درس۲ : اتحاد و تجزیه

مهارت ۱: عبارت‌های جبری

عبارت جبری: عبارتی است که در آن اعداد و متغیرها با اعمال **جبری** (چهار عمل اصلی، توان، رادیکال و ...) به هم مرتبط شده‌اند. به عنوان مثال عبارت $\sqrt{xy}-۳xy^۲+x$ یک عبارت جبری است که ترکیبی از متغیرهای x و y و اعداد است.

چندجمله‌ای: یک عبارت جبری که در آن توان متغیرها **حسابی** باشد را یک چندجمله‌ای می‌گوییم. مثلا عبارت $x+۳xy^۲-۶$ چندجمله‌ای است. اما $\sqrt{xy}-۳xy^۲+x$ چندجمله‌ای نیست (چرا؟). (چون توان xy در عبارت $-\sqrt{xy}$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است و حسابی نیست.)

جمله: به هر کدام از عبارت‌های -۶، $۳xy^۲$ و x یک **جمله** می‌گوییم.

دقت: در اکثر مواقع با چندجمله‌ای هایی روبه‌رو هستیم که فقط شامل یک متغیر (معمولا x) هستند.

تک‌جمله‌ای $\leftarrow ۲$ تک‌جمله‌ای $\leftarrow x$ دوجمله‌ای $\leftarrow x-۱$ سه‌جمله‌ای $\leftarrow x^۲+۳x+۲$ سه‌جمله‌ای $\leftarrow ۲t^۴+t-۲۵$

اگر در چندجمله‌ای‌ها فقط یک متغیر داشته باشیم، آن را از بزرگ‌ترین توان به کوچکترین توان مرتب می‌کنیم. به این کار اصطلاحا **«استانداردسازی»** می‌گوییم.

مثال: عبارت زیر چند جمله دارد؟ درجه آن را مشخص کنید و همچنین آن را به صورت استاندارد بنویسید.

$$۲+۲x^۲-۱۶+۴x^۶-\sqrt{۳}x^۲$$

پاسخ: برای ساده سازی عبارت فوق، ابتدا زیر جملاتی که درجه متغیر آنها با یکدیگر برابر است (جملات متشابه)، خط کشیده؛ سپس آنها را با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم. این را هم بدانید که **بزرگترین توان متغیر**، همان درجه‌ی آن عبارت است.

$$\underline{۲}+\underline{\underline{۲x^۲}}\underline{-۱۶}+۴x^۶\underline{\underline{-\sqrt{۳}x^۲}}=۴x^۶+(۲-\sqrt{۳})x^۲-۱۴\rightarrow$$ سه‌جمله‌ای درجه شش

سوال: داوطلبی ادعا می‌کند عبارت فوق به دلیل وجود $\sqrt{۳}$ چندجمله‌ای نیست. آیا ایشان درست می‌گوید؟

پاسخ: وجود $-\sqrt{۳}$ گولتان نزند. گفتیم توان متغیرها باید حسابی باشد و نه توان اعداد. چون می‌توان مقدار تقریبی رادیکال را جایگزین کرد: $\sqrt{۳}=۱/۷$ پس داریم:

$$۴x^۶+(۲-\sqrt{۳})x^۲-۱۴=۴x^۶+۰/۳x^۲-۱۴\rightarrow$$ سه‌جمله‌ای است.

ضرب چندجمله‌ای‌ها:

عبارت $(۲x+y)\times(-x+۳y)$ را در نظر بگیرید. برای ضرب این دو پرانتز به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

به ترتیب شماره‌گذاری مشخص شده، ضرب‌ها را انجام می‌دهیم. دقت کنید که حاصل ضرب‌های ۲ و ۳ جملات متشابه تولید می‌کند (ضرب خاصیت جابجایی دارد، مثلا $۲\times۳=۳\times۲$ پس $x\times y=y\times x\rightarrow xy=yx$) پس زیر آنها خط کشیده؛ در نهایت با

۱ ۲

$$(۲x+y)\times(-x+۳y)=-۲x^۲\underline{+۶xy}\underline{-yx}+۳y^۲=-۲x^۲+۵xy+۳y^۲$$

۳ ۴

دقت: برای اختصار در نوشتن، علامت $\times$ بین دو پرانتز را نمی‌نویسیم؛ برای مثال عبارت $(x+۱)\times(x-۲)$ را به صورت $(x+۱)(x-۲)$ می‌نویسیم. بنابراین هرگاه دو پرانتز را کنار هم، بدون هیچ علامتی دیدید؛ منظور اینست که آنها دارند در یکدیگر ضرب می‌شوند.

مثال: موارد خواسته شده را انجام دهید.

