از مرتبه ی ۶



۰– منتظم از مرتبه ی ۵

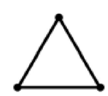


۳– منتظم از مرتبه ی ۴



۲ – منتظم از مرتبه ی ۷

گراف کامل (k_p): گراف $(p-1)$–منتظم از مرتبه ی p را گراف کامل گویند.



۲ – منتظم از مرتبه ی ۳

۱ – منتظم از مرتبه ی ۲

۰– منتظم از مرتبه ی ۱

گراف تهی $(\overline{k_p})$: گراف صفر منتظم از مرتبه ی p را تهی می گویند.

نکته ی بسیار مهم: هرگاه در تستی با گراف منتظم مواجه شدید $rp = 2q$، و در صورت مواجه شدن با گراف کامل، $p(p-1) = 2q$ قرار دهید.

نکته: تنها گرافی که هم کامل است و هم تهی، گراف ۰–منتظم از مرتبه ۱ است.

تست: در گراف ۳–منتظم از مرتبه ی p داریم $p+q=۱۰$. مرتبه ی این گراف کدام مقدار است؟

تست: گراف کاملی دارای ۲۸ یال است. کم ترین و بیش ترین مقدار درجات آن کدام مقادیر است؟

تست: در یک گراف ۶–منتظم داریم $۳p+q=۲۴$. اندازه ی این گراف کدام مقدار است؟

تست: چند گراف ۳–منتظم از مرتبه ی ۱۹ وجود دارد؟

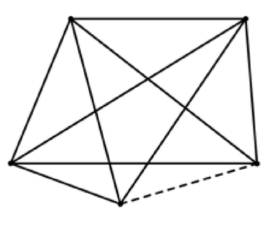
نکته: هیچ گراف فرد منتظمی از مرتبه ی فرد وجود ندارد.

تست: گراف G دارای ۲۳ یال است. کم ترین مرتبه ی این گراف کدام مقدار است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

نکته ی طلایی: هرگاه در تستی اندازه ی گراف G را بدهند و کم ترین مقدار مرتبه را بخواهند، کوچک ترین گزینه ای که در رابطه ی $p(p-۱)\geq ۲q$ صدق نماید جواب تست است.

گراف شبه کامل: اگر $q=\frac{p(p-۱)}{۲}-۱$ باشد، به گراف، شبه کامل گویند یعنی از گراف کامل یک یال کم تر دارد.



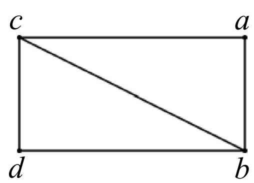
تست: گراف G دارای ۱۰ رأس و ۴۴ یال است. این گراف چند درجه min دارد؟

تست: گراف G از مرتبه ی ۸ دارای ۲۷ یال است. این گراف چند رأس درجه ۷ دارد؟

تست: گراف G از مرتبه ی ۷ دارای ۲۰ یال است. این گراف چند رأس درجه ۵ دارد؟

تعریف مسیر: اگر u و v دو رأس متمایز باشد، یک مسیر از u به v عبارت است از دنباله ای متشکل از $m+۱$ رأس دو به دو متمایز که از u آغاز و به v ختم می شود. در این حالت، طول مسیر m خواهد بود.

مثال: در شکل زیر، همه ی مسیرها از a به b را بنویسید.



$a,b \rightarrow$ طول مسیر ۱

$a,c,b \rightarrow$ طول مسیر ۲

$a,c,d,b \rightarrow$ طول مسیر ۳

$\rightarrow$ کلاً ۳ مسیر

دور: چنان چه ابتدا و انتهای مسیر یکی باشد، یک دور خواهیم داشت.

مثال: در سئوال قبل چند دور وجود دارد؟

$a,c,b,a \rightarrow$ طول دور ۳

$a,c,d,b,a \rightarrow$ طول دور ۴

$c,d,b,c \rightarrow$ طول دور ۳

$\rightarrow$ کلاً ۳ دور

نکته: برای شمارش تعداد دورها کافی است تعداد چند ضلعی ها را بشمارید. هر مثلث یعنی یک دور به طول ۳، هر چهار ضلعی یعنی یک دور به طول ۴ و ...

دنباله ی درجات یک گراف ساده(دنباله ی گرافیکی): دنباله ای است نزولی با خصوصیات زیر:

۱) تعداد رأس های فرد همواره عددی زوج است.

۲) رأس با درجه ی p و بیشتر ندارد.

۳) رأس با درجه ی صفر و $p-۱$ (یا بیشتر) به طور هم زمان ندارد(قابل تعمیم).

۴) حداقل دو رأس با درجه ی یکسان باید داشته باشد.

۵) اگر k رأس از درجه ی $p-۱$ داشته باشد، δ آن حداقل k است.

۶) در هر گراف ساده، $\Delta-\delta \leq p-۲$ می باشد(تعمیم یافته ی ۵).

۷) تشکیل تصاعد هندسی و حسابی نمی دهند مگر آن که همه ی جمله ها برابر باشند(منتظم باشند).

تست: اگر دنباله ی درجات گراف ساده ی G تشکیل یک تصاعد بدهند، حاصل $\frac{\delta^{۳}}{\Delta^{۳}}۱۳۹۰+\frac{\delta^{۷}-\Delta^{۷}}{۱۳۹۱}$ ؟

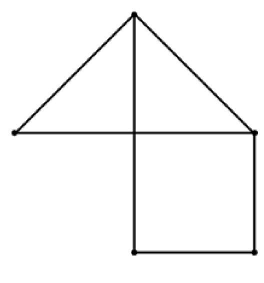
نکته: در روش هاول حکیمی برای تشخیص صحیح بودن درجات یک گراف از بزرگ ترین درجه شروع به حذف کردن می کنیم و به تعداد درجه ی آن از درجه ی بقیه ی رأس ها می کاهیم. در صورتی دنباله ی درجات گراف صحیح است که پس از تکرار متوالی این عمل در نهایت به صفر برسیم.

