

فصل ۱: معادلات انتگرالی

دسته بندی معادلات انتگرالی: به دو دسته، معادلات انتگرالی فرد هم و دلترا دسته بندی می شوند.

معادلات انتگرالی فرد هم: خود نیز به دو دسته تقسیم بندی می شوند (الف) معادلات انتگرالی فرد هم نوع اول (F.H. First Type) (ب) معادلات انتگرالی فرد هم نوع دوم (F.H. Second Type)

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad x_0 < x < x_1 \quad \text{Unknown (مجهول)} \quad \text{: F.H. First Type}$$

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad \text{میتا بدو منبع} \quad \text{Homogeneous (همگن)} \quad \text{: F.H. Second Type}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad \text{میتا با منبع} \quad \text{Non-Homogeneous (ناهمگن)} \quad \text{معادلات انتگرالی دلترا:}$$

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad \text{ولترای نوع اول:}$$

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad \text{همگن:} \quad \text{ولترای نوع دوم:}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x_1} K(x,s) \varphi(s) ds \quad \text{ناهمگن:}$$

تبدیل معادله ولترای نوع اول به نوع دوم:

برای آنکه بتوانیم به خواسته خود یعنی $\varphi(x)$ برسیم لازم است از معادله اول مشتق بگیریم. از این رو داریم:

$$f(x) = \int_{x_0}^x K(x,s) \varphi(s) ds \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f'(x) = K(x,x) \varphi(x) + \int_{x_0}^x \frac{d}{dx} K(x,s) \varphi(s) ds$$

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} + \int_{x_0}^x \left[\frac{d}{dx} \frac{K(x,s)}{K(x,x)} \right] \varphi(s) ds \quad \text{با تقسیم طرفین به } K(x,x)$$

معادلات انتگرالی با کرنل خاص:

$$K(x,s) = K(s,x) \quad \text{(1) معادلات انتگرالی با کرنل متقارن: معادله ای است که در آن داریم}$$

$$K(x, s) = K(x, s)$$

(۲) معادلات انتگرالی با کرنل پیچیده :

$$K(x, s) = \lambda u(x) V(s)$$

عروض

(۳) معادلات انتگرالی با کرنل تفکیک پذیر :

حل معادلات انتگرالی با کرنل تفکیک پذیر :

معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم با کرنل تفکیک پذیر μ را در نظر بگیرید :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda u(x) \int_{x_0}^{x_1} V(s) \varphi(s) ds \quad * *$$

با ضرب طرفین در $V(x)$ و سپس انتگرال گیری داریم :

$$\int_{x_0}^{x_1} V(x) \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} V(x) f(x) dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} u(x) V(x) dx \int_{x_0}^{x_1} V(s) \varphi(s) ds$$

$$\int_{x_0}^{x_1} V(x) \varphi(x) dx = \frac{\int_{x_0}^{x_1} V(x) f(x) dx}{1 - \lambda \int_{x_0}^{x_1} V(x) u(x) dx} \quad *$$

پس می توان رابطه * را در * قرار داد :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda u(x) \frac{\int_{x_0}^{x_1} V(s) f(s) ds}{1 - \lambda \int_{x_0}^{x_1} V(s) u(s) ds} \quad * * *$$

با فرض آنکه $\lambda \neq \frac{1}{\int_{x_0}^{x_1} V(x) u(x) dx}$:

$$* * * \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, s, \lambda) f(s) ds \rightarrow \text{کرنل حلال (Solvent Kernel)}$$

$$K(x, s, \lambda) = \frac{u(x) V(s)}{1 - \lambda \int_{x_0}^{x_1} V(s) u(s) ds}$$

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, s) \varphi(s) ds$$

توجه : حل معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم هستند به روش تفکیک پذیر (مانند قبلی) ؟

حل معادلات انتگرالی که هسته آن بصورت مجموعی از توابع تفکیک پذیر باشد :

$$K(x, s) = \lambda \sum_{i=1}^n u_i(x) V_i(s) \quad *$$

گسترده

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy \quad **$$

طه معادله انتگرالی زیر را حل کنید:

با جایگزین کردن $**$ در $**$ در لیم:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^N u_i(x) v_i(y) \right) f(y) dy$$

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^N \left[u_i(x) \int_a^b v_i(y) f(y) dy \right] \Rightarrow f(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^N A_i u_i(x)$$

$A_i = \text{Var}$

باز نویسی مجدد A_i :

$$A_i = \int_a^b v_i(y) f(y) dy = \int_a^b v_i(y) \left[g(y) + \lambda \sum_{j=1}^N A_j u_j(y) \right] dy$$

$$= \int_a^b v_i(y) g(y) dy + \lambda \sum_{j=1}^N A_j \int_a^b v_i(y) u_j(y) dy \xrightarrow{\text{نویس ماتریسی}} A = G + \lambda M A$$

G_i M_{ij}

$$\Rightarrow (I - \lambda M) A = G \quad | \quad A = (I - \lambda M)^{-1} G$$

توجه شود که $I - \lambda M = 0$ جواب غیر صفر دارد اگر G صفر باشد و $I - \lambda M \neq 0$ جواب صفر دارد اگر G صفر باشد.