$a)\ (x+۱)(x-۱)$ $b)\ (x-۳)^۲$ $c)\ (x-۳)+(۵x+۳)$

پاسخ:

$$a)\ (x+۱)(x-۱)=x^۲-x+x-۱=x^۲-۱$$

$$b)\ (x-۳)^۲=(x-۳)(x-۳)=x^۲-۳x-۳x+۹=x^۲-۶x+۹$$

$$c)\ (x-۳)+(۵x+۳)=x+۵x\cancel{-۳}\cancel{+۳}=۶x$$

دقت: در عبارت c بین دو پرانتز علامت «به علاوه» وجود دارد. پس دو عبارت را یکدیگر جمع نمودیم.

مهارت ۲: اتحادها

اتحاد: هرگاه دو عبارت جبری، به ازای هر عدد دلخواه، با هم مساوی شوند، به این تساوی، اتحاد می‌گوییم. برای مثال $(x-۳)^۲ = x^۲ - ۶x + ۹$ یک اتحاد است؛ زیرا به ازای هر عدد دلخواه که به x می‌دهیم؛ طرف چپ تساوی با طرف راست برابر است. (باورتان نمی‌شود؟!😅امتحان کنید.)

در این قسمت با مهمترین اتحادها آشنا می‌شویم.

اتحاد مربع دوجمله‌ای: بحث را با یک مثال آغاز می‌کنیم.

مثال: طرف دوم عبارت‌های زیر را بنویسید.

۱) $(a+b)^۲$ ۲) $(a-b)^۲$

پاسخ: مشابه رویکردی که در مثال قبل داشتیم؛ عمل می‌کنیم:

۱) $(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) = a^۲ + ab + ba + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

۲) $(a-b)^۲ = (a-b)(a-b) = a^۲ - ab - ba + b^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

توصیه مولف: برای راحت‌تر حفظ کردن اتحاد مربع از **بیان کلامی** مقابل استفاده کنید. گرچه بنده در جایگاه معلم موافق با حفظ هیچ فرمولی نیستم. (فرمول‌ها با تکرار زیاد خود به خود ملکه ذهن می‌شوند.)

اولی به توان ۲ دومی به توان

$\boxed{(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲}$

اولی دومی دو برابر اولی در دومی

مثال: حاصل عبارت $(۳x+۲y)^۲$ را بنویسید.

پاسخ: با استفاده از **بیان کلامی** اتحاد مربع داریم:

$۳x =$ اولی $۲y =$ دومی $۲ \times ۳x \times ۲y = ۱۲xy =$ دوبرابر اولی در دومی

$(۳x+۲y)^۲ = ۹x^۲ + ۱۲xy + ۴y^۲$

توصیه مولف: بعد از آنکه حالت مثبت را یاد گرفتیم، برای حالت منفی کافیست به جای $+b$ قرار دهیم: $-b$

یعنی در فرمول $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ هر جا b دیدیم، به جاش، $-b$ قرار می‌دهیم:

$(a+(-b))^۲ = a^۲ + ۲a(-b) + (-b)^۲ \rightarrow (a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

اتحاد مزدوج: یکی از پرکاربردترین اتحادها، اتحاد مزدوج است. به ضرب دو پرانتز زیر نگاه کنید:

$(a+b)(a-b) = a^۲ - ab + ab - b^۲ = a^۲ - b^۲$

بسیار پیش می‌آید که برعکس رابطه فوق مدنظر باشد، یعنی هرگاه $a^۲ - b^۲$ را دیدیم به یاد $(a-b)(a+b)$ بیفتیم.

$\boxed{a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)}$

به طرف راست اتحاد فوق به اصلاح **تجزیه** شده‌ی اتحاد مزدوج می‌گوییم. به هر پرانتز طرف راست، یک **عامل ضرب** می‌گوییم.

نحوه بیان کلامی اتحاد مزدوج بدین صورت است:

(جذر دومی + جذر اولی)(جذر دومی − جذر اولی) = دومی − اولی

به رادیکال فرجه دو، **جذر** نیز می‌گوییم.

دقت: این تکنیک بسیار ساده، عمل تجزیه را خیلی راحت می‌کند. منظوم اینه که لازم نیست توان متغیرها حتما ۲ باشد، بلکه هر توان **زوجی** می‌تواند باشد. برای مثال عبارت $a^۶ - b^۶$ به صورت زیر تجزیه می‌شود:

اولی $= a^۶ \rightarrow$ جذر اولی $= \sqrt{a^۶} = a^۳$ دومی $= b^۶ \rightarrow$ جذر دومی $= \sqrt{b^۶} = b^۳$ $\Rightarrow a^۶ - b^۶ = (a^۳ - b^۳)(a^۳ + b^۳)$

سوال: تجزیه اتحاد مزدوج را یاد گرفتیم؛ حال اتحاد مربع چگونه تجزیه می‌شود؟ فرض کنید عبارت $x^۲ + ۶x + ۹$ را در سوالی دیده‌ایم. از کجا می‌توان فهمید که این عبارت همان $(x+۳)^۲$ است؟