تست: دنباله ی درجات گراف G به صورت ۴,۳,۳,۲,۲ می باشد. این گراف حداکثر چند دور دارد؟

تست: دنباله ی درجات گراف G به صورت ۴,۴,۲,۲,۲,۲ می باشد. اگر دو رأس با درجه ی max مجاور نباشند، این گراف چند دور به طول ۴ دارد؟

تست: دنباله ی درجات گراف G به صورت ۵,۴,۲,۲,۲,۲,۱ می باشد. اگر دو رأس با درجه ی max مجاور نباشند، این گراف در مجموع چند دور دارد؟

تست: در گراف شکل مقابل چند دور وجود دارد؟



نکات مسیر و دور:

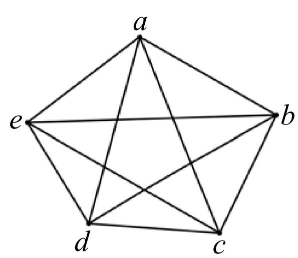
۱) $p \le l \le ۳$، (l: طول دور)

۲) $۱ - p \le L \le ۱$، (L: طول مسیر)

۳) رأس: مسیر با طول صفر

۴) یال: مسیر با طول ۱

تست: در گراف $k_۵$، چند مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس b وجود دارد؟



نکته: تعداد مسیرهای به طول L در گراف k_p از رأس a به رأس b برابر است با: $(p-۲)_{L-۱}$

تست: در گراف $k_۶$، چند مسیر با طول های مختلف از رأس a به رأس b وجود دارد؟

نکته: تعداد مسیرهای با طول های مختلف از رأس a به رأس b در گراف k_p برابر است با: $(e = ۲/۷۲)$

$$\left[(p-۲)!\times e\right]$$

نکته: هرگاه در تستی تعداد مسیرها به طول های مختلف را بخواهند، ابتدا مسئله را با روابط $(p-۲)_{L-۱}$ و $\left[(p-۲)!\times e\right]$ حل نموده و سپس، حاصل را در تعداد یال های گراف کامل $\left(q = \frac{p(p-۱)}{۲}\right)$ ضرب می نمائیم.

مثال: در گراف $k_۷$، چند مسیر به طول ۴ بین رئوس مختلف وجود دارد؟

$$(p-۲)_{L-۱} = (۷-۲)_{۴-۱} = (۵)_۳ = ۵\times۴\times۳ = ۶۰$$

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱ \qquad (p-۲)_{L-۱}\times\frac{p(p-۱)}{۲} = ۶۰\times\frac{۷\times۶}{۲} = ۱۲۶۰$$

تست: در گراف k_5، چند مسیر با طول های مختلف بین رئوس مختلف وجود دارد؟

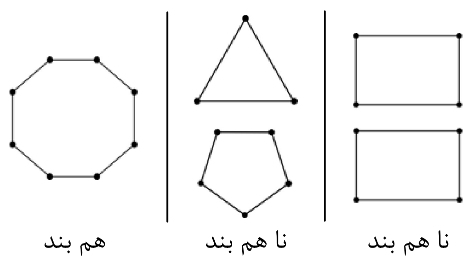
تست: در گراف k_5، چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

نکته: تعداد دورها در گراف k_p برابر است با: $\binom{p}{l}\frac{(l-1)!}{2}$

تست: گراف k_5 چند دور دارد؟

نکته: هر گراف ۲–منتظم از اجتماع تعدادی چند ضلعی به وجود می آید. مثلاً گراف ۲- منتظم از مرتبه ی ۸ به صورت های زیر است:

این گراف، ۳ ریخت دارد. →



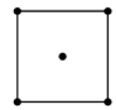
تست: چند گراف ۲–منتظم از مرتبه ی ۱۲ وجود دارد؟

نکته ی طلایی: باید ببینیم عدد ۱۲ به چند طریق به وسیله ی مجموع اعداد طبیعی مساوی با ۳ و یا بزرگ تر از آن قابل نوشتن است.

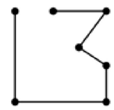
نکته: بیش ترین تعداد دور زمانی است که بیش ترین ۳ را داشته باشیم $= \left[\frac{p}{3}\right]$

تست: حداکثر تعداد دورهای یک گراف ۲–منتظم از مرتبه ی ۱۳ کدام است؟

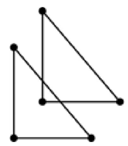
گراف هم بند: گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.



نا هم بند
۲ بخش



هم بند
۱ بخش



نا هم بند
۳ بخش

تست: گراف G از مرتبه ی ۵ مفروض است. مطلوب است:

الف) کم ترین تعداد یال برای آن که هم بند باشد.

ب) کم ترین تعداد یال برای آن که همواره(تحت هر شرایط) هم بند باشد.

ج) بیش ترین تعداد یال برای آن که نا هم بند باشد.

د) بیش ترین تعداد یال برای آن که ۳ بخشی باشد.

ه) کم ترین تعداد یال برای آن که ۳ بخشی باشد.

تست: گراف G از مرتبه ی ۱۰ دارای ۳۸ یال است. این گراف، ... است.

۱) کامل　　۲) هم بند　　۳) نا هم بند　　۴) منتظم

نکته: اگر در یک گراف، $q > \binom{p-1}{2}$ باشد، آن گراف حتماً هم بند است.

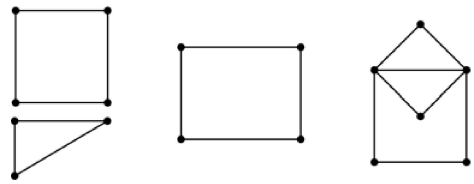
تست: دنباله ی درجات گراف G برابر ۶,۲,۲,۱,۱,۱,۱ می باشد. این گراف، ... است.