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+y) \varphi(y) dy$$

مثال: معادله انتگرالی معادل را حل کنید؟

راهنمایی (جواب):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sqrt{x}}{x} (1 + \sqrt{x} x) \\ \varphi_2 &= -\frac{\sqrt{x}}{x} (1 - \sqrt{x} x) \end{aligned} \right\} A=1$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sqrt{x}}{x} [x(2\lambda A_1) + A_2] \\ \varphi_2 &= \frac{\sqrt{x}}{x} [x^2(-\frac{\sqrt{x}}{x} A_1) + A_2] \end{aligned} \right\} A \neq 1$$

$$f(x) = ax + \lambda \int_0^1 (ay^2 + x^2y) f(y) dy$$

مثال: معادله انتگرالی معادل را بصورت مجموع (ماتریسی) حل کنید؟

ارتباط معادلات انتگرالی با معادلات دیفرانسیل:

مثال: معادله دیفرانسیل $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ را با شرایط $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$ به یک معادله انتگرالی تبدیل کنید؟

راهنمایی: $\int_a^x \int_a^t f(t) dt dx = \int_a^x f(t) (x-t) dt$

$$y'(a) = -\omega^2 \int_0^a y(t) dt + y'(0)$$

ابتداء فاصله 0 تا a انتگرال بگیریم:

بعد از انتگرال بگیریم:

$$y(a) - y(0) = -\omega^2 \int_0^a \int_0^t y(t) dt dt + y'(0)a$$

$$y(a) = -\omega^2 \int_0^a \int_0^t y(t) dt dt + y'(0)a + y(0) \quad *$$

بازنمایی * برای $b = a$ داریم:

$$y(b) = 0 \Rightarrow -\omega^2 \int_0^b (b-t)y(t) dt + y'(0)b = 0$$

$$y'(0) = \frac{\omega^2}{b} \int_0^b (b-t)y(t) dt \quad **$$

$$y(a) = -\omega^2 \int_0^a (a-t)y(t) dt + a \frac{\omega^2}{b} \int_0^b (b-t)y(t) dt =$$

با جایگذاری ** در * داریم:

$$\omega^2 \int_0^a \left[(b-t) \frac{a}{b} - (a-t) \right] y(t) dt + \omega^2 \frac{a}{b} \int_a^b (b-t)y(t) dt =$$

$$\omega^2 \int_0^a \frac{t}{b} (b-a)y(t) dt + \omega^2 \int_a^b \frac{a}{b} (b-t)y(t) dt$$

$$k(a,t) = \begin{cases} \frac{t}{b} (b-a) & 0 < t < a \\ \frac{a}{b} (b-t) & a < t < b \end{cases}$$

هم اکنون کرنل را چنین تعریف کنیم:

پس با تعریف کرنل داریم:

$$y(a) = \omega^2 \int_0^b k(a,t) y(t) dt \rightarrow \text{فرد هم نوع دوم هاگن}$$

تقریب: با توجه به علامه دفرانسیل مرتبه دوم، معادله انتگرالی ولترا استخراج کنید؟ (ولترا نوع دوم هاگن)

$$y''(a) + A(a)y'(a) + B(a)y(a) = g(a)$$

$$y'(a) = y'_0$$

$$y(a) = y_0$$

معادلات انتگرالی با هسته پیوسته:

تبدیلات انتگرالی: یکی از مهم ترین تبدیلات انتگرالی، تبدیل لاپلاس تابع $\varphi(a)$ است:

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(a) e^{-\omega a} da$$

تغییر پیچیدن یا کانولوشن:

هرگاه $K(u)$ تبدیل لاپلاس $k(\tau)$ با سدر این صورت: $\int_0^{\infty} k(\tau-s)\varphi(s)ds \xrightarrow{L} K(u)\Phi(u)$
یکی دیگر از تبدیلات انتگرالی مهم دیگر تبدیل فوریه است:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i u \tau} d\tau \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e^{j u \tau} du \quad i = j = \sqrt{-1}$$

$$F \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau-s)\varphi(s) ds \right\} = \sqrt{2\pi} K(u)\Phi(u) \quad \text{پاس}$$

حال φ توابع همبند فرمول بیضی منفرجه نوع دوم را تبدیل فوریه بگیریم:

$$\varphi(\tau) = f(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau-s)\varphi(s) ds \quad -\infty < \tau < \infty \quad \xrightarrow{F} \Phi(u) = F(u) + \sqrt{2\pi} K(u)\Phi(u) \Rightarrow$$

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi} K(u)} \quad \xrightarrow{F^{-1}} \varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi} K(u)} e^{i u \tau} du$$

$$\varphi(\tau) = e^{-|\tau|} + \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau-s)\varphi(s) ds \quad -\infty < \tau < \infty \quad \text{مثال: از جمله زیر فوریه بگیرد؟}$$

$$k(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{\tau} & \tau < 0 \\ 0 & \tau > 0 \end{cases} \quad \text{کند}$$

