Subject
Date

فصل ۱: معادلات انتگرالی

دسته بندی معادلات انتگرالی: به دو دسته، معادلات انتگرالی فردهلم و ولترا دسته بندی می‌شوند.

معادلات انتگرالی فردهلم: خود نیز به دو دسته تقسیم بندی می‌شوند (الف) معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول (F.H First Type) (ب) معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم (F.H Second Type)

: F.H First Type

$$f(x)=\int_{x_0}^{x_1} K(x,s)\overbrace{\varphi(s)}^{\text{Unknown (مجهول)}}\,ds \qquad x_0<x<x_1$$

: F.H Second Type

Homogeneous (همگن) $\xleftarrow{\text{محیط بدون منبع}}$

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x_1} K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

Non-Homogeneous (ناهمگن) $\xleftarrow{\text{محیط با منبع}}$

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{x_0}^{x_1} K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

معادلات انتگرالی ولترا:

ولترای نوع اول:

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

ولترای نوع دوم:

همگن:

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

ناهمگن:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{x_0}^{x} K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

تبدیل معادلهٔ ولترای نوع اول به نوع دوم:

برای آنکه بتوانیم به خواستهٔ خود یعنی $\varphi(x)$ برسیم لازم است از معادلهٔ اول مشتق بگیریم. از این رو داریم:

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\varphi(s)\,ds \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f'(x)=K(x,x)\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{d}{dx}K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

با تقسیم طرفین به $K(x,x)$:

$$\varphi(x)=\underbrace{\frac{f'(x)}{K(x,x)}}_{f(x)}\overset{+}{-}\int_{x_0}^{x}\overbrace{\left[\frac{d}{dx}\frac{K(x,s)}{K(x,x)}\right]}^{K(x,s)}\varphi(s)\,ds$$

معادلات انتگرالی با کرنل خاص:

۱) معادلات انتگرالی با کرنل متقارن: معادله‌ای است که در آن داریم

$$K(x,s)=K(s,x)$$

Subject
Date

۲) معادلات انتگرالی با کرنل پیچشی : $K(x,s) = K(x-s)$

۳) معادلات انتگرالی با کرنل تفکیک پذیر : $K(x,s) = \underset{\text{عدد موج}}{\underline{\lambda}}\, u(x)\, v(s)$

حل معادلات انتگرالی با کرنل تفکیک پذیر :

معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم با کرنل تفکیک پذیر زیر را در نظر بگیرید :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda u(x) \int_{x_0}^{x_1} v(s)\varphi(s)\, ds \qquad **$$

با ضرب طرفین در $v(x)$ و پس انتگرال گیری داریم :

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)\varphi(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} v(x) f(x)\, dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} u(x) v(x)\, dx \int_{x_0}^{x_1} v(s)\varphi(s)\, ds$$

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)\varphi(x)\, dx = \frac{\int_{x_0}^{x_1} v(x) f(x)\, dx}{1-\lambda \int_{x_0}^{x_1} v(x) u(x)\, dx} \qquad *$$

پس می توان رابطهٔ * را در ** قرار داد :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda u(x) \frac{\int_{x_0}^{x_1} v(s) f(s)\, ds}{1-\lambda \int_{x_0}^{x_1} v(s) u(s)\, ds} \qquad ***$$

با فرض آنکه $\lambda \neq \dfrac{1}{\int_{x_0}^{x_1} v(x) u(x)\, dx}$ آنگاه :

$$*** \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x,s,\lambda) f(s)\, ds$$

کرنل حلال (Solvent Kernel)

$$K(x,s,\lambda) = \frac{u(x)\, v(s)}{1-\lambda \int_{x_0}^{x_1} v(s) u(s)\, ds}$$

تمرین : حل معادلهٔ انتگرالی فردهلم نوع دوم همگن به روش تفکیک پذیر (مانند قبلی) ؟ $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,s)\varphi(s)\, ds$

حل معادلات انتگرالی که هستهٔ آن بصورت $\underset{\text{گسسته}}{\underline{\text{مجموعی}}}$ از توابع تفکیک پذیر باشد :

$$K(x,s) = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(s) \qquad *$$

حال معادلهٔ انتگرالی زیر را لحاظ کنید : $f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy \quad **$

با جایگزین کردن * در ** داریم :

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{N} u_i(x)\,v_i(y)\right) f(y)\,dy$$

$$f(x)=g(x)+\lambda\sum_{i=1}^{N}\Big[u_i(x)\underbrace{\int_a^b v_i(y)\,f(y)\,dy}_{A_i=Var}\Big] \Rightarrow f(x)=g(x)+\lambda\sum_{i=1}^{N} A_i\,u_i(x)$$

بازنویسی مجدد A_i :

$$A_i=\int_a^b v_i(y)\,f(y)\,dy=\int_a^b v_i(y)\Big[g(y)+\lambda\sum_{j=1}^{N}A_j\,u_j(y)\Big]dy$$

$$=\underbrace{\int_a^b v_i(y)\,g(y)}_{G_i}+\lambda\sum_{j=1}^{N}A_j\underbrace{\int_a^b v_i(y)\,u_j(y)\,dy}_{M_{ij}} \xrightarrow{\text{فرمت ماتریسی}} A=G+\lambda M A$$

$$\Rightarrow \boxed{(I-\lambda M)A=G} \qquad A=(I-\lambda M)^{-1}G$$

توجه شود که $|I-\lambda M|=0$ جواب غیر صفر دارد اگر G صفر باشد و $|I-\lambda M|\neq 0$ جواب صفر دارد اگر G صفر باشد.