۱) هم بند　　۲) نا هم بند　　۳) اویلری　　۴) همیلتونی

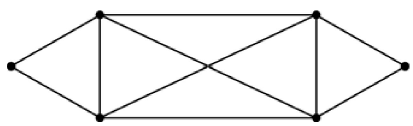
نکته: اگر در یک گراف، $\Delta = p - 1$ باشد، آن گراف حتماً هم بند است.

گراف اویلری: گراف هم بندی است که درجه ی همه ی رئوس آن، زوج باشد.

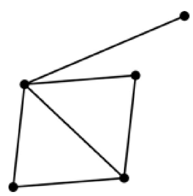
در اشکال زیر، تنها گراف سمت راست اویلری می باشد.



خصوصیت گراف اویلری: در یک گراف اویلری می توان با شروع از یکی از رئوس، همه ی یال ها را دقیقاً یک بار پیمود و به نقطه ی شروع بازگشت و بر خلاف دور عادی در این عمل می توان از یک رأس چندین بار هم گذر نمود.



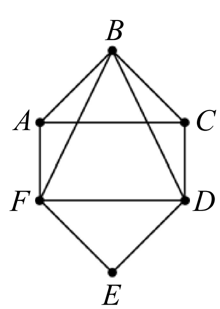
تست: اگر در گراف زیر هر رأس و هر یال به ترتیب به منزله ی یک خشکی و یک پل باشد، حداقل چند پل دیگر احداث کنیم تا با شروع از یکی از خشکی ها بتوان همه ی پل ها را یک بار پیمود و به نقطه ی شروع مراجعت نمود.



گراف شبه اویلری: نوعی گراف هم بند است که درجه ی همه ی رئوس آن به جز ۲ رأس زوج باشد.

خصوصیت گراف شبه اویلری: در گراف شبه اویلری اگر از یک رأس فرد شروع کنیم و همه ی یال ها را دقیقاً یک بار طی کنیم، نقطه ی پایان رأس فرد دیگر است.

تست: در گراف شکل زیر اگر از نقطه ی A شروع کنیم و همه ی یال ها را دقیقاً یک بار طی کنیم، نقطه ی پایان کدام است؟



تست: کدام یک از گراف های زیر حتماً اویلری است؟

۱) گراف ۳–منتظم از مرتبه ی ۶ ۲) گراف ۲–منتظم از مرتبه ی ۷

۳) $k_{۷}$ ۴) $k_{۸}$

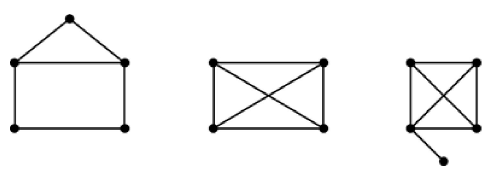
نکته: کلیه ی گراف های کامل k_p به ازای مقادیر فرد p، گراف اویلری (درجه ی زوج) و کلیه ی گراف های کامل k_p به ازای مقادیر زوج p، گراف غیر اویلری (درجه ی فرد) می باشد.

گراف همیلتونی: گراف هم بندی از مرتبه ی $p \geq ۳$ است که حداقل یک دور به طول p داشته باشد.

خصوصیات گراف همیلتونی:

۱) حتماً هم بند است و با حذف یک یال همچنان هم بند می ماند.

در اشکال زیر، تنها دو گراف سمت چپ همیلتونی می باشد.



۲) کلیه ی گراف های کامل به جز $k_{۱}$ و $k_{۲}$، همیلتونی می باشد.

۳) عکس خصوصیت فوق، گاهی درست و گاهی غلط است.

۴) حداقل درجه در یک گراف همیلتونی، ۲ می باشد.

۵) اگر در گرافی $\delta \geq \frac{p}{۲}$، آن گاه گراف حتماً همیلتونی است.

مثال: آیا گراف ۴,۳,۳,۳,۳ همیلتونی است؟

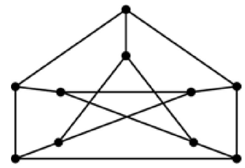
$p = ۵ \ , \ \delta = ۳ \ \rightarrow \ \delta \geq \frac{p}{۲}$

دور همیلتونی: دور به طول p را گویند و در یک گراف کامل از رابطه ی $\binom{p}{p}\frac{(p-۱)!}{۲} = \frac{(p-۱)!}{۲}$ به دست می آید.

تست: گراف کاملی دارای ۱۵ یال است. این گراف چند دور همیلتونی دارد؟

گراف پترسون:

$p = ۱۰$
$q = ۱۵$



خصوصیات گراف پترسون:

۱) ۳–منتظم است.

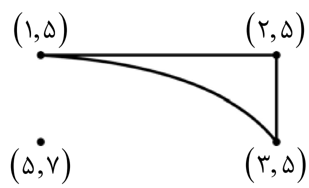
۲) اویلری و همیلتونی نمی باشد.

۳) فاصله ی دو رأس غیر مجاور، ۲ می باشد.

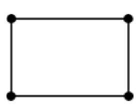
۴) دور به طول ۳,۴,۷,۱۰ ندارد اما دور به طول ۵,۶,۸,۹ را دارا می باشد.

گراف بازه ای: در این نوع گراف که گرافی ساده است، بازه های ریاضی به عنوان رئوس گراف منظور می شود. اگر دو بـازه دارای اشتراک باشند، رئوس نظیر مجاور بوده و اگر دو بازه اشتراک نداشته باشند، رئوس نظیر غیر مجاور می باشند.

مثال: گراف نظیر بازه های (۳,۵)، (۵,۷)، (۲,۵)، و (۱,۵) را رسم کنید.