پاسخ: در فصل‌های آینده خواهیم خواند که اگر Δ ی عبارت درجه ۲، **صفر** شود، آن عبارت **مربع کامل** است. فرم کلی عبارت درجه۲ به صورت $ax^۲ + bx + c$ است. بنابراین Δ را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۶)^۲ - ۴(۱)(۹) = ۳۶ - ۳۶ = ۰$

حال که $\Delta = ۰$ شد؛ کافیست از تکنیک زیر استفاده کنیم:

^{۲}(جذر جمله سوم ± جذر جمله اول) = جمله سوم + جمله دوم ± جمله اول

دقت: منظور از نوشتن $\pm$ در تکنیک فوق اینست که علامتِ بینِ جذرِ جمله اول و جذر جمله سوم، همان علامتِ جمله دوم است.

$\Rightarrow x^{2}+6x+9=(x+3)^{2}$ علامت مثبت است. $\rightarrow$ جمله دوم $=6x$ ‏ ‏ جذر سومی $=3$ $\rightarrow$ سومی $=9$ ‏ ‏ جذر اولی $=x$ $\rightarrow$ اولی $=x^{2}$

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $9x^{2}-12x+4$ ‏ ‏ ۲) $4x^{2}-1$

پاسخ: علامت منفی است. $\rightarrow$ جمله دوم $=-12x$ $\rightarrow$ جذر سومی $=2$ $\rightarrow$ جذر اولی $=3x$

مربع کامل است.

۱) $\Delta=144-4(9)(4)=0\rightarrow$

$\rightarrow 9x^{2}-12x+4=(3x-2)^{2}$

جذر اولی $=2x$

۲) $4x^{2}-1=(2x)^{2}-1^{2}\rightarrow$ دومی $=1^{2}\rightarrow$ جذر دومی $=1\rightarrow(4x^{2}-1)=(2x-1)(2x+1)$

نکته: **فرم مربع** عبارت درجه۲ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$ax^{2}+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^{2}-\frac{\Delta}{4a}$$

که اگر $\Delta=0$ باشد به صورت $a(x+\frac{b}{2a})^{2}$ خلاصه می‌شود و به آن «**مربع کامل**» می‌گوییم.

حال عبارت مثال قبل را به کمک فرمول مربع کامل تجزیه می‌کنیم:

$$9x^{2}-12x+4=9(x+\frac{-12}{2\times 9})^{2}-\frac{0}{4\times 9}=9(x-\frac{2}{3})^{2}=3^{2}\times(x-\frac{2}{3})^{2}=(3\times(x-\frac{2}{3}))^{2}=(3x-2)^{2}$$

دقت: در روند فوق از قانون۴ توان‌ها استفاده کردیم.

توصیه مولف: داوطلبین عزیز توجه نمایید **فرم مربع** یک روش اصولی است و همیشه سعی کنید روش اصولی را در کنار تکنیک‌ها استفاده کنید.

اتحاد جمله مشترک: ضرب دو پرانتز داده شده را انجام می‌دهیم:

$$(x+a)(x+b)=x^{2}+\underline{ax}+\underline{bx}+ab=x^{2}+(a+b)x+ab$$

همانطور که ملاحظه کردید؛ در عبارت بالا جملاتی که زیر آنها خط کشیده‌ایم؛ متشابه بوده و دارای x مشترک هستند. از x این دو جمله‌ی متشابه **فاکتور** گرفته و در نهایت عبارت سمت راست حاصل شده است. در روند فوق کار خاصی انجام ندادیم؛ فقط طبق قانونِ ضربِ عبارت‌های جبری عمل کردیم. (۴ تا ضرب ساده انجام دادیم.) به اتحاد فوق، اتحاد «**جمله مشترک**» می‌گوییم.

مروری بر نحوه فاکتورگیری: بسیار پیش می‌آید که برای تجزیه یک عبارت جبری عمل فاکتورگیری را انجام دهیم. به عبارت $ab+ac$ نگاه کنید. بسیار واضح است که این دو جمله در a مشترک هستند. پس از a فاکتور می‌گیریم. برای فاکتورگیری ابتدا a را نوشته و پرانتز باز می‌کنیم: $a(...+...)$ حال اولین جمله یعنی ab را بر a تقسیم می‌کنیم که حاصل می‌شود b سپس جمله دوم یعنی ac را بر a تقسیم می‌کنیم که حاصل می‌شود c. حال داریم: $ab+ac=a(b+c)$.

دقت: برای اطمینان از عمل فاکتورگیری کافیست عامل‌های عبارت تجزیه شده را در هم ضرب نمایید. اگر به عبارت اولیه رسیدیم؛ عمل فاکتورگیری را درست انجام داده‌ایم. برای مثال:

$a(b+c)=ab+ac\rightarrow$ به عبارت اولیه رسیدیم $\rightarrow$ عمل فاکتورگیری را درست انجام دادیم.