فصل ۲: مسائل مقدار مرزی

معادلات مستقیم جزئی یا PDE با معادله ۲ متغیر مستقل را بررسی می‌کنیم. بطور خاص، معادلات زیر را در نظر می‌گیریم. همان معادلات گرما در ۲ یا ۳ بعد:

$$\text{گرما} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & 2D \\ \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & 3D \end{cases} + BCs$$

معادله لاپلاس * $\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

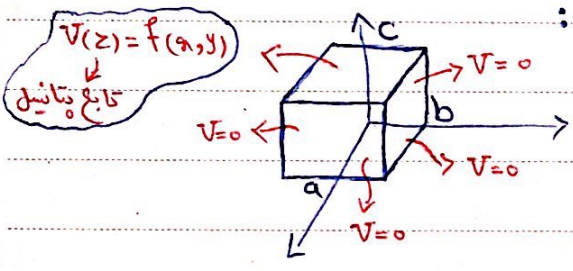
معادله غشای مرتعش $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

BCs: مکانی
ICs: زمانی

بطور کلی برای معادله مستقیم جزئی با n متغیر که بطور کامل جدا شدن (تفکیک پذیری) هستند، معادله مستقیم جزئی تبدیل به n معادله ODE می‌شود که بواسطه

این موضوع، n-1 مورد از این معادلات، مسئله مقدار ویژه یک بعدی می‌شود که باید در آنها n-1 ثابت جدا سازی تعیین شود که ثابتها را از BC و

ICs بدست می‌آوریم. به عنوان نمونه شکل سه بعدی یک معادله لاپلاس را دقت کنید:



پتانسیل درون موجیب و تابعی از دما و موجیب است.

به شرط تفکیک پذیری: $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$

با توجه به رابطه * و جایگذاری در آن داریم:

$$g(y)h(z) \frac{d^2 f}{dx^2} + f(x)h(z) \frac{d^2 g}{dy^2} + f(x)g(y) \frac{d^2 h}{dz^2} = 0$$

رابطه فوق را ب fgh نرمالیزه کنیم لذا داریم:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $-\lambda = cte$ $-\beta = cte$ $-\gamma = cte$

حال به حل معادله دینامیک معمولی هر ۳ معادله فوق می‌پردازیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda & \xrightarrow{ODE} f = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\beta & \xrightarrow{ODE} g = C'_1 \sin \sqrt{\beta} y + C'_2 \cos \sqrt{\beta} y \\ \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -\gamma & \xrightarrow{ODE} h = C''_1 \sin \sqrt{\gamma} z + C''_2 \cos \sqrt{\gamma} z \end{aligned} \right\} **$$

باقی به شرایط مرزی و BCs و اینکه $\lambda + \beta + \gamma = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \lambda + \beta + \gamma = 0 \\ BCs \end{cases} \Rightarrow u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sinh(\sqrt{\lambda + \beta} z)$$

$$BCs: u(x, y, z=c) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

(داده شده شکل)

$$A_{mn} = \frac{f}{ab \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy$$

تمرین: مسئله فوق را برای مختصات استوانه‌ای و گوی بنویسید؟

غشای هم‌تکاف در نیروی و توابع بسل: جواب جایی نمودی u ، معادله موج دوبعدی زیر را انتخاب کند:

PDE: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$

هندسه مسئله لازم می‌دارد که مختصات قطبی را برای حل مسئله انتخاب کنیم:

$$u = u(r, \theta, t)$$

که برای ما میدانی‌ها r و θ همان ρ و ϕ مختصات استوانه‌ای است.

فرض می‌کنیم که غشای درجای شعری $r=a$ است:

$$BC: u(a, \theta, t) = 0 \quad \left. \vphantom{BC} \right\} \text{شرط مکانی}$$

$$IC: \begin{cases} u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r, \theta) \end{cases} \left. \vphantom{IC} \right\} \text{شرط زمانی}$$

معلوماً

$$f(r)g(\theta)$$

$$u(r, \theta, t) = h(t) \Phi(r, \theta)$$

با فرض جداسازی متغیرها:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

همان‌طور که قبلاً نشان دادیم $h(t)$ معادله متقابل را انتخاب کند:

که در آن λ ثابت جداسازی است.