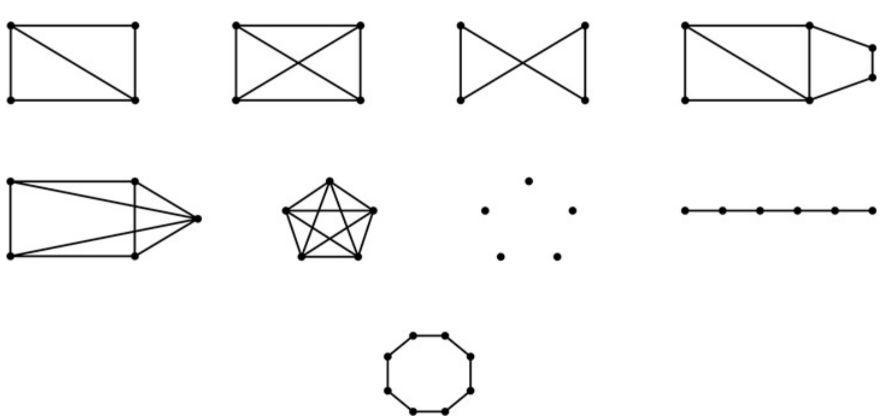
نکته: گراف ۴–ضلعی در صورتی گراف بازه ها است که حداقل، یک قطر خود را شامل گردد.



حفره

۴ - ضلعی فاقد قطر

تست: کدام یک از اشکال زیر، گراف بازه ها است؟

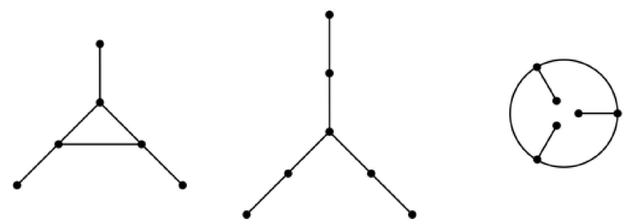


نکته: هرگاه قسمتی از یک گراف بازه ای نباشد، کل آن گراف بازه ای نیست.

نکته: کلیه ی گراف های کامل، گراف تهی و درخت های خطی، گراف بازه ای می باشند.

نکته: کلیه ی گراف های ۲–منتظم و از مرتبه ی $p \geq ۴$ بازه ای نمی باشند.

نکته: گراف های زیر، گراف بازه ای نمی باشند:



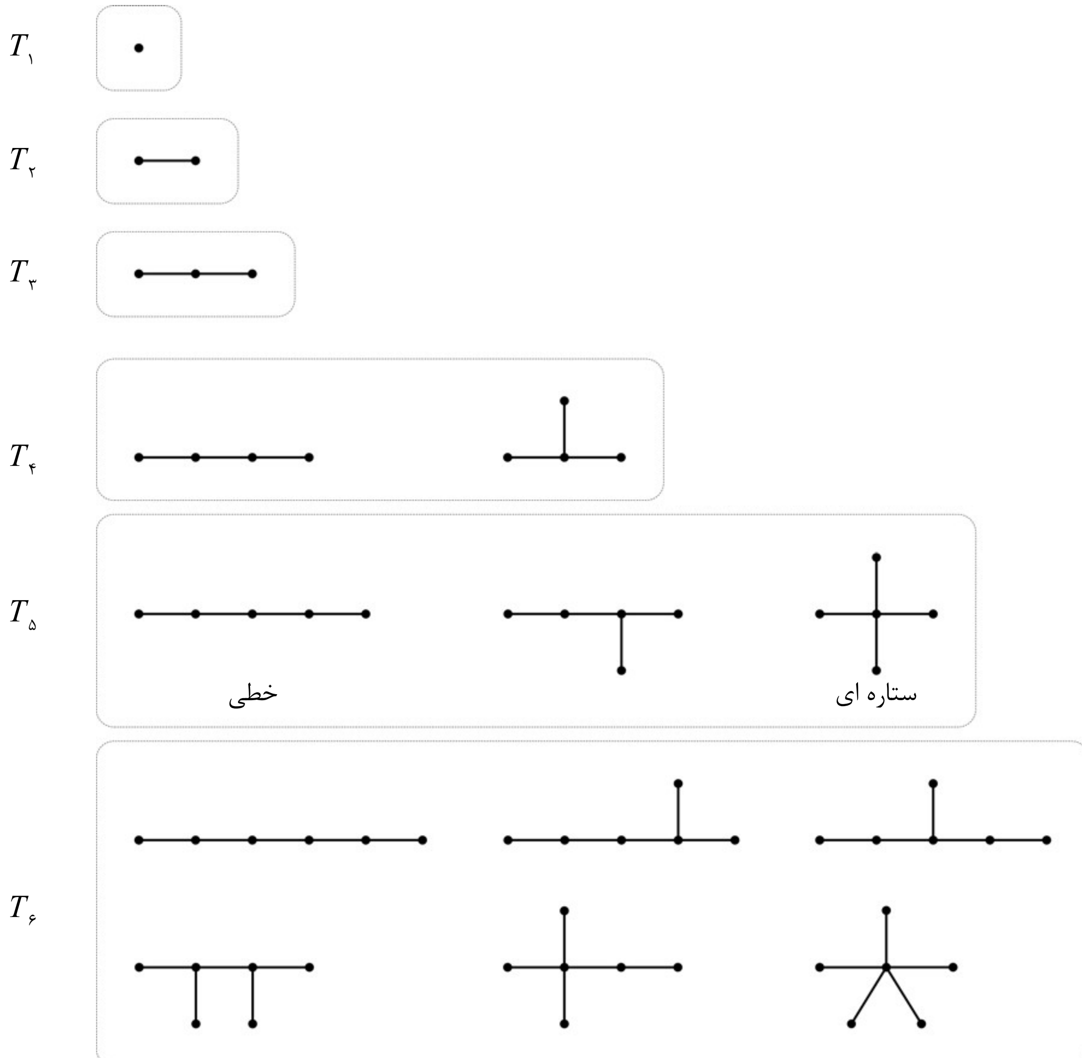
درخت:

هرگاه در یک تست به " گراف هم بند فاقد دور" اشاره شود، منظور یک درخت است.