مثال: معادلهٔ انتگرالی مقابل را حل کنید؟ $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(x+y)\,\varphi(y)\,dy$

راهنمایی (جواب):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x(2\lambda A_2)+A_2\right]\\ \varphi_2&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2\right)+A_2\right]\end{aligned}\right\}\ \text{با فرض}\ A\neq 1$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3}\,x)\\ \varphi_2&=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3}\,x)\end{aligned}\right\}\ \text{با فرض}\ A=1$$

مثال: معادلهٔ انتگرالی مقابل را بصورت مجموع (ماتریسی) حل کنید؟ $f(x)=x+\lambda\int_0^1 (xy^2+x^2y)\,f(y)\,dy$

ارتباط معادلات انتگرالی با معادلات دیفرانسیل :

مثال: معادله دیفرانسیل $y''(x)+w^2y(x)=0$ را با شرایط $\begin{cases} y(0)=0\\ y(b)=0\end{cases}$ به یک معادلهٔ انتگرالی تبدیل کنید؟ *

راهنمایی: $\int_a^x\int_a^x f(t)\,dt\,dx=\int_a^x f(t)\,(x-t)\,dt$

ابتدا در فاصلهٔ ۰ تا x انتگرال می‌گیریم:

$$y'(x) = -w^2 \int_0^x y(t)\,dt + y'(0)$$

مجدداً انتگرال می‌گیریم:

$$y(x) - y(0) = -w^2 \int_0^x \int_0^x y(t)\,dt\,dt + y'(0)x$$

$$\boxed{y(x) = -w^2 \int_0^x \int_0^x y(t)\,dt\,dt + y'(0)x + y(0)} \quad *$$

با ارزیابی $*$ برای $x=b$ داریم:

$$y(b) = 0 \Rightarrow -w^2 \int_0^b (b-t)y(t)\,dt + y'(0)\,b = 0$$

$$\boxed{y'(0) = \frac{w^2}{b} \int_0^b (b-t)y(t)\,dt} \quad **$$

با جایگذاری $**$ در $*$ داریم:

$$y(x) = -w^2 \int_0^x (x-t)y(t)\,dt + x\frac{w^2}{b}\int_0^b (b-t)y(t)\,dt =$$

$$w^2 \int_0^x \left[(b-t)\frac{x}{b} - (x-t)\right] y(t)\,dt + w^2 \frac{x}{b}\int_x^b (b-t)y(t)\,dt =$$

$$w^2 \int_0^x \frac{t}{b}(b-x)y(t)\,dt + w^2 \int_x^b \frac{x}{b}(b-t)y(t)\,dt$$

هم اکنون کرنل را چنین تعریف می‌کنیم:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{b}(b-x) & 0<t<x \\ \frac{x}{b}(b-t) & x<t<b \end{cases}$$

پس با تعریف کرنل داریم:

$$y(x) = w^2 \int_0^b K(x,t)y(t)\,dt \rightarrow$$ فردهلم نوع دوم همگن

تمرین: با توجه به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر معادلهٔ انتگرالی ولترا استخراج کنید؟ (ولترای نوع دوم ناهمگن)

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = g(x) \qquad y'(a) = y'_0 \qquad y(a) = y_0$$

معادلات انتگرالی با هستهٔ پیچیش:

تبدیلات انتگرالی: یکی از مهم‌ترین تبدیلات انتگرالی، تبدیل لاپلاس تابع $\varphi(x)$ است:

$$\Phi(u) = \int_0^\infty \varphi(x)\,e^{-ux}\,dx$$

تفیهٔ پیچش یا کانولوشن :

هرگاه $K(u)$ تبدیل لاپلاس $k(x)$ باشد در این صورت :

$$\int_0^{\infty} k(x-s)\varphi(s)ds \xrightarrow{L} K(u)\Phi(u)$$

یکی دیگر از تبدیلات انتگرالی مهم دیگر، تبدیل فوریه است :

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-iux}dx \qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u)e^{jux}du \qquad i=j=\sqrt{-1}$$

پس :

$$F\left\{\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)\varphi(s)ds\right\}=\sqrt{2\pi}\,K(u)\Phi(u)$$

حال می خواهیم معادلهٔ فردهلم پیچشی منفرد نوع دوم را تبدیل فوریه بگیریم :

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)\varphi(s)ds \quad -\infty<x<\infty \xrightarrow{F} \Phi(u)=F(u)+\sqrt{2\pi}\,K(u)\Phi(u) \Rightarrow$$

$$\Phi(u)=\frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)} \xrightarrow{F^{-1}} \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}e^{ixu}du$$

مثال : از معادلهٔ زیر فوریه بگیرید ؟

$$\varphi(x)=e^{-|x|}+\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)\varphi(s)ds \quad -\infty<x<\infty$$

کرنل $k(x)=\begin{cases}\lambda e^{x} & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$

فصل ۲: مسائل مقدار مرزی

معادلات مشتق جزئی یا PDE با حداقل ۳ متغیر مستقل را بررسی می کنیم. بطور خاص، معادلات زیر را در نظر می گیریم. مثلن معادلات گرما در ۲ یا ۳ بعد:

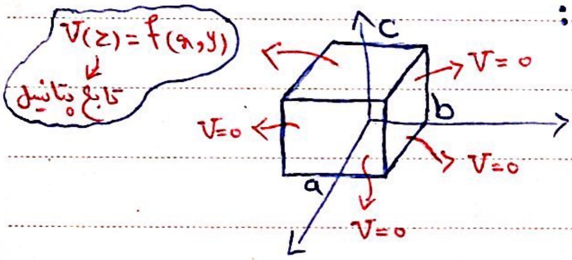
$$\text{گرما}\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & 2D \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & 3D \end{cases} + BCs$$

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ معادلهٔ لاپلاس *

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$ معادلهٔ غشای مرتعش

BCs: مکانی
ICs: زمانی

بطور کلی برای معادلهٔ مشتق جزئی با n متغیر که بطور کامل جدا شدنی (تفکیک پذیر) هستند، معادلهٔ مشتق جزئی تبدیل به n معادلهٔ ODE می شود که بواسطهٔ این موضوع، n-1 مورد از این معادلات، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ یک بعدی می شود که باید در آنها n-1 ثابت جداسازی تعیین شود که ثابتها را از BCs و ICs بدست می آوریم. به عنوان نمونه شکل سه بعدی یک معادلهٔ لاپلاس را دقت کنید:



پتانسیل درون موجبر، تابعی از دهانهٔ موجبر است.

به شرط تفکیک پذیری: $u(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$

با توجه به رابطهٔ * و جایگذاری در آن داریم:

$$g(y)h(z)\frac{d^2 f}{dx^2} + f(x)h(z)\frac{d^2 g}{dy^2} + f(x)g(y)\frac{d^2 h}{dz^2} = 0$$

رابطهٔ فوق را به gfh نرمالیزه می کنیم لذا داریم:

$$\underbrace{\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}}_{-\lambda = cte} + \underbrace{\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2}}_{-\beta = cte} + \underbrace{\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dz^2}}_{-\gamma = cte} = 0$$

حال به حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی هر ۳ معادلهٔ فوق می پردازیم:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda &\xrightarrow{ODE} f = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x \\ \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} = -\beta &\xrightarrow{ODE} g = c'_1 \sin\sqrt{\beta}\,y + c'_2 \cos\sqrt{\beta}\,y \\ \frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dz^2} = -\gamma &\xrightarrow{ODE} h = c''_1 \sin\sqrt{\gamma}\,z + c''_2 \cos\sqrt{\gamma}\,z \end{aligned}\right\} **$$

Subject
Date

با توجه به شرایط مرزی و BCs و اینکه $\lambda+\beta+\gamma=0$ داریم:

$$\begin{cases} \lambda+\beta+\gamma=0 \\ BCs \end{cases} \Rightarrow u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sinh\left(\sqrt{\lambda+\beta}\,z\right)$$

$$BCs: \; u(x,y,\underbrace{z=c}_{\text{داده مسئله (شکل)}})=f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$A_{mn}=\frac{4}{ab\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\,c\right)}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dx\,dy$$

تمرین: مسئله فوق را برای مختصات استوانه‌ای و کروی بنویسید؟

غشای مرتعش دایروی و توابع بسل: جابجایی عمودی u، معادله موج دو بعدی زیر را اغنا می‌کند:

$$PDE: \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u$$

هندسه مسئله لازم می‌دارد که مختصات قطبی را برای حل مسئله انتخاب کنیم: $u=u(r,\theta,t)$

که برای ما میدانی ها r و θ همان φ و ρ مختصات استوانه‌ای است.

فرض می‌کنیم که غشا دارای جابجایی صفر روی مرز $r=a$ است:

$$BC: u(a,\theta,t)=0 \quad \} \text{ شرط مکانی}$$

$$\left.\begin{aligned} IC:\; & u(r,\theta,0)=\alpha(r,\theta) \\ , \; & \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=\beta(r,\theta) \end{aligned}\right\} \text{ شروط زمانی}$$

معلوم

با فرض جداسازی متغیرها:

$$u(r,\theta,t)=h(t)\,\overbrace{\Phi(r,\theta)}^{f(r)\,g(\theta)}$$

همان‌طور که قبلاً نشان دادیم، $h(t)$ معادله مقابل را اغنا می‌کند:

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-\lambda c^2 h$$

که در آن λ، ثابت جداسازی است.

هم اکنون کافی است که $\Phi(r,\theta)$ را بصورت معادله مقدار ویژه دو بعدی در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0 \quad * \quad \Rightarrow \nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \\ \varphi(a,\theta)=0 \end{cases}$$

بنابراین این را جمله * بصورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{g(\theta)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dh}\right)+\frac{f(r)}{r^2}\frac{d^2g}{d\theta^2}+\lambda f(r)\,g(\theta)=0 \xrightarrow[\times r^2,\ \div f(r)g(\theta)]{\text{Normalized}}$$

به ۳ معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-\lambda c^2 h \Rightarrow h(t)=\begin{cases}\sin c\sqrt{\lambda}\,t\\ \cos c\sqrt{\lambda}\,t\end{cases}$$

$$\frac{d^2g}{d\theta^2}=-\mu g \Rightarrow g(\theta)=\begin{cases}\sin\sqrt{\mu}\,\theta\\ \cos\sqrt{\mu}\,\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)+(\lambda r^2-\mu)f=0$$