اتحاد مکعب دو جمله‌ای: با محاسبه $(a+b)^{3}$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به «اتحاد مکعب» مشهور است:

$$(a+b)^{3}=(a+b)^{2}(a+b)=(a^{2}+2ab+b^{2})(a+b)=a^{3}+\underline{a^{2}b}+\underline{2a^{2}b}+\underline{\underline{2ab^{2}}}+\underline{\underline{ab^{2}}}+b^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}}$$

با تکنیکی که از قبل یاد گرفتیم؛ می‌خواهیم $(a-b)^{3}$ را تشکیل دهیم. کافیه به جای $+b$ قرار دهیم $-b$:

$$(a+(-b))^{3}=a^{3}+3a^{2}(-b)+3a(-b)^{2}+(-b)^{3}\Rightarrow(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

۱) $(x-1)^{3}$ ‏ ‏ ۲) 14^{3}

پاسخ: ۱) به کمک اتحاد $(a+(-b))^{3}=a^{3}+3a^{2}(-b)+3a(-b)^{2}+(-b)^{3}$ داریم:

$$(x-1)^{3}=x^{3}+3x^{2}\times(-1)+3x\times(-1)^{2}+(-1)^{3}=x^{3}-3x^{2}+3x-1$$

۲) $14^{3}=(10+4)^{3}=10^{3}+3\times 10^{2}\times 4+3\times 10\times 4^{2}+4^{3}=1000+1200+480+64=2744$

مهارت ۳: کاربرد اتحادها

ساخت اتحاد فرعی:

با توجه به اتحاد $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ مقدار $a^۲ + b^۲$ برابر است با: $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$

حال اتحاد $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ را درنظر بگیرید. در این اتحاد حاصل $a^۲ + b^۲$ برابر است با: $a^۲ + b^۲ = (a-b)^۲ + ۲ab$

به این گونه اتحادها که برگرفته از اتحاد اصلی هستند؛ اتحاد فرعی می‌گوییم.

تست ۴: **مربع مجموع دو عدد مثبت، از مجموع مربعات آن دو عدد ۱۰۸ واحد بیشتر است. اگر اختلاف دو عدد ۳ باشد، مجموع ارقام حاصلضرب این دو عدد کدام است؟** (فراگیر سوم-۹۵)

۱) ۹ **۲)** ۷ **۳)** ۱۵ **۴)** ۱۲

تست ۵: **اگر $x + y = ۵$ و $xy = ۳$، حاصل $x^۲ + y^۲$ کدام است؟** (تالیفی)

۱) ۱۷ **۲)** ۸ **۳)** ۱۹ **۴)** ۲۱

دومینو در اتحاد مزدوج:

گاهی در ضرب چند عبارت جبری شرایطی اتفاق می‌افته که دوتای آن‌ها اتحاد مزدوج هستند و جواب این دوتا با عبارت جبری دیگر، دوباره اتحاد مزدوج ایجاد می‌کند و دوباره این مراحل تکرار می‌شود:

در عبارت مقابل دو پرانتز اول یعنی $(a-b)(a+b)$ مزدوج بوده و عبارت $a^۲ - b^۲$ را می‌سازند. حال این عبارت با بعدی (یعنی $(a^۲ + b^۲)$) ضرب شده و عبارت $(a^۴ - b^۴)$ را تشکیل می‌دهند. دوباره این عبارت با عبارت بعدی (یعنی $(a^۴ + b^۴)$) مزدوج بوده و با ضرب شدن در آن $(a^۸ - b^۸)$ را تشکیل می‌دهند و...

$$(a-b)(a+b)(a^۲ + b^۲)(a^۴ + b^۴)(a^۸ + b^۸)...$$

تست ۶: **حاصل $(\sqrt{x} - ۳)(\sqrt{x} + ۳)(x + ۹)(x^۲ + ۸۱)$ به ازای $x = \sqrt[۴]{۸۱}$ کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۶۴۸۰ **۳)** -۶۴۸۰ **۴)** -۶۱۸۱

اتحاد مربع در رادیکال‌ها:

به عبارت مقابل توجه کنید: $(\sqrt{۲} + ۳)^۲ = ۱۱ + ۶\sqrt{۲}$

همانند قسمت‌های قبل، در اینجا نیز می‌خواهیم برعکس عمل کنیم، یعنی اگر از ما بپرسند $۱۱ + ۶\sqrt{۲}$ برابر چه عبارتی به توان ۲ هست، چیکار باید کنیم؟ ابتدا قسمت رادیکالی عبارت موردنظر را در نظر گرفته و آن را نصف می‌کنیم:

$$۶\sqrt{۲} \div ۲ = ۳\sqrt{۲} \rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = \sqrt{۲} \end{cases} \quad \underrightarrow{check} \ (۳ + \sqrt{۲})^۲ = ۹ + ۲ + ۲ \times ۳ \times \sqrt{۲} = ۱۱ + ۶\sqrt{۲} \ ok$$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده نمایید.