هم‌اکنون کافی است که $\Phi(r, \theta)$ را بصورت معادله مقدار ویژه دوبعدی در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi + \lambda \Phi = 0 & * \Rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \Phi(a, \theta) = 0 \end{cases}$$

بنام این را بجای * بصورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{g(\theta)}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \lambda f(r) g(\theta) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Normalized}} \quad x r^2, \div f(r) g(\theta)$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda^2 h \Rightarrow h(t) = \begin{cases} \sin c \sqrt{\lambda} t \\ \cos c \sqrt{\lambda} t \end{cases}$$

به معادله دینامیک زلزله می رسیم:

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} = -\mu g \Rightarrow g(\theta) = \begin{cases} \sin \sqrt{\mu} \theta \\ \cos \sqrt{\mu} \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \mu) f = 0$$

نکته: محاسبه مقادیر ویژه λ_{mn} که برای ماییدانی همان عدد موج می باشد (مثلن در مایکرو دیو) چون مختصات بصورت قطبی یا استوانه ای است، مقادیر تابع بیضی خواهد شد. از این رو محاسبه A_{mn} بصورت زیر می شود:

$$A_{mn} \Rightarrow \int_0^a \int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) r \cos(m\phi) =$$

BC

$$A_{mn} \int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) J_m(\sqrt{\lambda_{mp}} r) r dr \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi + B_{mn} \int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) J_m(\sqrt{\lambda_{mp}} r) r dr \int_0^{2\pi}$$

$$\sin m\theta \cos m\theta$$

$$A_{mn} = \frac{\sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_m}}}{a J_m'(\sqrt{\lambda_{mn}} a)} \int_0^a \int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) r \cos m\phi dr d\phi \quad \epsilon_m = \begin{cases} 2\pi & m=0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}$$

$$B_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) r \sin(m\phi) dr d\phi \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_m}} a J_m'(\sqrt{\lambda_{mn}} a) \quad \epsilon_m = \begin{cases} 0 & m=0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}$$

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0$$

یا بآدمی: تابع بسل مرتبه m بصورت زیر است:

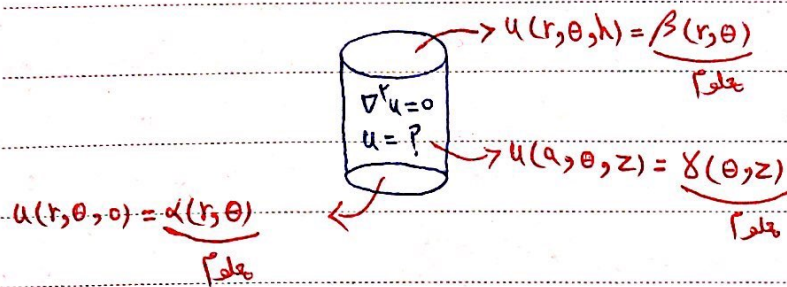
$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \cos m\theta \cos \sqrt{\lambda_{mn}} t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \sin m\theta$$

$$\cos \sqrt{\lambda_{mn}} t$$

Subject _____

Date _____

تقریب: بر اساس معادله لاپلاس در یک استوانه دایره‌ای، بدون حضور منابع، با شرط مرزی بالا، پایین و جانبی استوانه به شکل زیر (۳ شرط مرزی غیر همگن) آثار ابدست آورید!



راهنمای: بر ۳ شرط مرزی تبدیل شود: $u = u_1 + u_2 + u_3$
هر کدام فقط یک شرط مرزی دارند.

فصل ۳: توابع بسل و چند جمله‌ای های نژاندر

$$\lambda^2 y'' + \alpha y' + (\lambda^2 \alpha^2 - \lambda^2) y = 0$$

معادله بسل مرتبه ۲ با پارامتر λ بصورت مقابل است:

جواب کامل معادله فوق به یک از دو صورت زیر است:

دسته ①: $y(x) = C_1 J_{\lambda}(\lambda x) + C_2 Y_{\lambda}(\lambda x)$ (اوج مقصود)

تابع بسل نوع دوم از مرتبه λ تابع بسل نوع اول از مرتبه λ

دسته ②: $y(x) = C_1 H'_{\lambda}(\lambda x) + C_2 H''_{\lambda}(\lambda x)$ (اوج تسلسل سردی)

شکلست یافته * هنگام مرتبه اول هنگام مرتبه دوم

هنگام صورت مختلط بسل و نیومن است.

در معادله * فوق توابع ظاهر شده توابع آقاي هنگام می باشد که بصورت زیر قابل تعریف است:

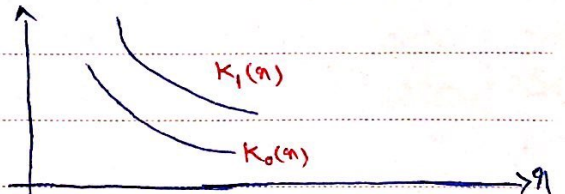
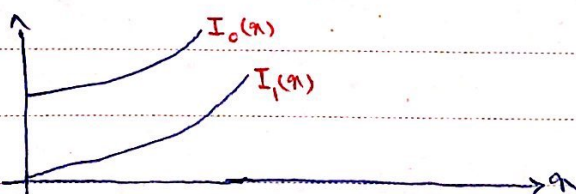
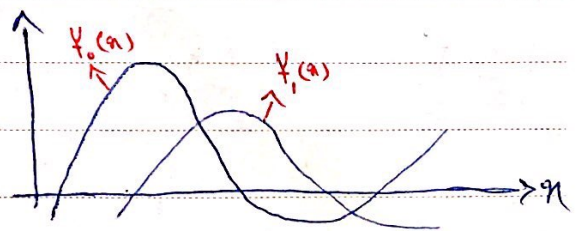
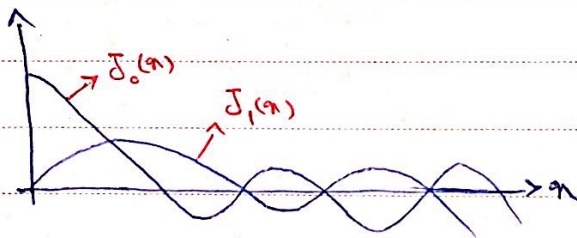
$$\begin{cases} H'_{\lambda}(t) = J_{\lambda}(t) + j Y_{\lambda}(t) \\ H''_{\lambda}(t) = J_{\lambda}(t) - j Y_{\lambda}(t) \end{cases}$$

