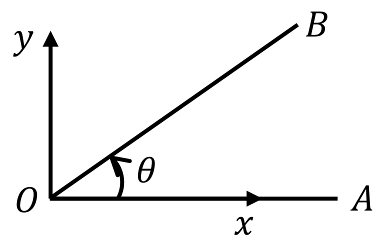
مثلثات

زاویه استاندارد

با توجه به شکل زیر، نیم خط OA را ضلع ابتدایی زاویه O فرض کنید. در صورتی که نیم خط OB از روی نیم خط OA دوران خود را خلاف جهت عقربه های ساعت (پادساعتگرد) شروع کرده و به موقعیت نشان داده شده در شکل برسد می گوییم به اندازه زاویه θ که مقدار آن مثبت (بنابر قرارداد) است دوران کرده است. اگر این دوران در جهت عقربه های ساعت (ساعتگرد) بود مقدار زاویه θ منفی (بنابر قرارداد) می شد. بنابراین یک زاویه به وسیله مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع نهایی تعیین می شود. اگر رأس زاویه یعنی نقطه O در مبدأ مختصات و ضلع ابتدایی آن یعنی OA روی محور x در دستگاه مختصات x و y قرار داشته باشد می گوییم زاویه در موقعیت استاندارد قرار دارد. یک دور کامل را می توان به ۳۶۰ قسمت تقسیم کرد که هر قسمت را یک درجه (°) می نامیم. در صورتی که ضلع دوم یعنی OB دقیقا یک دور کامل بچرخد، ۳۶۰ درجه دوران کرده است.



به همین ترتیب یک واحد دیگر به نام رادیان برای اندازه گیری زاویه تعریف می کنیم. یک دوران کامل که ۳۶۰ درجه بود را در این واحد جدید به اندازه 2π رادیان (rad) در نظر می گیریم. مقدار عدد پی (π) حدودا برابر ۳.۱۴ است. یعنی در این اندازه گیری جدید یک دوران کامل حدودا به اندازه ۶.۲۸ رادیان است. این واحد بر اساس اندازه محیط دایره به شعاع واحد، که برابر ۶.۲۸ است، قرارداد شده است. بنابراین واحدهای درجه و رادیان به صورت زیر به یکدیگر قابل تبدیل هستند:

$$2\pi\ (rad) \to 360° \Longrightarrow \frac{360°}{2\pi\ (rad)} = \frac{x°}{1\ (rad)} \Longrightarrow x° \equiv 1\ (rad)\frac{360°}{2\pi\ (rad)} \approx 57.3°$$

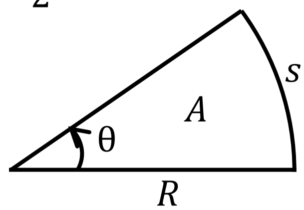
یعنی یک رادیان معادل حدودا ۵۷.۳ درجه است. به همین ترتیب یک درجه معادل حدودا ۰.۰۱۷۵ رادیان است. مقدار دقیق تر عدد پی، که یک ماشین حساب نمایش می دهد، به صورت زیر است (عدد پی یک عدد گنگ است):

$$\pi = 3.14159265359$$

با این تعریف از رادیان، طول کمان (s) و نیز مساحت (A) برای قطاعی از یک دایره با زاویه θ به صورت زیر قابل محاسبه است:

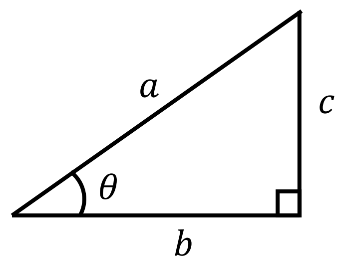
$$\text{محیط دایره} = 2\pi R \Longrightarrow \text{طول کمان} = s = \theta R$$

$$\text{مساحت دایره} = \frac{2\pi}{2}\mathrm{R}^2 \Longrightarrow \text{مساحت قطاع} = \mathrm{A} = \frac{\theta}{2}R^2$$



نسبت های مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی به صورت زیر برای زاویه θ در یک مثلث قائم الزاویه دلخواه مانند شکل تعریف (نامگذاری) می شوند:



$$\sin\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{c}{b} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{b}{c} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{a}{b}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{a}{c}$$

که sin، cos، tan، cot، sec و csc به ترتیب سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت خوانده می شوند. روشن است که به ازای هر زاویه θ مقادیر نسبت های مثلثاتی منحصر به فرد هستند. مطابق قاعده فیثاغورث داریم:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

دقت کنید که توان دو نسبت های مثلثاتی را مثلا برای کسینوس به صورت $\cos^2$، و به طریق مشابه برای بقیه، نشان می دهیم. توان های بالاتر نیز به همین صورت نشان داده می شوند.