نکته: محاسبه مقادیر ویژه λ_{mn} که برای ما میدانی‌ها همان عدد موج می‌باشد (مثلن در مایکروویو) چون مختصات بصورت قطبی یا استوانه‌ای است، صفرهای تابع بسل خواهد شد. از این رو محاسبه A_{mn} بصورت زیر می‌شود:

$$\overset{\text{محاسبه}}{A_{mn}} \Rightarrow \int_0^a\int_0^{2\pi}\underset{\substack{\downarrow\\ BC}}{\alpha(r,\theta)}\,J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}\,r)\,r\cos(m\varphi)=$$

$$A_{mn}\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}\,r)\,r\,dr\int_0^{2\pi}\cos^2 m\theta\, d\varphi+B_{mn}\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}\,r)\,r\,dr\int_0^{2\pi}$$

$$\sin m\theta\cos m\theta\, d\theta$$

$$A_{mn}=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon_m}}}{a J_m'(\sqrt{\lambda_{mn}}\,a)}\int_0^a\int_0^{2\pi}\alpha(r,\theta)J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)\,r\cos m\varphi\, dr\, d\varphi \qquad \varepsilon_m=\begin{cases}2\pi & m=0\\ \pi & m\neq 0\end{cases}$$

$$B_{mn}=\int_0^a\int_0^{2\pi}\alpha(r,\theta)J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)\,r\sin(m\varphi)\,dr\,d\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon_m}}\,a J_m'(\sqrt{\lambda_{mn}}\,a) \qquad \varepsilon_m=\begin{cases}0 & m=0\\ \pi & m\neq 0\end{cases}$$

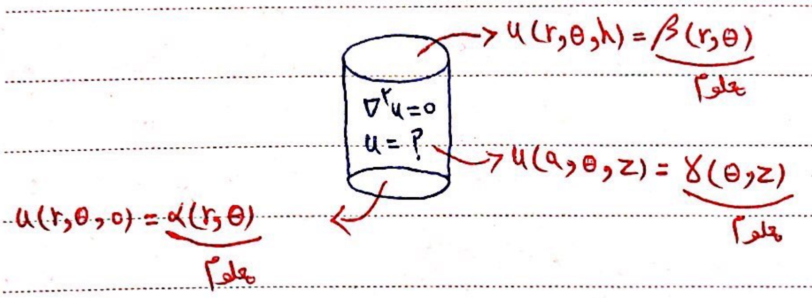
یادآوری: تابع بسل مرتبه m بصورت زیر است:

$$z^2\frac{d^2f}{dz^2}+z\frac{df}{dz}+(z^2-m^2)f=0$$

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)\cos m\theta\cos\sqrt{\lambda_{mn}}\,t+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}\,r)\sin m\theta$$

$$\cos\sqrt{\lambda_{mn}}\,t$$

تمرین: بر اساس معادلهٔ لاپلاس در یک استوانهٔ دایره‌ای، بدون حضور منابع، با شرایط مرزی بالا، پایین و جانبی استوانه به شکل زیر (۳ شرط مرزی غیرهمگن) u را بدست آورید؟



راهنمایی: به ۳ شرط مرزی تبدیل شود: $u=u_1+u_2+u_3$

هر کدام فقط یک شرط مرزی دارند.

فصل ۳ : توابع بسل و چند جمله ای های لژاندر

معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν با پارامتر λ بصورت مقابل است : $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$

جواب کامل معادلهٔ فوق به یکی از دو صورت زیر است :

امواج محصور ① دستهٔ : $y(x)=C_1 J_\nu(\lambda x)+C_2 Y_\nu(\lambda x)$

تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ ν — تابع بسل نوع دوم از مرتبهٔ ν

امواج تشعشع شده یا شکست یافته ② دستهٔ : $y(x)=C_1 H^1_\nu(\lambda x)+C_2 H^2_\nu(\lambda x)$ *

هنکل مرتبه اول — هنکل مرتبه دوم

هنکل، صورت مختلط بسل و نیومن است.

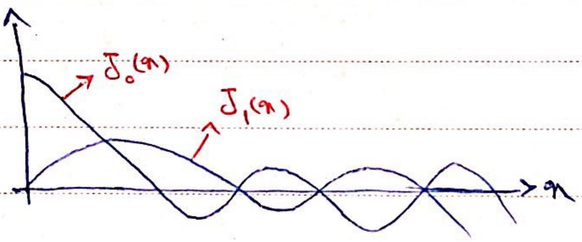
در معادلهٔ * فوق، توابع ظاهر شده توابع آقای هنکل می باشد که بصورت زیر قابل تعریف است :

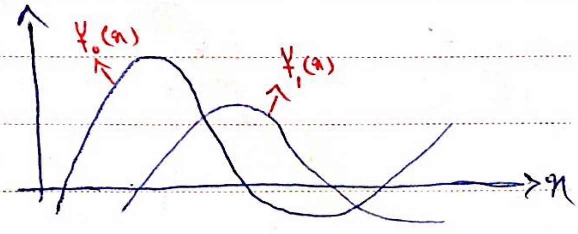
$$\begin{cases} H^1_\nu(t)=J_\nu(t)+j\,Y_\nu(t) \\ H^2_\nu(t)=J_\nu(t)-j\,Y_\nu(t) \end{cases}$$