$۱)\ \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱}$ $\qquad ۲)\ \sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}}$ $\qquad ۳)\ \sqrt{\sqrt{۵} - ۱} \times \sqrt{۱ + \sqrt{۵}}$

پاسخ: علامت مثبت است. $\rightarrow$ جمله دوم $= +۴x$ $\rightarrow$ جذر سومی $= ۱$ $\rightarrow$ جذر اولی $= ۲x$ $\rightarrow$ مربع کامل است.

$$۱)\ \Delta = ۱۶ - ۴(۴)(۱) = ۰ \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} = \sqrt{(۲x + ۱)^۲} = |۲x + ۱|$$

$$۲):\ ۴\sqrt{۵} \div ۲ = ۲\sqrt{۵} \rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = \sqrt{۵} \end{cases} \quad \underrightarrow{check} \ (۲ - \sqrt{۵})^۲ = ۴ + ۵ - ۲ \times ۲ \times \sqrt{۵} = ۹ - ۴\sqrt{۵} \ ok \rightarrow \sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}} = \sqrt{(۲ - \sqrt{۵})^۲} = |۲ - \sqrt{۵}| = \sqrt{۵} - ۲$$

$$۳)\ \sqrt{۱ + \sqrt{۵}} = \sqrt{\sqrt{۵} + ۱} \rightarrow \sqrt{\sqrt{۵} - ۱} \times \sqrt{۱ + \sqrt{۵}} = \sqrt{\sqrt{۵} - ۱} \times \sqrt{\sqrt{۵} + ۱} = \sqrt{(\sqrt{۵})^۲ - ۱} = \sqrt{۵ - ۱} = \sqrt{۴} = ۲$$

دقت: در روند فوق از خاصیت «جابجایی جمع» استفاده کردیم.

تست ۷: **حاصل $\sqrt[۴]{۱۴ - ۴\sqrt{۶}} \times \sqrt{\sqrt{۲} + \sqrt{۱۲}}$ کدام است؟** (وزارت نیرو - ۹۷)

۱) $\sqrt{۱۰}$ **۲)** $\sqrt{۵}$ **۳)** $\sqrt{۳}$ **۴)** $\sqrt{۲}$

گویا کردن مخرج کسرها (قسمت دوم):

در این قسمت با کسرهایی مواجه هستیم که **مخرج** آنها به فرم $a \pm \sqrt{b}$ و یا $\sqrt[۲n]{a} \pm \sqrt[۲n]{b}$ هستند. با توجه مطالبی که تاکنون یاد گرفتیم، خیلی واضحه که باید مخرج این کسرها را در مزدوجشان ضرب کنیم تا گویا شوند.

مثال: کسرهای زیر را گویا کنید.

$$۱)\ \frac{۱}{۱-\sqrt{۲}} \qquad ۲)\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

پاسخ:

$$۱)\ \frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱^۲-(\sqrt{۲})^۲}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{-۱}=-(۱+\sqrt{۲})$$

$$۲)\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲}{x-y}=\frac{x+y-۲\sqrt{xy}}{x-y}$$

تست ۸: حاصل $(\sqrt{۲}+۱)^۲(\sqrt{۲}-۱)^{-۲}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

۱) $۱۷+۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $(۱۷-۱۲\sqrt{۲})^{-۱}$ ۳) $۱۷+۶\sqrt{۲}$ ۴) $(۱۷-۶\sqrt{۲})^{-۱}$

تست ۹: ساده شده عبارت $\frac{۱}{(\sqrt[۴]{۶}-\sqrt[۴]{۵})(\sqrt{۵}+\sqrt{۶})}$ کدام است؟ (فراگیر هشتم - ۹۹)

۱) $\sqrt{۶}+\sqrt{۵}$ ۲) $-\sqrt[۴]{۶}-\sqrt[۴]{۵}$ ۳) $\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt[۴]{۶}+\sqrt[۴]{۵}$