$$\lambda^2 y'' + \alpha y' - (\lambda^2 \alpha^2 + \lambda^2) y = 0$$

معادله بسل اصلاح شده مرتبه ۲ با پارامتر λ :

$$y(x) = C_1 I_{\lambda}(\lambda x) + C_2 K_{\lambda}(\lambda x)$$

تابع بسل اصلاح شده نوع اول از مرتبه λ تابع بسل اصلاح شده نوع دوم از مرتبه λ



انتقادی برای توابع بسل (حل توابع بسل):

$$* \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) &= x^\nu I_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} (x^{-\nu} I_\nu(x)) &= -x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^\nu K_\nu(x)) &= -x^\nu K_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} (x^{-\nu} K_\nu(x)) &= -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) \end{aligned} \right.$$

می توان از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰

$$\textcircled{1} x^\nu J_\nu'(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\textcircled{2} x^{-\nu} J_\nu'(x) - \nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

با توجه به رابطه ۱ و ۲ میتوان $J_\nu'(x)$ را بصورت ۳ و ۴ بیان کرد:

$$\textcircled{3} J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$\textcircled{4} J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

با جمع کردن ۳ و ۴ و تقسیم بر دو $J_\nu'(x)$ می شود:

$$\textcircled{5} J_\nu'(x) = \frac{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}{2}$$

$$\textcircled{6} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

با کم نمودن ۴ از ۳ به یک رابطه بازگشتی می رسیم:

$$\textcircled{7} J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

رابطه فوق را میتوان بصورت مقابل نوشت:

مثال: $J_1(x)$ را بر حسب $J_0(x)$ و $J_2(x)$ حساب کنید!

با استفاده از رابطه ۷ داریم:

$$J_f(a_n) = \frac{y}{a_n} J_{\nu}(a_n) - J_{\nu}(a_n) = \frac{y}{a_n} \left[\frac{f}{a_n} J_{\nu}(a_n) - J_{\nu}(a_n) \right] - \left(\frac{y}{a_n} J_{\nu}(a_n) - J_{\nu}(a_n) \right) =$$

$$\frac{y}{a_n} \left[\frac{f}{a_n} \left(\frac{y}{a_n} J_{\nu}(a_n) - J_{\nu}(a_n) \right) - J_{\nu}(a_n) \right] - \frac{y}{a_n} J_{\nu}(a_n) + J_{\nu}(a_n) = \left(\frac{fy}{a_n^2} - \frac{y}{a_n} \right) J_{\nu}(a_n) - \left(\frac{y^2}{a_n^2} - 1 \right) J_{\nu}(a_n)$$

$$\text{تمرین: نشان دهید که} \quad \textcircled{A} \quad \frac{d}{dx} [x J_{\nu}(x) J_{\nu+1}(x)] = x [J_{\nu}^2(x) - J_{\nu+1}^2(x)] \quad *$$

اگر قضایای * را که مبنی بر مستحق گیری بودند بصورت فرمولهای انتگرالی بنویسیم آنگاه داریم:

$$\textcircled{9} \quad \int x^{\nu} J_{\nu-1}(x) dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C$$

$$\textcircled{10} \quad \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + C$$

به عنوان دو حالت خاص وقتی $\nu = 0$ و $\nu = 1$ قرار دهیم در رابطه 9 و 10 قرار می دهیم:

$$\textcircled{11} \quad \int x J_0(x) dx = x J_1(x) + C$$

و یکبار $\nu = 0$ قرار می دهیم و در رابطه 10 قرار می دهیم:

$$\textcircled{12} \quad \int J_1(x) dx = -J_0(x) + C$$

$$\int J_{\nu}(x) dx = ?$$

مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{\sin x}{x} \quad \text{نشان دهید که} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu} \varphi d\varphi = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}$$

مثال: اگر بدانیم

توابع بسل کردی: ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان می کنیم

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + [z^2 - n(n+1)] w = 0 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

معادله فوق معادله شعاعی می باشد که در هنگام حل معادلات موج در مختصات کردی به روش جداسازی متغیرها حاصل می شود. با بکار گرفتن تبدیل

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + [z^2 - (n + \frac{1}{2})^2] u = 0 \quad w(z) = \sqrt{\frac{z}{z^2}} u(z) \quad \text{با جایگذاری داریم:}$$