نکته: هرگاه در یک تست گفته شود که بین هر دو رأس از یک گراف دقیقاً یک مسیر وجود دارد، منظور یک درخت است.

نکته: در صورت مواجه شدن با یک درخت از رابطه ی $q = p - ۱$ استفاده نمائید.

تعداد رأس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد درخت	۱	۱	۱	۲	۳	۶	۱۱



تست: در یک گراف هم بند فاقد دور، $p.q=۲۰$. چند گراف با این خصوصیت قابل رسم است؟

تست: بین هر دو رأس گراف G دقیقاً یک مسیر است. این گراف، شامل ۷ رأس درجه ۱، ۵ رأس درجه ۲، و k رأس درجه ۳ است. مجموع مرتبه و اندازه ی آن کدام مقادیر است؟

نکته: تنها دو درخت وجود دارد که کامل و منتظم است. $T_۱$ و $T_۲$ که به ترتیب، $k_۱$ و $k_۲$ می باشند.

تست: گراف هم بند G فاقد دور است . دنباله ی درجات آن به صورت ۱,۱,...,۱,۱,۹,۹,۱۰ می باشد. مطلوب است تعیین مرتبه ی گراف؟

تست: گراف G، یک گراف هم بند فاقد دور است. کدام گزینه می تواند $p^۲-q^۲$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

نکته: در هر درخت، $p^۲-q^۲$ با $p+q$ برابر بوده و حاصل آن، همواره عددی فرد است در حالی که $p.q$ همواره عددی زوج است.

تست: در یک درخت داریم $\Delta-\delta=۱۳$. اگر این درخت یک رأس از درجه ی Δ داشته باشد، حداقل چند رأس از درجه ی δ دارد؟

نکته: در هر درخت، $\delta=۱$ به جز $T_۱$ و اگر در یک درخت یک رأس از درجه ی Δ داشته باشیم، حداقل به تعداد Δ رأس از درجه ی ۱ داریم. یعنی: $\Delta \le$تعداد یک ها

تعمیم: اگر درختی n رأس از درجه ی Δ داشته باشد، حداقل $n(\Delta-۲)+۲$ رأس از درجه ی ۱ دارد.

تست: در یک گراف هم بند فاقد دور که ۳ رأس از درجه ی Δ دارد، چند رأس درجه ۱ وجود دارد در صورتی که بدانیم $\Delta^۲+\delta^{۱۳۹۰}=۶۵$؟

نکته: تعداد کل مسیرها با طول مثبت در یک درخت، $\binom{p}{۲}$، و تعداد کل مسیرها با طول حداقل ۲، $\binom{q}{۲}=\binom{p-۱}{۲}$ می باشد.

تست: در یک درخت، تعداد مسیرها با طول بیش تر از ۱، برابر ۲۱ می باشد. این درخت، چند مسیر با طول نا منفی دارد؟

نکاتی در باره ی درخت های خطی(میله ای):

۱) دقیقاً دو رأس درجه ۱، و $(p-۲)$ رأس درجه ۲ داشته و رأسی با درجه ی ۳ و بیش تر از آن ندارد.

۲) حداکثر فاصله ی ممکن میان دو رأس در درخت خطی اتفاق افتاده که برابر $q=p-۱$ است.

۳) تنها درختی است که در آن، $\begin{cases}\Delta+\delta=۳\\ \Delta-\delta=۱\end{cases}$ زیرا $\Delta=۲$ و $\delta=۱$.

۴) در میان کلیه ی گراف های هم بند، کم ترین مقدار $\Delta+\delta$، $\Delta^۲+\delta^۲$، $\Delta^۳+\delta^۳$، و ... مربوط به درخت خطی، و بیش ترین مقدار آن، مربوط به گراف کامل (k_p) است.

تست: گراف هم بندی از مرتبه ی ۱۲ فاقد دور است و دقیقاً دو رأس درجه ۱ دارد. این گراف، چند رأس درجه ۲ و چند رأس درجه ۳ دارد؟

تست: در یک درخت، $\Delta^۵+\delta^{۱۳۸۹}=۳۳$ است. اگر تعداد Δ آن، هشت برابر δ باشد، آن گاه $p+q$ کدام مقدار است؟

تست: در یک گراف هم بند از مرتبه ی ۸، min و max مقدار $\Delta^۲+\delta^۲$ کدام است؟

نکاتی در باره ی درخت ستاره ای:

۱) یک رأس از درجه ی $p-۱$ و $p-۱$ رأس از درجه ی ۱ دارد.

۲) $\Delta+\delta=p$ زیرا، $\begin{cases}\Delta=p-۱\\ \delta=۱\end{cases}$.

تست: درخت T دارای ۱۲ یال است. با حذف ۳ یال از آن، چند مؤلفه ی هم بندی خواهیم داشت؟

نکته: اگر از یک درخت، n یال حذف کنیم، $n+۱$ مؤلفه ی هم بندی خواهیم داشت.

تست: در یک گراف هم بند از مرتبه ی ۱۰ که دارای ۱۰ یال می باشد، چند دور داریم؟

۱) ۱ دور ۲) ۲ دور ۳) حداقل یک دور ۴) فاقد دور

نکته: در یک گراف هم بند داریم: $\begin{cases} q < p & \text{فاقد دور} \\ q = p & \text{دقیقاً ۱ دور} \\ q > p & \text{حداقل ۱ دور} \end{cases}$

تست: گراف کاملی از مرتبه ی p دارای ۴۵ یال است. حداکثر چند یال حذف کنیم تا این گراف هم بند بماند؟

تست: در گراف $k_۴$ چند زیر گراف کامل از مرتبه ی کوچک تر یا مساوی ۴ وجود دارد؟

نکته: تعداد زیر گراف های کامل در گراف $k_۴$ از مرتبه ی کوچک تر یا مساوی p، برابر $۲^p - ۱$، و از مرتبـه ی کوچـک تـر از p، برابر $۲^p - ۲$ می باشد.