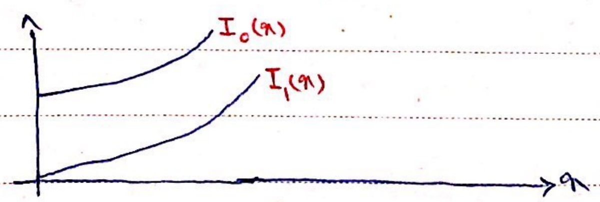
معادلهٔ بسل اصلاح شدهٔ مرتبهٔ ν با پارامتر λ : $x^2y''+xy'-(\lambda^2x^2+\nu^2)y=0$

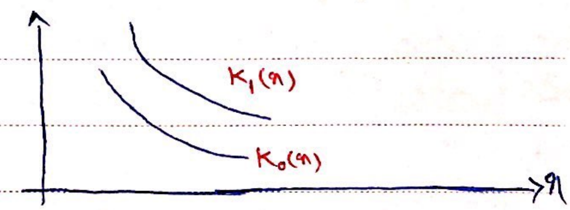
$$y(x)=C_1 I_\nu(\lambda x)+C_2 K_\nu(\lambda x)$$

تابع بسل اصلاح شدهٔ نوع اول از مرتبهٔ ν — تابع بسل اصلاح شدهٔ نوع دوم از مرتبهٔ ν









Subject
Date

اتحادهایی برای توابع بسل (حل توابع بسل):

$$*\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}I_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}I_{\nu-1}(x)\\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}I_{\nu}(x)\right)=x^{-\nu}I_{\nu+1}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}K_{\nu}(x)\right)=-x^{\nu}K_{\nu-1}(x)\\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}K_{\nu}(x)\right)=-x^{-\nu}K_{\nu+1}(x)\end{cases}$$

می‌توان از ۲ قضیهٔ فوق (*) کمک گرفت، آنها را بسط داد، باهم ترکیب نمود و ۷ رابطهٔ دیاتی دیگر برای حل مسائل بسل بدست آورد:

$$\text{①}\quad x^{\nu}J'_{\nu}(x)+\nu x^{\nu-1}J_{\nu}(x)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\text{②}\quad x^{-\nu}J'_{\nu}(x)-\nu x^{-\nu-1}J_{\nu}(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

با توجه به رابطهٔ ① و ② میتوان $J'_{\nu}(x)$ را بصورت ③ و ④ بیان کرد:

$$\text{③}\quad J'_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$\text{④}\quad J'_{\nu}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu+1}(x)$$

با جمع کردن ③ و ④ و تقسیم بر دو، $J'_{\nu}(x)$ می‌شود:

$$\text{⑤}\quad J'_{\nu}(x)=\frac{J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)}{2}$$

با کم نمودن ④ از ③ به یک رابطهٔ بازگشتی می‌رسیم:

$$\text{⑥}\quad J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

رابطهٔ فوق را میتوان بصورت مقابل نوشت:

$$\text{⑦}\quad J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu-1}(x)$$

مثال: $J_{4}(ax)$ را بر حسب $J_{0}(ax)$ و $J_{1}(ax)$ حساب کنید؟

با استفاده از رابطهٔ ⑦ داریم :

$$J_4(ax) = \frac{6}{ax}J_3(ax) - J_2(ax) = \frac{6}{ax}\left[\frac{4}{ax}J_2(ax) - J_1(ax)\right] - \left(\frac{2}{ax}J_1(ax) - J_0(ax)\right) =$$

$$\frac{6}{ax}\left[\frac{4}{ax}\left(\frac{2}{ax}J_1(ax) - J_0(ax)\right) - J_1(ax)\right] - \frac{2}{ax}J_1(ax) + J_0(ax) = \left(\frac{48}{a^3x^3} - \frac{8}{ax}\right)J_1(ax) - \left(\frac{24}{a^2x^2} - 1\right)J_0(ax)$$

تمرین : نشان دهید که *

⑧ $$\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)\right] = x\left[J_\nu^2(x) - J_{\nu+1}^2(x)\right]$$

اگر قضایای * را که مبنی بر مشتق گیری بودند بصورت فرمولهای انتگرالی بنویسیم آنگاه داریم :

⑨ $$\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

⑩ $$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$

به عنوان دو حالت خاص ولی پرکاربرد، یکبار $\nu=1$ قرار می‌دهیم و در رابطهٔ ⑨ می‌گذاریم آنگاه داریم :

⑪ $$\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x) + C$$

و یکبار $\nu=0$ قرار می‌دهیم و در رابطهٔ ⑩ قرار می‌دهیم :

⑫ $$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + C$$

مثال : $$\int J_3(x)\,dx = ?$$ *

مثال : اگر بدانیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}\varphi\,d\varphi = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ نشان دهید که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sin x}{x}$$

توابع بسل کروی : ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را بیان می‌کنیم

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + 2z\frac{dw}{dz} + \left[z^2 - n(n+1)\right]w = 0 \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

معادلهٔ فوق، معادله‌ای می‌باشد که در هنگام حل معادلات موج در مختصات کروی به روش جداسازی متغیرها حاصل می‌شود. با بکار گرفتن تبدیل $W(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,u(z)$ با جایگذاری داریم :