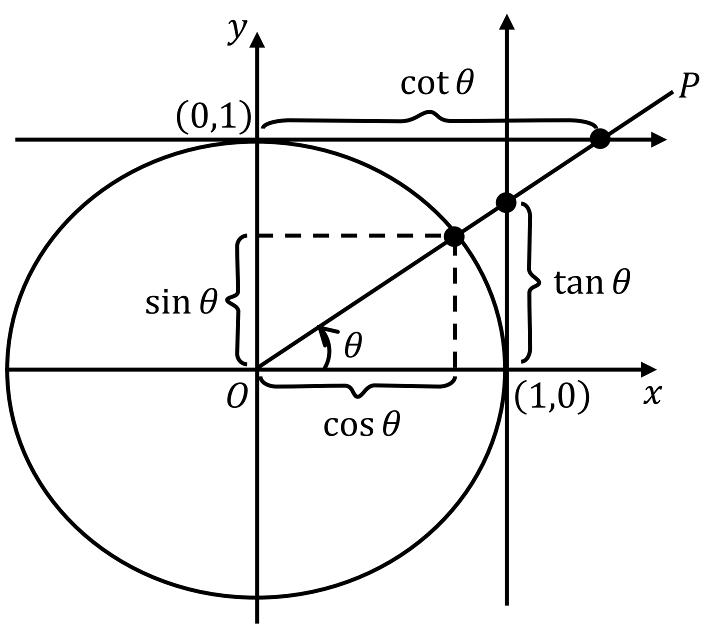
همچنین می توان روابط زیر را برای تانژانت و کوتانژانت بدست آورد.

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$$

دایره مثلثاتی

دایره زیر که به دایره مثلثاتی مشهور است، دایره ای است به شعاع واحد که مرکز آن در مبدأ مختصات واقع است. زاویه θ که نسبت به محور x محاسبه می شود، بنا بر استاندارد تعریف شده، در جهت پادساعتگرد مثبت است و در جهت ساعتگرد منفی. همچنین محورهای مختصات دایره را به چهار ربع دایره تقسیم می کنند. ربع بالا سمت راست ربع اول، ربع بالا سمت چپ ربع دوم، ربع پایین سمت چپ ربع سوم و ربع پایین سمت راست ربع چهارم نامیده می شود. با توجه به این که شعاع دایره به اندازه واحد است، مطابق شکل مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه θ را می توان روی این دایره نشان داد. محور OP که با محور x زاویه θ می سازد، در نقطه ای به مختصات $(\cos\theta\,,\sin\theta)$ دایره مثلثاتی را قطع می کند. این محور (OP) با خطی که از سمت راست بر دایره مماس است، در نقطه $(1,\tan\theta)$ تلاقی دارد. همچنین محور OP با خطی که از بالا بر دایره مماس است، در نقطه $(\cot\theta\,,1)$ تلاقی دارد. برای اثبات توجه کنید که مثلا $\sin\theta$ نسبت ضلع مقابل به وتر است و در این جا وتر شعاع دایره و برابر واحد است، در نتیجه $\sin\theta$ اندازه ضلع مقابل زاویه θ می شود. به همین ترتیب مختصات نسبت های مثلثاتی دیگر نیز تعیین می شود. دقت کنید که مقدار $\cos\theta$ را روی محور x، مقدار $\sin\theta$ را روی محور y، مقدار $\tan\theta$ را روی محور مماس بر سمت راست دایره و مقدار $\cot\theta$ را روی محور مماس بر بالای دایره تعیین می کنیم. مقدار مثبت برای نسبت های مثلثاتی نیز در جهت محورها است.



در یک مثلث قائم الزاویه، مانند آن چه در بالا کشیده شده، زاویه θ نمی تواند بیش تر از ۹۰ درجه باشد. با توجه به نیاز به تعریف نسبت های مثلثاتی برای زوایای بزرگتر از ۹۰ درجه و حتی زوایای منفی، اکنون نسبت های مثلثاتی را بر روی دایره مثلثاتی، به همان صورت که در شکل رسم کردیم، تعریف می کنیم. محور OP می تواند در ربع های دوم، سوم یا چهارم، که زاویه مربوط به آن بیش تر از ۹۰ می شود، باشد. این محور می تواند در جهت

منفی (ساعتگرد) دوران کرده و زوایای منفی را نتیجه دهد. همچنین این محور می تواند بیش تر از یک دور کامل زده و در نتیجه زاویه θ می تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند. محور OP، که از مبدأ می گذرد، در هر ربعی واقع شود نسبت های مثلثاتی مانند شکل از تلاقی این محور (یا امتداد آن) با دایره مثلثاتی و محورهای مماس سمت راست و بالای دایره، بدست می آیند.