مکمل یک گراف: گراف $\overline{G}\left(v,\overline{E}\right)$ را مکمل گراف $G\left(v,E\right)$ گویند هرگاه اولاً تعداد رئوس آنها برابر بوده و ثانیاً اگر یـالی عضو E باشد، عضو $\overline{E}$ نباشد و برعکس.

G G'

$$p = p'$$

$$q + q' = \binom{p}{۲} = \frac{p\left(p-۱\right)}{۲}$$

نکته: از ترکیب هر گراف و مکمل آن، گراف کامل به دست می آید.

تست: گرافی دارای ۱۰ رأس و ۲۸ یال است. مکمل آن چند رأس و چند یال دارد؟

نکته: مکمل هر گراف کامل، یک گراف تهی است و برعکس.

خصوصیات گراف k_1:

۱) تهی است.

۲) هم بند است.

۳) درخت است.

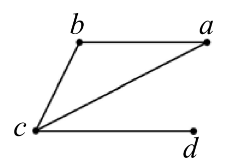
۴) کامل است.

۵) منتظم از مرتبه ی ۱ است.

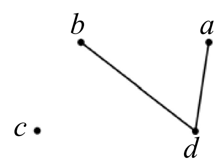
۶) مکمل گراف با خود آن برابر است.

نکته ی مهم: مکمل هر گراف نا هم بند، گرافی هم بند است اما مکمل یک گراف هم بند گاهی گراف هم بند و گاهی گراف نا هم بند است.

ماتریس مجاورت یک گراف ساده: اگر G یک گراف ساده با p رأس و q یال باشد، ماتریس مجاورت نظیر آن، ماتریسی $p\times p$ است که چنان چه دو رأس مجاور باشند درایه ی نظیر ۱، و چنان چه دو رأس مجاور نباشند درایه ی نظیر صفر است.



G



G'

$$G=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \cdot \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \end{array} \qquad G'=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \cdot \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

خصوصیات ماتریس مجاورت:

۱) فقط از درایه های صفر و یک تشکیل شده است.

۲) درایه های روی قطر اصلی همگی صفر می باشند(زیرا طوقه نداریم).

۳) درایه ها نسبت به قطر اصلی متقارن هستند.

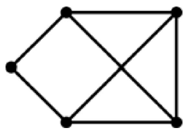
۴) تعداد یک های موجود در هر سطر یا ستون، درجه ی رأس نظیر را نشان می دهد.

۵) مجموع کل یک ها $=2q$ ، مجموع کل صفرها $=0$ ، مجموع کل درایه ها $=2q+0$

۶) تعداد کل یک ها $=2q$ ، تعداد کل درایه ها $=p^2$ ، تعداد صفرها $=p^2-2q$

۷) تعداد صفرهای موجود در هر سطر یا ستون به جز صفرهای روی قطر اصلی، درجه ی رأس نظیر در گراف مکمل را نشان می دهد.

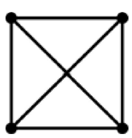
تست: کدام گزینه، تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف شکل مقابل را نشان می دهد؟



۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

تست: اگر $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس مجاورت گراف G باشد، دنباله ی درجات مکمل آن کدام است؟

تست: اگر M، ماتریس مجاورت گراف مقابل باشد، دترمینان آن کدام است؟



نکته: اگر M، ماتریس مجاورت گراف k_p باشد، آن گاه: $|M| = \begin{cases} p-1 & p \text{ فرد} \\ 1-p & p \text{ زوج} \end{cases}$

نکته: اگر M، ماتریس مجاورت یک درخت خطی باشد، $|M|=1$ و اگر M، ماتریس مجاورت یک درخت ستاره ای باشد، $|M|=0$ است.

نکته ی مهم: جدول زیر را به خاطر بسپارید:

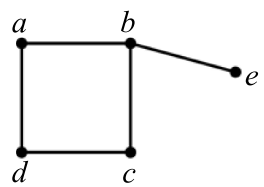
نوع گراف	تعداد یک ها	تعداد صفرها
ساده	$2q$	p^2-2q
منتظم	rp	$p^2-rp=p(p-r)$
کامل	$p(p-1)$	$p^2-(p-1)p=p$
درخت	$2(p-1)$	$p^2-2(p-1)=p^2-2p+2=(p-1)^2+1$

تست: درخت $T_{۷}$ در ماتریس مجاورت خود چند درایه ی صفر دارد؟

نکته: اگر ماتریس مجاورت را یک بار در خودش ضرب کنیم، ماتریس $M^{۲}$ به دست می آید که درایه های روی قطر اصلی به ترتیب، درجات گراف می باشند.

$M^{۲}$ مجموع عناصر قطر اصلی $= \sum_{i=۱}^{p} a_{ii} = ۲q$

مثال: ماتریس $M^{۲}$ گراف روبرو را به دست آورید.



$$\begin{bmatrix} ۲ & & & & \\ & ۳ & & & \\ & & ۲ & & \\ & & & ۲ & \\ & & & & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: اگر $M^{۲}$، ماتریس مجاورت یک گراف کامل باشد:

$$M^{۲} = \begin{bmatrix} p-۱ & & p-۲ \\ & \ddots & \\ p-۲ & & p-۱ \end{bmatrix}$$

مجموع عناصر قطر اصلی $= p(p-۱)$

مجموع عناصر هر سطر یا ستون $= (p-۱)+(p-۱)(p-۲) = (p-۱)(۱+p-۲) = (p-۱)^{۲}$

مجموع کل عناصر $= p(p-۱)^{۲}$

$\left|M^{۲}\right| = (p-۱)^{۲}$

مجموع عناصر خارج قطر $= p(p-۱)^{۲} - p(p-۱) = p(p-۱)\left((p-۱)-۱\right) = p(p-۱)(p-۲)$

$p(p-۱)(p-۲)$ سه عدد متوالی است $\leftarrow$ بر !۳ بخش پذیر است.