مهارت ۴: تجزیه عبارت‌های درجه۲

اگر سه جمله‌ای « $x^۲-۵x+۶$ » را به صورت $(x-۲)(x-۳)$ بنویسیم؛ در واقع آن را به عامل‌های ضرب **تجزیه** کرده‌ایم. در مهارت‌های قبل تا حدودی با تجزیه آشنا شدیم و دیدیم که چگونه با استفاده از اتحادهای مربع و مزدوج، می‌توان بعضی از عبارت‌های جبری را تجزیه کرد. برای تجزیه یک چندجمله‌ای درجه n روش کلی وجود ندارد اما در بعضی حالت‌های خاص می‌توان با روش‌هایی عمل تجزیه را انجام داد. اگر **درجه** چندجمله‌ای $n=۲$ و شامل **یک نوع** متغیر باشد؛ به راحتی می‌توان آن را تجزیه نمود. برای مثال با عباراتی مثل $x^۲+۳x+۶$ سر و کار داریم که در آن متغیرها از یک نوع « x » هستند و از دو نوع یا بیشتر مثل $x^۲+xy-۲y^۲$ **نیستند**. برای اختصار در نوشتن این‌گونه عبارت‌ها را نامگذاری کرده و به صورت $f(x)$ نمایش می‌دهیم. $f(x)$ یعنی یک عبارت جبری که فقط بر حسب متغیر x بیان می‌شود:

$$f(x)=x^۲+۳x+۶$$

البته توجه نمایید که تنها اسم $f(x)$ استفاده نمی‌شود؛ بلکه هر عبارت جبری بر حسب x می‌تواند به اسم‌های مختلفی بیان شود مثل $g(x)$ یا $h(x)$ یا $p(x)$ و....

قبل از اینکه وارد بحث شویم ابتدا دو پرانتز زیر را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(x-۲)(x-۳)=?\to(x-۲)(x-۳)=x^۲-۳x-۲x+(-۲)(-۳)=x^۲-۵x+۶$$

حال فرض کنید می‌خواهیم سه جمله‌ای « $x^۲-۵x+۶$ » را تجزیه کنیم. در واقع می‌خواهیم برعکس روند فوق عمل کنیم تا به دو پرانتز $(x-۲)(x-۳)$ برسیم. به دو روش می‌توان اینکار را انجام داد:

روش اول: ابتدا دو پرانتز باز کرده و در هر دو x می‌گذاریم: $(x\quad)(x\quad)$، حال به ضریب x (یعنی -۵) و ضریب ثابت (یعنی $+۶$) توجه کنید. چه ارتباطی بین این ضرایب و اعداد (-۲) و (-۳) وجود دارد. احتمالا متوجه شده‌اید که جمع این دوعدد برابر با -۵ و ضرب آنها برابر با $+۶$ است. پس می‌توان این **پرسش** را مطرح کرد: «کدام دو عدد هستند که جمعشان -۵ و ضربشان $+۶$ است؟» **پاسخ**: اعداد (-۲) و (-۳). در نهایت در پرانتزهایی که باز کرده بودیم اعداد (-۲) و (-۳) را کنار x می‌نویسیم: $(x-۲)(x-۳)$. خب وقتشه که با چند مثال دیگه مهارتمون رو در تجزیه بالا ببریم.

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$۱)\ x^۲+۳x-۱۰ \qquad ۲)\ x^۲+۲x+۱ \qquad ۳)\ x^۲-۲۵ \qquad ۴)\ x^۲+x$$

پاسخ: ۱) ابتدا دو پرانتز باز کرده و در هر دو x می‌گذاریم: $(x\quad)(x\quad)$، حال با استفاده از تکنیکی که یاد گرفتیم؛ می‌گوییم که کدام دو عدد هستند که جمعشان $+۳$ و ضربشان -۱۰ است؟ برای اینکه راحت‌تر بتوانید اعداد را پیدا کنید؛ ابتدا از **ضرب** کمک بگیرید. اعدادی که ضربشان ۱۰ است ۲ و ۵ یا ۱۰ و ۱ هستند. خب ۱۰ و ۱ که جمعشان (چه در حالت مثبت و چه در حالت منفی) برابر با $+۳$ نمی‌شود؛ پس ۲ و ۵ را امتحان می‌کنیم. خب از آنجاکه علامت ضرب دو عدد باید منفی باشد؛ پس یکی از این دو (۲ یا ۵) باید منفی باشد. فرض کنیم ۵ منفی است. یعنی اعداد به صورت $+۲$ و -۵ باشند. در این حالت جمع این دو عدد برابر با -۳ می‌شود که درست نیست؛ زیرا باید $+۳$ شود. حالت بعدی این است که ۲ منفی باشد و ۵ مثبت در این حالت حاصل جمع برابر $-۲+۵$ یا همان $+۳$ است که صحیح است. در نتیجه عبارت به صورت $(x-۲)(x+۵)$ تجزیه می‌شود.