در جواب مستقل خطی معادله فوق خواهد شد:

$$\begin{cases} J_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) & \text{تابع بیل کروی نوع اول از مرتبه } n \\ Y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z) & \text{تابع بیل کروی نوع دوم از مرتبه } n \text{ (نیومن کروی)} \end{cases}$$

مستجاب به توابع هانک استاندارد، توابع هانک کروی نوع اول دوم نیز میتوان تعریف نمود:

$$H_n'(z) = J_n(z) + j Y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}'(z)$$

$$H_n''(z) = \bar{J}_n(z) - j Y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}''(z)$$

توابع لژاندر: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + [\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2}] w = 0 \quad m \in z \quad \ell = cte$$

$$P_{\ell}^m(z) \quad \text{و} \quad Q_{\ell}^m(z)$$

در جواب مستقل خطی معادله فوق (لژاندر):

تابع نوع دوم از مرتبه ℓ و مرتبه m تابع نوع اول از مرتبه ℓ و مرتبه m

با نسخ کلی معادله فوق می شود:

$$w(z) = a_{m\ell} P_{\ell}^m(z) + b_{m\ell} Q_{\ell}^m(z)$$

ملاحظات خاص $m=0 \Rightarrow (1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \ell(\ell+1)w = 0$

$$\begin{cases} P_{\ell}(z) \\ Q_{\ell}(z) \end{cases} \Rightarrow w(z) = a_{\ell} P_{\ell}(z) + b_{\ell} Q_{\ell}(z)$$

if $N = \ell \in z \Rightarrow P_N^m(z) = P_N(z)$ را می توان بصورت یک سری محدود که چند جایی های لژاندر درجه n و مرتبه m نامیده می شود نمایش داد.

بطور مستجاب برای $Q_{\ell}(z)$ نیز همین موفوع را می توان بیان کرد.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

توابع لژاندر نوع اول: چند جمله ای های لژاندر چنین تعریف می شوند

$$\text{if } n = \text{even} \Rightarrow m = \frac{n}{2}$$

$$\text{if } n = \text{odd} \Rightarrow m = \frac{n-1}{2}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(2x-1)^n]^{(n)}$$

به کمک فرمول رودریگس داریم:

$$\text{مث: } P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(2x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x), \dots$$

$$P_n(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times n} & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

مقادیر خاص چند جمله ای های لژاندر:

$$P_n'(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times n}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (n-1)} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$P_n(1) = 1 \quad P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2} \quad P_n(-1) = (-1)^n = \cos n\pi \quad P_n'(-1) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x) \quad \text{خواص تقارن:}$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad n \geq 2 \quad \text{روابط بازگشتی:}$$

$$P_n'(x) = \frac{n}{1-x^2} [P_{n-1}(x) - x P_n(x)] \quad |x| \neq 1$$

$$P_n'(x) = \frac{n+1}{1-x^2} [x P_n(x) - P_{n+1}(x)] \quad |x| \neq 1$$

$$P_n'(x) = \frac{1}{x} P_{n-1}'(x) + \frac{n}{x} P_n(x) \quad x \neq 0$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

تعامد توابع لژاندر:

یکی از کاربردهای تقاد، محاسبه فرایند سری فوریه - لژاندری با استفاده از معادله زیر دقت کنید:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad -1 < x < 1 \quad A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

توانج لژاندر درجه n مرتبه m بصورت زیر قابل بیان است:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

مثال: $n=1, m=1 \rightarrow P_1^1(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $n=2, m=1 \rightarrow P_2^1(x) = -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$n=2, m=2 \rightarrow P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

روابط تقاد:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^{-m}(x) dx = (-1)^m \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \quad / \quad \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^{m'}(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nm'}$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^{-m'}(x) (1-x^2)^{-1} dx = (-1)^m \frac{1}{m} \delta_{mm'} \quad / \quad \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & n=n' \\ 0 & n \neq n' \end{cases} \quad / \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1 & m=m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases}$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_{n'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \quad / \quad \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n^m(x)$$

$$A_n = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n^m(x) dx \quad \rightarrow \quad \text{سری فوریه - لژاندر}$$

مثال: توزیع های معلوم $u = f(\theta)$ را روی تمام سطح کره ای به شعاع b در نظر بگیرید. برای حالتی که در هر نقطه کره بدست آوریم؟

با توجه به تابع u برای نشان دادن b در هر نقطه باید بسط معادله لاپلاس را در مختصات کروی بنویسیم پس آن را بر حسب تفکیک متغیرها حل کنیم:

$$r^2 \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$u = R(r) \Theta(\theta)$$

با بکارگیری تفکیک متغیرها داریم:

در نهایت داریم:

$$\underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R}}_{\text{معادله اول}} = - \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta}}_{\text{معادله دوم}} = n(n+1)$$

* معادله اول: $r^2 R'' + r R' - n(n+1)R = 0$ ** معادله دوم: $\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + n(n+1) \sin \theta \Theta = 0$