تست: اگر M، ماتریس مجاورت گراف $k_{۷}$ باشد، مجموع عناصر ستون سوم $M^{۲}$ کدام است؟

تست: اگر A، ماتریس مجاورت k_p بوده و مجموع عناصر سطرهای اول و سوم A^2 برابر ۳۲ باشد، مجموع کل عناصر A^2 کدام است؟

تست: اگر M، ماتریس مجاورت گراف ساده ی G باشد، کدام دنباله ی زیر می تواند عناصر قطر اصلی M^2 باشد؟

۱) ۱,۱,۳,۲ ۲) ۰,۲,۲,۳

۳) ۲,۲,۳,۱ ۴) ۴,۲,۲,۲

تست: گراف G از مرتبه ی ۱۰ دارای ۶ یال است. حداقل و حداکثر چند مؤلفه ی هم بندی دارد؟

تست: چند گراف ساده با ۵ رأس و ۳ یال می توان رسم کرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تست: چند گراف ساده با ۷رأس و ۳ یال می توان رسم کرد؟

نکته: به طور کلی با n رأس، به طوری که $n \geq 6$ باشد، و ۳ یال می توان ۵ گراف ساده تشکیل داد.

تست: چند گراف ساده با ۲۰۱۱ رأس و ۳ یال می توان تشکیل داد؟

تست: چند گراف ساده با ۶ رأس و ۱۲ یال می توان رسم کرد؟

نکته: تعداد ریخت های هر گراف با مکمل آن برابر است. یعنی، به جای $\begin{pmatrix} p=۶ \\ q=۱۲ \end{pmatrix}$، تعداد ریخت های $\begin{pmatrix} p'=۶ \\ q'=۳ \end{pmatrix}$ را می توان رسم نمود.

تست: چند گراف ۴-منتظم از مرتبه ی ۷ وجود دارد؟

اصل خوش ترتیبی:

به موجب این اصل، هر زیر مجموعه ی نا تهی از اعداد طبیعی دارای کوچک ترین عضو، یا عضو ابتدا است.

مجموعه ای خوش ترتیب است که:

۱) دارای عضو ابتدا باشد.

۲) عضو بعدی آن، در صورت وجود معلوم باشد.

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر، خوش ترتیب نمی باشد؟

۱) $\mathbb{N}=\{۱,۲,...\}$ ۲) $\mathbb{Z}=\{...,-۱,۰,۱,...\}$

۳) $W=\{۰,۱,۲,...\}$ ۴) $\{۳,۵,\sqrt{۷}\}$

۵) $\{\sqrt{۳}\}$ ۶) $\{\sqrt{۱۷}\}$

پاسخ صحیح، گزینه ی ۲ می باشد.

در میان مجموعه های معروف، مجموعه ی اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$، حسابی (W)، و مجموعه ی اعداد اول (P) خوش ترتیب بوده حال آن که مجموعه ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$، اعداد گویا $(\mathbb{Q})$، و اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ خوش ترتیب نمی باشند.

نکته: مجموعه ی تهی خوش ترتیب نمی باشد چون عضو ابتدا ندارد.

تست: از میان مجموعه های زیر، کدام یک خوش ترتیب است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{Z}$

تست: کدام مجموعه خوش ترتیب است؟

۱) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\geq ۳\}$ ۲) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x< ۳\}$

۳) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x> -۳\}$ ۴) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x\leq -۳\}$

نکته: زیر مجموعه های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ با محدودیت نامساوی هیچ گاه خوش ترتیب نمی باشد و زیر مجموعه های $\mathbb{Z}$ با محدودیت نامساوی هنگامی خوش ترتیب است که کران پائین(عضو ابتدا) داشته باشد.

تست: کدام مجموعه خوش ترتیب است؟

۱) $(۵,۷)$ ۲) $[۵,۷]$

۳) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x<۵\}$ ۴) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x^۲\geq ۱۰۰\}$

تست: کدام مجموعه خوش ترتیب نیست؟

۱) اعداد اول ۳ رقمی ۲) $\{[x] \mid x\in\mathbb{R}, x>۵\}$

۳) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲-۸x+۱۵=۰\}$ ۴) $\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^۲+۷x+۱۰۰=۰\}$

نکته: اگر معادله ی درجه دو بدهند، تنها در صورتی خوش ترتیب نیست که جواب نداشته باشد $(\Delta<۰)$.

نکته: $[x] \mid x\in\mathbb{Q} \equiv x\in\mathbb{Z}$ و $[x] \mid x\in\mathbb{R} \equiv x\in\mathbb{Z}$

تست: کدام مجموعه خوش ترتیب نیست؟

۱) $\{[x] \mid x\in\mathbb{Q}, x>-۵\}$ ۲) $\{-x \mid x\in\mathbb{Z}, x<-۱۰\}$

۳) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲+۱۶x+۹۸=۰\}$ ۴) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲+۷x-۳۰=۰\}$

اصل استقراء ریاضی: اگر حکمی به ازای $n=۱$ برقرار باشد و بتوان از درستی فرض $n=k$ به درستی $n=k+۱$ رسید، این حکم به ازای همه ی اعداد طبیعی برقرار است. اگر استقراء از عددی به جز یک شروع شود، به آن استقراء تعمیم یافته می گویند.

از استقراء به دو سبک سئوال طرح می گردد:

۱) سبک اول

مثال: کم ترین مقدار طبیعی m که به ازای آن، حکم $n\geq m\,;\,۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲^n-۱}<\frac{n}{۲}$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

نکته: از کم ترین گزینه شروع به عدد گذاری می کنیم.

$P(۲)=\left(۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}\right)<\frac{۲}{۲}$ برقرار نمی باشد.

$P(۳)=\left(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}=\frac{۳۱}{۲۱}\right)<\frac{۳}{۲}$ برقرار است.