۲) دو پرانتز را باز کرده و در هر دو x می‌گذاریم: $(x\quad)(x\quad)$، کدام دو عدد هستند که جمعشان $+۲$ و ضربشان $+۱$ است؟ گفتیم از ضرب کمک بگیریم. خب ضرب کدام دو عدد برابر یک می‌شود؟ به نظر میرسه هر دو عدد «یک» هستند. از آنجاکه جمع آنها $+۲$ است؛ پس هردو مثبت «یک» هستند:

$$(x+۱)(x+۱)=(x+۱)^۲$$

دقت: عبارت x^2+2x+1 به صورت $(x+1)^2$ تجزیه شد. یعنی Δ ی آن برابر صفر است. می‌توانستیم از تکنیک **مربع کامل** استفاده کنیم:

$\Delta = 2^2 - 4\times(1)(1) = 0 \rightarrow$ جذر جمله اول $= x$ ، جذر جمله سوم $= 1$ ، علامت مثبت است $\rightarrow$ جمله دوم $= +2x$ $\rightarrow ans = (x+1)^2$

۳) اول دو پرانتز را باز می‌کنیم: $(x\quad)(x\quad)$، کدام دو عدد هستند که ضربشان ۲۵- و جمعشان **صفر** است (دقت کنید جمله‌ی شامل ضریب x را نداریم، در واقع عبارت به صورت $x^2+0x-25$ بوده است.)، از آنجاکه جمع دو عدد صفر است؛ پس قطعا دو عدد قرینه هم هستند. خب مشخصه که اگر ضرب دو عدد قرینه برابر با ۲۵- باشد؛ آن دو عدد ۵+ و ۵- هستند: $(x+5)(x-5)$

دقت: عبارت x^2-25 درواقع به صورت a^2-b^2 است که در آن $a=x$ و $b=5$ می‌باشند (اتحاد مزدوج). می‌دانیم فرم اتحاد مزدوج به صورت $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ است؛ پس عبارت x^2-25 به صورت $(x+5)(x-5)$ تجزیه میشود.

۴) دو پرانتز را باز می‌کنیم: $(x\quad)(x\quad)$، کدام دو عدد هستند که ضربشان **صفر** و جمعشان **یک** است؟ ازآنجاکه ضرب صفر است، پس حداقل یکی از اعداد قطعا صفر است. خب صفر با چه عددی جمع شود تا حاصل بشه «یک»؟ مشخصه دیگه، با «یک» جمع شود. در نتیجه داریم: $(x)(x+1)$.

این را هم بدانید که برای زیبایی در نوشتن، خود x را بدون پرانتز می‌نویسیم: $x(x+1)$

دقت: با استفاده از فاکتورگیری نیز می‌توانستیم به راحتی عبارت x^2+x را تجزیه کنیم. جملات در x مشترک هستند؛ پس از x فاکتور می‌گیریم: $x(x+1)$.

داوطلبین گرامی توجه داشته باشید که استفاده از **روش اول** چندان کارامد **نیست**، زیرا دارای سه محدودیت است.

اولین محدودیت آن است که در این روش ضریب x^2 باید **«یک»** باشد. اگر در سوالی ضریب x^2 **«یک»** نباشد؛ به مشکل می‌خوریم. فرض کنید در سوالی با عبارت $2x^2-3x-2$ مواجه شدیم و تجزیه آن را از ما می‌خواهند. خب از همان ابتدا نمی‌توانیم بنویسیم $(x\quad)(x\quad)$، چون ضرب این دو تا x برابر با x^2 شده و $2x^2$ نمی‌شود. در واقع پرانتزها به صورت $(x\quad)(2x\quad)$ نوشته می‌شوند. حال دیگر **نمی‌توان** از تکنیک «کدام دو عدد هستند که جمعشان ۳- و ضربشان ۲- است؟» استفاده کرد. در این مواقع از **روش دوم** استفاده می‌کنیم.

روش دوم: با استفاده از روش Δ می‌توان **ریشه‌های** عبارت درجه دوم را به‌دست آورد. ریشه‌ها در واقع x هایی هستند که عبارت درجه دوم را **صفر** می‌کنند. برای مثال اولین عبارت مثال قبل ($x^2+3x-10$) را در نظر بگیرید. اگر این عبارت را مساوی صفر قرار دهیم ($x^2+3x-10=0$) به کمک روش Δ ریشه‌های آن را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = 9-4(1)(-10)=49 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-3+7}{2}=2 \rightarrow x-2=0 \\ x=\dfrac{-3-7}{2}=-5 \rightarrow x+5=0 \end{cases} \rightarrow (x-2)(x+5)=0$$

فقط توجه نمایید قرینه ریشه‌های به دست آمده را در پرانتزها نوشتیم.