از شرطهای تغییرات $R(r) = Ar^n$ → برای نتایج داخل کره که $r=0$ است باید B را منفرجه نظر بگیریم.
 * حد: $R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$ →

معادله * که معادله لژاندر است و جوابهای آن در $0 \leq \theta \leq \pi$ محدود هستند اما $P_n(\cos \theta)$ نامحدود هستند لذا فقط آن جواب ** بصورت زیر می آید:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{A_n r^n}_{f(n)} P_n(\cos \theta)$$

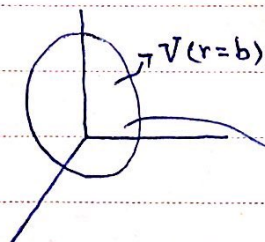
از شرط مرزی $r=b$ داریم: $f(\theta) = u(b, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\cos \theta)$ \square

$$\Rightarrow \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin \theta f(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin \theta f(\theta) d\theta = A_n b^n \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2n+1}{2b^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

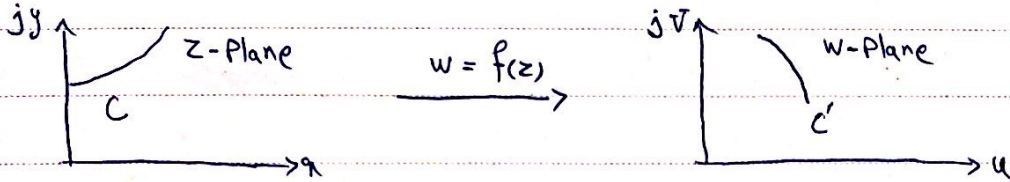
با جایگذاری A_n در \square جواب نهایی بدست می آید.



تقریباً: $u(\theta, \phi) = f(\theta, \phi)$ در همان حال قبل با \square

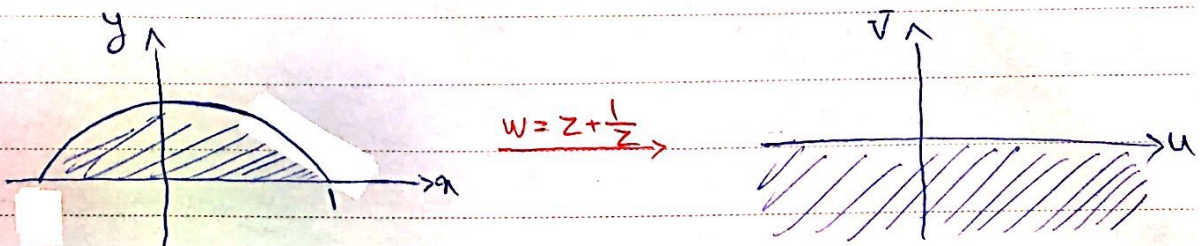
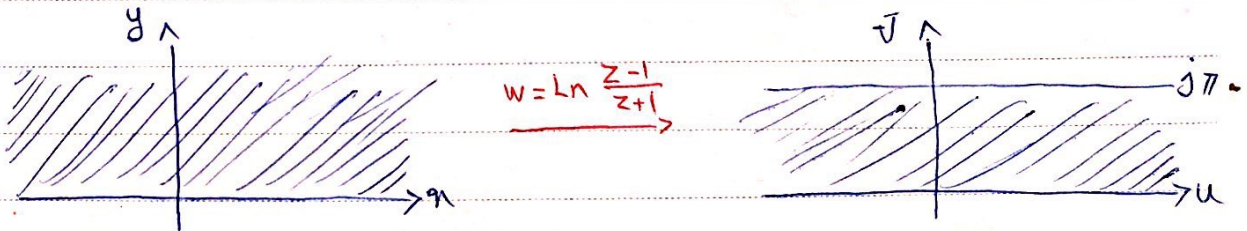
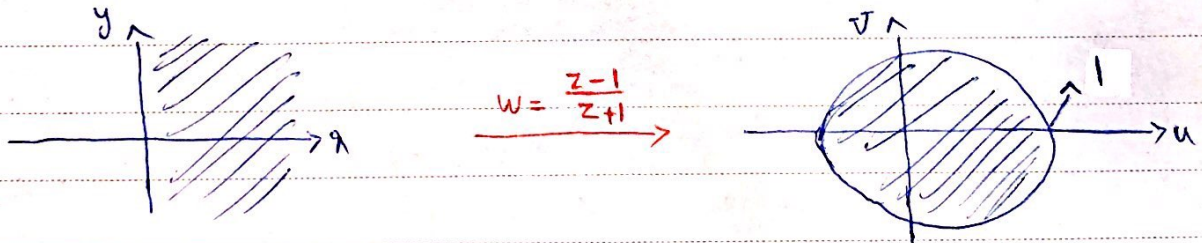
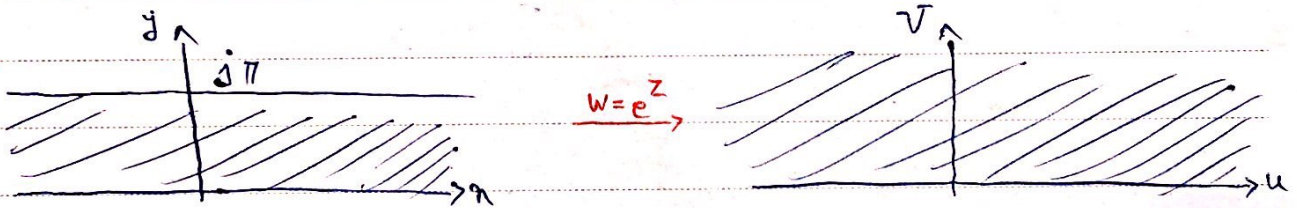
فصل ۴: استفاده از نگاشته‌ها هودین برای حل مسائل المکتر و نقاطین