تست: کم ترین مقدار m که به ازای آن، حکم $n! > ۳^n$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

نکته: هرگاه کوچک ترین گزینه ای که امتحان می کنیم درست باشد، باید هر چهار گزینه را امتحان کنیم (زیرا امکان دارد حالتی باشد که یک عدد، درست جواب بدهد و قسمتی خلاف عمل نماید و از عددی دیگر دوباره جواب درست حاصل شود.).

۲) سبک دوم

تست: اگر $S \subseteq \mathbb{N}, ۱ \in S, k \in S \rightarrow k^۲+۱ \in S$ باشد، کدام عدد در S قرار دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۳۱

تست: اگر $A \subseteq \mathbb{N}, ۳ \in A, k \in A \rightarrow ۳k+۱ \in A$ باشد، کدام عدد در A قرار ندارد؟

۱) ۳۱ ۲) ۹۴ ۳) ۲۸۳ ۴) ۶۰۱

تعریف آلگوریتم تقسیم:

۱) بخش پذیری: اگر a و b دو عدد صحیح باشد، عدد a را بر $(b \neq ۰)$ b تقسیم پذیر گویند هرگاه بتوان عدد صحیحی مانند q پیدا کرد به طوری که $a = bq$. در این حالت می گوییم $b|a$ (b عاد می کند a را، یا b می شمارد a را، یا b یک مقسوم علیه(شمارنده، عامل، و یا سازه) a است، یا a یک مضرب b است.)

نکات بخش پذیری:

۱) مجموعه ی مقسوم علیه های دو عدد قرینه با هم یکسان است.

مثال: مجموعه مقسوم علیه طبیعی $\rightarrow \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} = T(-۱۲) = T(۱۲)$

۲) اگر b یک مقسوم علیه صحیح a باشد، $-b$ نیز یک مقسوم علیه صحیح a می باشد.

۳) هر عدد صحیح، به جز ۱ و۱−، حداقل ۲ مقسوم علیه طبیعی و ۴ مقسوم علیه صحیح دارد.

۴) اعداد ۱ و ۱− دقیقاً ۱ مقسوم علیه طبیعی و ۲ مقسوم علیه صحیح دارند.

۵) بی نهایت عدد وجود دارد که صفر را عاد می کند. یعنی، مقسوم علیه های صفر همه ی اعداد طبیعی، و مقسوم علیه های صحیح آن، همه ی اعداد صحیح به جز صفر می باشد $(\dots,-7|0,7|0)$.

نتایج:

۱) $a|b, b\neq 0 \to |a|\le|b|$ ۲) $a|b, |a|>|b| \to b=0$ ۳) $a|1 \to a=\pm 1$

۴) $a|b, b|a \to a=\pm b$ ۵) $a|b, b|c \to a|c$ (اصل تعدی) ۶) $a|b \leftrightarrow a^n|b^n$

۷) $a|b \xrightarrow{n\le m} a^n|b^m$ ۸) $a|b, a|c \to a|mb+nc\ (m,n\in\mathbb{Z})$ ۹) $a|b \to a|kb, ka|kb\ (k\in\mathbb{Z})$

تست: کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a|b \to a^5|b^6$ ۲) $a^3|b^3 \to a^6|b^6$ ۳) $a|b, b|a \to a=b$ ۴) $a|b, a|c \to a|b-c$

تست: اگر $a^2|b^2+c^2$ و $a^2-b^2-c^2>0$، کدام نتیجه گیری درست تر است؟

۱) $a=0$ ۲) $|b|=|c|=1$ ۳) $b=c=0$ ۴) $b=c=\frac{a}{b}$

تست: اگر a عددی مثبت و $a+2|6$، آن گاه چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

تست: به ازای چند مقدار طبیعی a، $a+2|a^2+2$ برقرار است؟

تست: به ازای کدام مقدار n، $\frac{n+53}{n+18}$ به یک عدد طبیعی تبدیل می شود؟

نکته: در این حالت، الزاماً n به دست آمده را در کسر داده شده می باید امتحان نمود و کسر حتماً باید طبیعی باشد.

مثال: چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $yx-y-5x-7=0$ قرار دارد؟

$$y(x-1)=5x+7 \to y=\frac{5x+7}{x-1} \qquad x-1 \mid 5x+7 \to x-1 \mid 12$$

$$x-1 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$$

مثال: چند عدد طبیعی کم تر از ۱۰۰ وجود دارد که مضرب ۱۲ باشد؟

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 \to \left[\frac{99}{12}\right]=8$$

نکته: تعداد مضارب b که کوچک تر یا مساوی a باشد برابر است با: $\left[\frac{a}{b}\right]$

تست: چند عدد طبیعی مضرب ۱۱ در بازه ی ۱۱۰ تا ۲۰۰ وجود دارد؟

نکته: تعداد مضارب b در بازه ی بسته ی $[m,n]$ برابر است با: $\left[\frac{n}{b}\right]-\left[\frac{m-1}{b}\right]$

نکته:

۱) $a^k-b^k \mid a^n-b^n \to \frac{n}{k} \in \mathbb{Z}$

$a-b=0 \to a=b \to b^n-b^n=0$

۲) $a^k+b^k \mid a^n-b^n \to \frac{n}{k} \in$ زوج

$a+b=0 \to a=-b \to (-b)^n-b^n=0$

۳) $a^k+b^k \mid a^n+b^n \to \frac{n}{k} \in$ فرد

$a+b=0 \to a=-b \to (-b)^n+b^n=0$

۴) $a-b \nmid a^n+b^n$

$a-b=0 \to a=b \to b^n+b^n=2b^n \neq 0$

تست: عبارت n^6+1 بر کدام گزینه بخش پذیر است؟

۱) $n+1$ ۲) n^3+1 ۳) n^3-1 ۴) n^2+1

تست: به ازای چند مقدار طبیعی کم تر از ۱۰۰، عبارت $82 \mid 3^n+1$ برقرار است؟