دقت: در نظر داشته باشید که اگر بجای x در عبارت $x^2+3x-10$ مقدار ۲ یا ۵- را قرار دهیم؛ حاصل برابر با صفر به دست می‌آید. در واقع اعداد ۲ یا ۵- **ریشه‌های** عبارت $x^2+3x-10$ هستند:

$$x^2+3x-10=0\begin{cases} x=2 \rightarrow\ 2^2+3\times 2-10=4+6-10=0 \\ x=-5 \rightarrow (-5)^2+3(-5)-10=25-15-10=0 \end{cases}$$

دومین محدودیت: همچنین گاها به مواردی برمی‌خوریم که ریشه‌ها اعداد زُند نیستند؛ مثلا در عبارت $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$، پیدا کردن دو عدد که جمعشان $-\frac{7}{6}$ و ضربشان $\frac{1}{3}$ است؛ دشوار است. اما به کمک روش Δ داریم:

$$\Delta=(-\frac{7}{6})^2-4(1)(\frac{1}{3})=\frac{49}{36}-\frac{4}{3}=\frac{49-48}{36}=\frac{1}{36} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\frac{-7}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}}}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{\frac{7}{6}+\frac{1}{6}}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \rightarrow x-\frac{2}{3}=0 \\ x=\dfrac{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow x-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})=0$$

روش Δ برای تجزیه بسیار عالی است و در همه‌ی موارد جواب می‌دهد. فرض کنید همان عبارت $2x^2-3x-2$ را بخواهیم تجزیه کنیم؛ گفتیم ابتدا عبارت را برابر با صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = ۹-۴(۲)(-۲) = ۹+۱۶ = ۲۵ \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۳) \pm \sqrt{۲۵}}{۲\times۲} = \begin{cases} x = \frac{۳+۵}{۴} = ۲ \rightarrow x-۲ = ۰ \\ x = \frac{۳-۵}{۴} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow x+\frac{۱}{۲} = ۰ \end{cases} \rightarrow (x-۲)(x+\frac{۱}{۲}) = ۰$$

ممکن است با خود بگویید باز هم به جواب نرسیدیم؛ چون اولین ضرب، جمله‌ی $x^۲$ تولید کرده و $۲x^۲$ ایجاد نمی‌کند؛ برای حل این مسئله، کافیست عبارت تجزیه شده را در ۲ ضرب کنیم: $۲(x-۲)(x+\frac{۱}{۲})$. کار تمام است؛ فقط عدد ۲ را در پرانتزی که ریشه آن کسری است؛ ضرب کرده تا عبارت تجزیه شده زیباتر شود: $(x-۲)(۲x+۱)$.

سومین محدودیت: در مثال فوق، Δ ی عبارت‌های اول، سوم و چهارم مثبت شد و هر کدام از عبارت‌ها به دو پرانتز تجزیه شدند. در عبارت دوم $\Delta = ۰$ شد و عبارت به یک پرانتز تجزیه شد. حال این سوال مطرح می‌شود که اگر Δ منفی باشد؛ چه اتفاقی می‌افتد؟ برای مثال عبارت $x^۲+۲x+۵$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان آن را تجزیه کرد؟ اگر بخواهیم با روش اول عبارت را تجزیه کنیم باید دنبال اعدادی باشیم که جمعشان ۲+ و ضربشان ۵+ است.

هر چقدر هم وقت صرف کنیم باز هم **نمی‌توانیم** آن اعداد را پیدا کنیم. پس به کمک روش Δ می‌رویم:

$$\Delta = ۴-۴(۱)(۵) = ۴-۲۰ = -۱۶ \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲ \pm \sqrt{-۱۶}}{۲\times۱} \rightarrow x = undefind$$

به دلیل اینکه Δ منفی به دست آمد؛ $\sqrt{\Delta}$ تعریف نمی‌شود. در نتیجه عبارت موردنظر **تجزیه نمی‌شود**.

مزیت روش Δ نسبت به روش اول اینست که اگه Δ منفی باشه، اون عبارت تجزیه نمی‌شه و ما هم الکی وقتمون رو برای امتحان کردن اعداد مختلف تلف نمی‌کنیم.

جمع‌بندی:
۱) اگر Δ ی عبارت درجه۲، **مثبت** باشد؛ آن عبارت به **دو** پرانتز تجزیه می‌شود.
۲) اگر Δ ی عبارت درجه۲، **صفر** باشد؛ آن عبارت به **یک** پرانتز تجزیه می‌شود.
۳) اگر Δ ی عبارت درجه۲، **منفی** باشد؛ آن عبارت تجزیه نمی‌شود.

???چالش: در مورد تجزیه عبارت $x^۲+۲x+۵$ از یک طرف می‌گیم کدوم دو عدد هستند که جمعشون میشه ۲+ و ضربشون میشه ۵+. از طرف دیگه میگیم نمیشه تجزیه کرد، چون Δ ی آن **منفیه**.

بالاخره چی شد؟؟؟ یعنی واقعا نمیشه اون دو تا عدد رو پیدا کرد؟؟؟ اگه واقعا نمیشه پس عبارت $x^۲+۲x+۵$ اصلا چطوری ساخته شده؟؟؟ بالاخره دو تا پرانتز توی هم ضرب شدند تا $x^۲+۲x+۵$ بوجود اومده. اون دو تا پرانتز چی هستن؟؟؟!!!!!!