اکنون به مقادیر نسبت های مثلثاتی برای چند زاویه خاص توجه کنید.

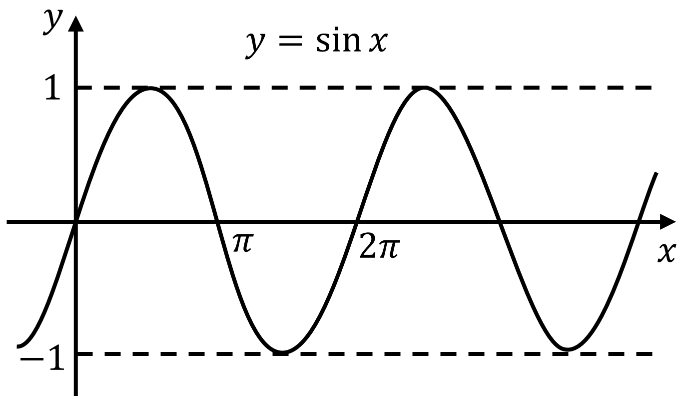
θ	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = 3\frac{\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

جدول زیر هم علامت نسبت های مثلثاتی را، زمانی که محور OP در نواحی (ربع) چهارگانه دایره مثلثاتی باشد، نشان می دهد.

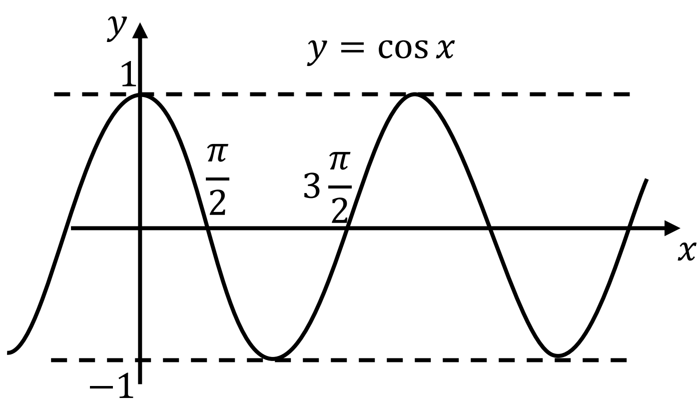
θ	ربع	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	اول	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	دوم	-	+	-	-
$\pi < \theta < 3\frac{\pi}{2}$	سوم	-	-	+	+
$3\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$	چهارم	+	-	-	-

نمودار نسبت های مثلثاتی

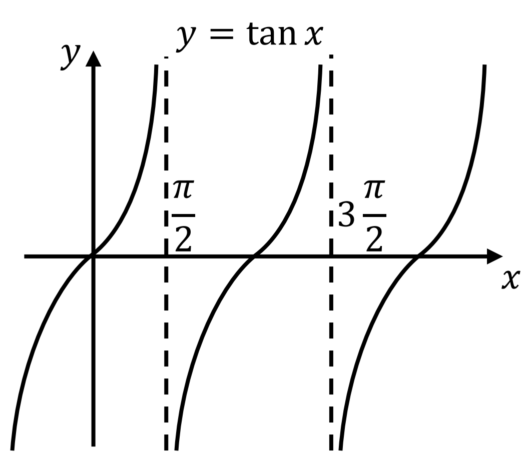
نمودار زیر نمودار سینوس است. در این نمودار محور x مقدار زاویه به رادیان را بیان می کند و محور y مقدار $\sin x$ را می دهد.



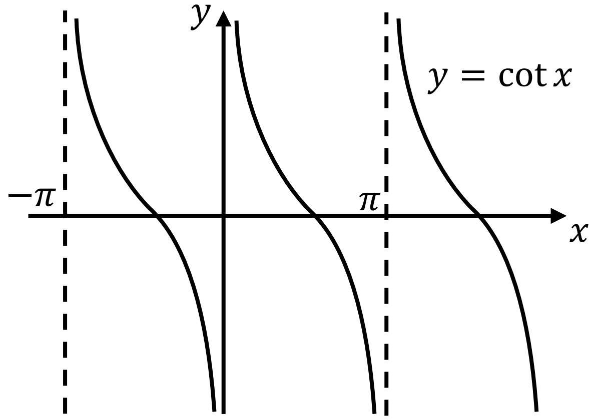
نمودار زیر نمودار کسینوس است. در این نمودار محور x مقدار زاویه به رادیان را بیان می کند و محور y مقدار $\cos x$ را می دهد.