با بکارگیری نگاشته‌ها هودین می‌توان یک منحنی C در صفحه z را به یک منحنی C' در صفحه w نگاشت. نگاریم:

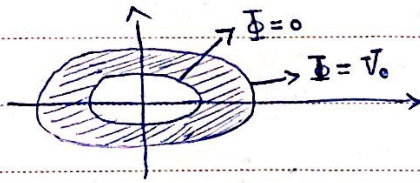


اگر تبدیل $w = f(z)$ که نقطه $z(x, y)$ را به نقطه $w(u, v)$ تبدیل می‌کند تابعی تحلیلی در نقطه z باشد به نوبه‌ای که $f'(z) \neq 0$ باشد، نگاشته‌ها را هودین (Conformal) می‌گویند. شرط لازم برای اینکه تابع f تحلیلی باشد آن است که در شرایط کبی-ریمان صدق کند:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



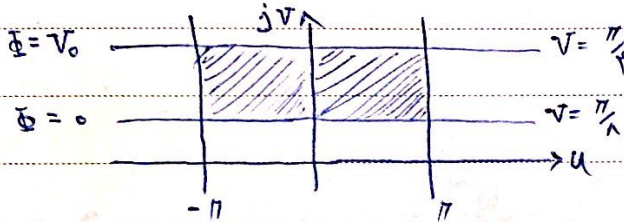
مثال: پتانسیل در ناحیه بین دو استوانه با سطح مقطع بیضی که در پتانسیل های داخلی $\Phi = 0$ و هادی خارجی $\Phi = V_0$ قرار دارد را بیابید (از روش نگاشت همدیس)



حل: با در نظر گرفتن تبدیل $W = \cos^{-1} z$ داریم:

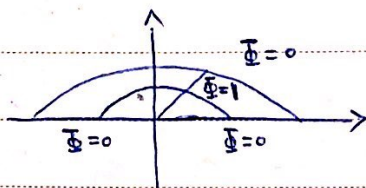
$$W = u + jv = \cos^{-1}(x + jy) \xrightarrow{\cos} \cos(u + jv) = x + jy \Rightarrow \begin{cases} x = \cos u \cosh v \\ y = \sin u \sinh v \end{cases}$$

با محاسبه $\cos u$ و $\sin u$ از روابط بالا و با مربع کردن آنها داریم: $\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1 = \cos^2 u + \sin^2 u$
 برای v ثابت معادله بیضی را معادله کنیم در این صورت با این نگاشت شکل بیضی تبدیل به شرایط مرزی می شود:



با جایگذاری BC ها $\begin{cases} \Phi = AV + B \\ \Phi = \frac{1}{\pi} (V - \frac{\pi}{\lambda}) V_0 \end{cases}$

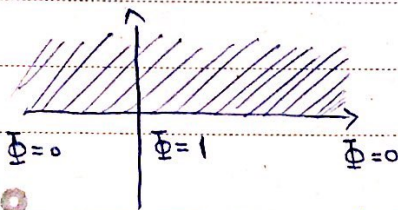
حل معادله مربع بر حسب V :
$$\Rightarrow V = \sinh^{-1} \left[\frac{y^2 + x^2 - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(y^2 + x^2 - 1)^2}{4} + y^2} \right]^{1/2}$$



تمرین: با جلا گیری نگاشت همدیس پتانسیل شکل زیر را بیابید؟

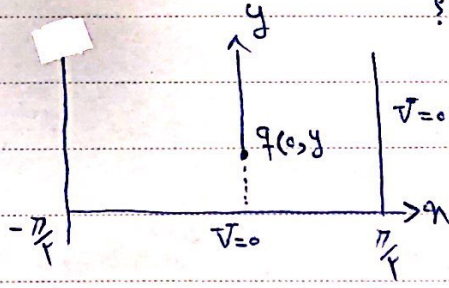
راهنمای: $W = \ln z = \ln r e^{j\theta} = \ln r + j\theta$

مثال: با جلا گیری نگاشت همدیس برای مسئله زیر پتانسیل را در قسمت تعیین کنید؟



$$W = \ln \frac{z-1}{z+1}$$

سوال: با بکارگیری نگاشت همدیس بتائیل شکل زیر را بیابید؟



(تئوری تموم)