نمودار زیر نمودار تانژانت است. در این نمودار محور x مقدار زاویه به رادیان را بیان می کند و محور y مقدار $\tan x$ را می دهد.



نمودار زیر نمودار کتانژانت است. در این نمودار محور x مقدار زاویه به رادیان را بیان می کند و محور y مقدار $\cot x$ را می دهد.



جدول زیر روابط مهم مثلثاتی در تبدیل زاویه را نشان می دهد (k یک عدد صحیح دلخواه است).

θ	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\frac{\pi}{2}-\alpha$	$3\frac{\pi}{2}+\alpha$	$2k\pi+\alpha$
$\sin\theta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\theta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\theta$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\cot\theta$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$

فرمول های مهم در مثلثات

دو فرمول زیر بسیار مهم هستند و تمام فرمول هایی که در ادامه می آید از این دو فرمول بدست می آید. بنابراین این دو فرمول را بخاطر بسپارید.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

اثبات: با توجه به شکل طول پاره خط ها به صورت زیر است:

$$PQ = OP\sin\beta\,,\qquad OQ = OP\cos\beta\,,\qquad AQ = OQ\sin\alpha\,,\qquad PR = PQ\cos\alpha$$
$$\Longrightarrow RB = AQ = OP\cos\beta\sin\alpha\,,\qquad PR = OP\sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{PR+RB}{OP} = \frac{OP\sin\beta\cos\alpha + OP\cos\beta\sin\alpha}{OP}$$
$$\Longrightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

برای اثبات رابطه مربوط به $\sin(\alpha-\beta)$ کافیست در عبارت قبل به جای β، $-\beta$ قرار دهیم:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\big(\alpha+(-\beta)\big) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\Longrightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\Longrightarrow \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

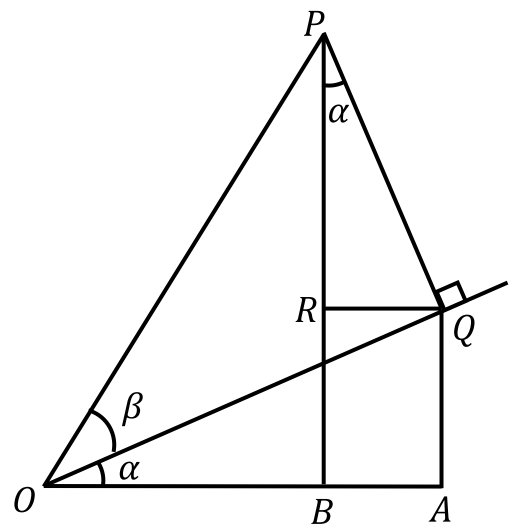
اکنون رابطه مربوط به کسینوس را اثبات می کنیم:

$$OA = OQ\cos\alpha = OP\cos\beta\cos\alpha\,,\qquad BA = RQ = PQ\sin\alpha = OP\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OB}{OP}=\frac{OA-BA}{OP}=\frac{OP\cos\beta\cos\alpha-OP\sin\beta\sin\alpha}{OP}$$
$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

برای اثبات رابطه مربوط به $\cos(\alpha-\beta)$ کافیست در عبارت قبل به جای β، $-\beta$ قرار دهیم:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\big(\alpha+(-\beta)\big)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$\Longrightarrow \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\Longrightarrow \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$



با تقسیم دو رابطه قبل و کمی عملیات جبری رابطه مربوط به تانژانت حاصل می شود:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

اگر به جای β نیز α قرار دهیم روابط زیر بدست می آید:

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

از رابطه مربوط به $\cos(2\alpha)$ و رابطه فیثاغورث می توان به فرمول های زیر نیز رسید:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$
$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$$

فرمول های تبدیل ضرب به جمع نیز از دو فرمول اصلی بدست می آیند:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$$

فرمول های تبدیل جمع به ضرب نیز از روابط فوق قابل استخراج هستند:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

فرمول های کتانژانت نیز از فرمول های مربوط به تانژانت با معکوس کردن بدست می آیند.