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left[z^2 - (n+\tfrac{1}{2})^2\right]u = 0$$

Subject
Date

دو جواب مستقل خطی معادلهٔ فوق خواهد شد:

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$ تابع بسل کروی نوع اول از مرتبهٔ n

$$y_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(z)$$ تابع بسل کروی نوع دوم از مرتبهٔ n (نیومن کروی)

مشابه توابع هنکل استاندارد، توابع هنکل کروی نوع اول و دوم نیز میتوان تعریف نمود:

$$h_n^1(z)=j_n(z)+j\,y_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^1_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

$$h_n^2(z)=j_n(z)-j\,y_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^2_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

توابع لژاندر: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0 \qquad m\in Z \qquad l=cte$$

دو جواب مستقل خطی معادلهٔ فوق (لژاندر):

$\underbrace{P_l^m(z)}_{\text{تابع نوع اول درجهٔ } l \text{ و مرتبهٔ } m}$, $\underbrace{Q_l^m(z)}_{\text{تابع نوع دوم درجهٔ } l \text{ و مرتبهٔ } m}$

پاسخ کلی معادلهٔ فوق می شود:

$$w(z)=a_{ml}P_l^m(z)+b_{ml}Q_l^m(z)$$

حالت خاص $m=0$ $\Rightarrow$ $(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+l(l+1)w=0$

۲ جواب مستقل $\begin{cases}P_l(z)\\ Q_l(z)\end{cases}$ $\Rightarrow w(z)=a_\nu P_\nu(z)+b_l Q_l(z)$

if $\nu=l\in Z$ $\Rightarrow$ $P_\nu^m(z)=P_n(z)$ را می توان بصورت یک سری محدود که چند جمله ای های لژاندر درجهٔ n و مرتبهٔ m نامیده می شود نمایش داد.

بطور مشابه برای $Q_l(z)$ نیز همین موضوع را می توان بیان کرد.

Subject
Date

توابع لژاندر نوع اول: چند جمله ای های لژاندر چنین تعریف می شوند

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

if $n=\text{even} \Rightarrow M=n/2$ if $n=\text{odd} \Rightarrow M=\frac{n-1}{2}$

به کمک فرمول رودریگس داریم:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

مثال: $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ و ...

مقادیر خاص چند جمله ای های لژاندر:

$$P_n(0)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times n} & n \text{ زوج}\\ 0 & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$P'_n(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times n}{2\times4\times6\times\cdots\times(n-1)} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$P_n(1)=1$ $P'_n(1)=\frac{n(n+1)}{2}$ $P_n(-1)=(-1)^n=\cos n\pi$ $P'_n(-1)=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

خواص تقارن: $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$ $P'_n(-x)=(-1)^{n+1}P'_n(x)$

روابط بازگشتی:

$$P_n(x)=\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) \qquad n\geq 2$$

$$P'_n(x)=\frac{n}{1-x^2}\left[P_{n-1}(x)-xP_n(x)\right] \qquad |x|\neq 1$$

$$P'_n(x)=\frac{n+1}{1-x^2}\left[xP_n(x)-P_{n+1}(x)\right] \qquad |x|\neq 1$$

$$P'_n(x)=\frac{1}{x}P'_{n-1}(x)+\frac{n}{x}P_n(x) \qquad x\neq 0$$

تعامد توابع لژاندر:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \qquad \delta_{nm}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

یکی از کاربردهای تعامد، محاسبهٔ ضرایب سری فوریه - لژاندری باشد. به معادلهٔ زیر دقت کنید:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \qquad -1<x<1 \qquad\qquad A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

توابع لژاندر درجهٔ n مرتبهٔ m بصورت زیر قابل بیان است:

$$P_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

مثال: $n=1, m=1 \longrightarrow P_1^1(x)=-(1-x^2)^{1/2}$ ، $n=2, m=1 \longrightarrow P_2^1(x)=-3x(1-x^2)^{1/2}$

$$n=2, m=2 \longrightarrow P_2^2(x)=3(1-x^2)$$

روابط تعامد:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^{-m}(x)\,dx=(-1)^m\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'} \quad / \quad \int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^{m'}(x)(1-x^2)^{-1}\,dx=\frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mm'}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^{-m'}(x)(1-x^2)^{-1}\,dx=(-1)^m\frac{1}{m}\delta_{mm'} \quad / \quad \delta_{nn'}=\begin{cases}1 & n=n'\\ 0 & n\neq n'\end{cases} \quad / \quad \delta_{mm'}=\begin{cases}1 & m=m'\\ 0 & m\neq m'\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'} \quad / \quad \int_{0}^{\pi} P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n^m(x) \\ A_n=\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_n^m(x)\,dx \end{cases} \longrightarrow$$ سری فوریه - لژاندر

۳۰ مثال: توزیع دمای معلوم $u=f(\theta)$ را روی تمام سطح کره ای به شعاع a در نظر بگیرید. دمای حالت مانا را در هر نقطهٔ کره بدست آوریم؟

با توجه به تابع u برای نشان دادن دما در هر نقطه باید بسط معادلهٔ لاپلاس را در مختصات کروی بنویسیم پس آن را با روش تفکیک متغیرها حل کنیم:

$$r^2\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$$

با بکار گیری تفکیک متغیرها داریم: $u = R(r)\,\Theta(\theta)$

در نهایت داریم:

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R}}_{\text{معادله اویلر}} = \underbrace{-\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}}_{\text{معادله لژاندر}} = \overbrace{n(n+1)}^{\text{عدد ثابت}}$$

* معادله اویلر: $r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$

** معادله لژاندر: $\sin\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + n(n+1)\sin\theta\,\Theta = 0$

* حل: $R(r) = Ar^n + \dfrac{B}{r^{n+1}} \longrightarrow$ برای نقاط داخل کره که $r=0$ است باید B را صفر در نظر بگیریم $\longrightarrow R(r) = Ar^n$ رفتار شعاعی تغییرات در تقاش دمایی

معادله ** که معادله لژاندر است و جوابهای آن در ۰ تا π به $P_n(\cos\theta)$ محدود هستند اما به $Q_n(\cos\theta)$ نامحدود هستند لذا فرم کلی جواب ** بصورت زیر می‌شود:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{A_n r^n}_{f(n)} P_n(\cos\theta)$$

از شرط مرزی $r=b$ داریم:

$$f(\theta) = u(b,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\cos\theta) \quad \#$$

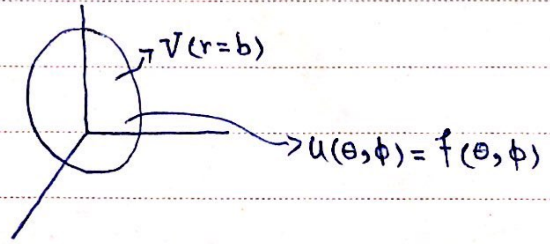
$$\Rightarrow \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta\, f(\theta)\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta\, f(\theta)\,d\theta = A_n b^n \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2n+1}{2b^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

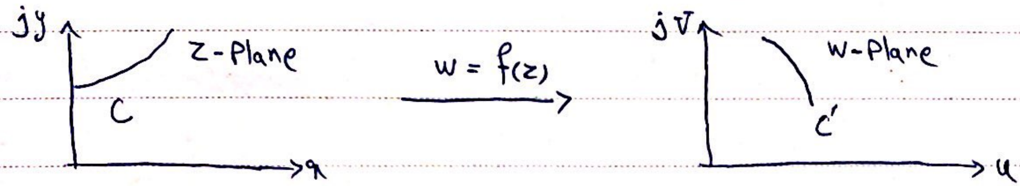
با جایگزاری A_n در # جواب نهایی بدست می‌آید.

۳۰ تمرین: حل مثال قبل با $u(\theta,\phi) = f(\theta,\phi)$



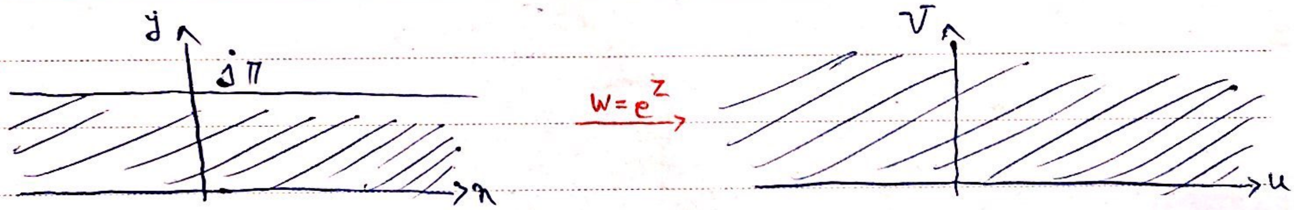
فصل ۴: استفاده از نگاشت همدیس برای حل مسائل الکترومغناطیس

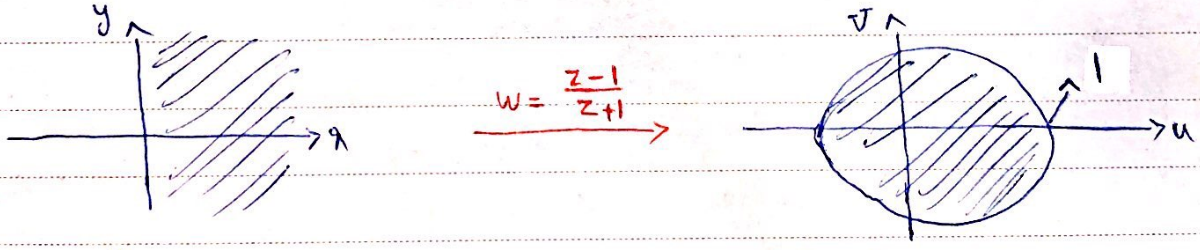
با بکارگیری نگاشت همدیس می توان یک منحنی C در صفحه ای به مانند Z را به یک منحنی C' در صفحه W می نگاریم:

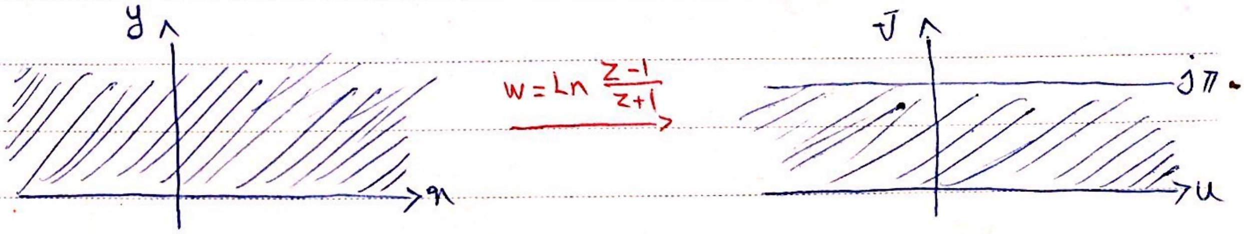


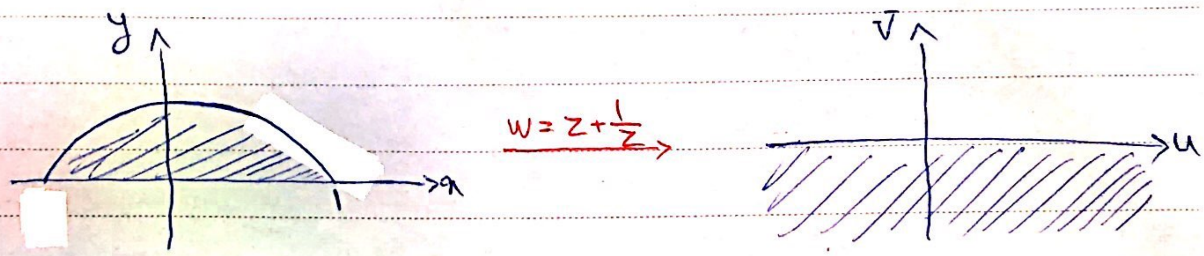
اگر تبدیل $w=f(z)$ که نقطه $z(x,y)$ را به نقطه $w(u,v)$ تبدیل می کند، تابعی تحلیلی در نقطه z باشد به نحوی که $f'(z)\neq 0$ باشد، نگاشت را همدیس (Conformal) می گویند. شرط لازم برای اینکه تابع f تحلیلی باشد آن است که در شرایط کشی-ریمان صدق کند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$





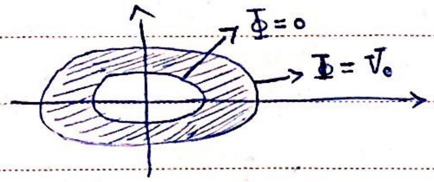




Subject

Date

مثال: پتانسیل در ناحیهٔ بین دو استوانه با سطح مقطع بیضی که در پتانسیل های هادی داخلی $\Phi = 0$ و هادی خارجی $\Phi = V_0$ قرار دارد را بیابید (از روش نگاشت همدیس)



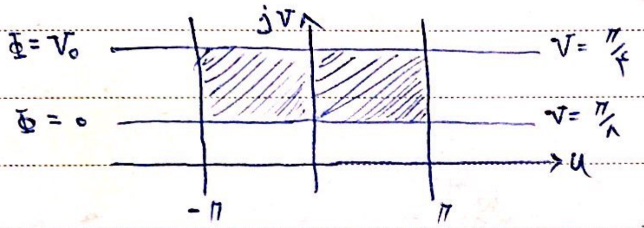
حل: با در نظر گرفتن تبدیل $W = \cos^{-1} Z$ داریم:

$$W = u + jv = \cos^{-1}(x + jy) \xrightarrow{\cos} \cos(u + jv) = x + jy \Rightarrow \begin{cases} x = \cos u \cosh v \\ y = \sin u \sinh v \end{cases}$$

با محاسبهٔ $\sin u$ و $\cos u$ از روابط بالا و با مربع کردن آنها داریم:

$$\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1 = \cos^2 u + \sin^2 u$$

به ازای v ثابت معادلهٔ بیضی را لحاظ کنید در این صورت با این نگاشت شکل بیضی تبدیل به مستطیل با شرایط مرزی می شود:



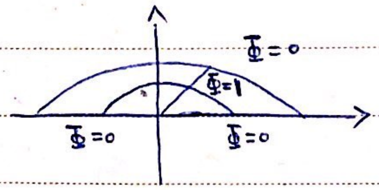
با جایگذاری BC ها

$$\begin{cases} \Phi = Av + B \\ \Phi = \frac{8}{\pi}\left(v - \frac{\pi}{8}\right) V_0 \end{cases}$$

حل معادلهٔ مربع برحسب v:

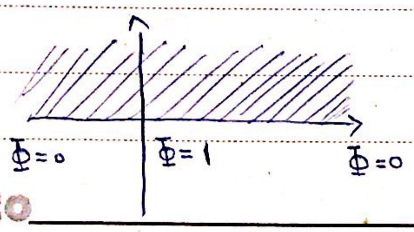
$$\Rightarrow v = \sinh^{-1}\left[\frac{y^2 + x^2 - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(y^2 + x^2 - 1)^2}{4} + y^2}\right]^{1/2}$$

تمرین: با بکارگیری نگاشت همدیس پتانسیل شکل زیر را بیابید؟



راهنمایی: $W = \ln Z = \ln r e^{j\theta} = \ln r + j\theta$

مثال: با بکارگیری نگاشت همدیس برای مسئلهٔ زیر پتانسیل را در y مثبت تعیین کنید؟



$$\xrightarrow{w = \ln\frac{Z-1}{Z+1}}$$

Subject ۱۱
Date

مثال: با بکارگیری نگاشت همدیس پتانسیل شکل زیر را بیابید؟

(تئوری تصویر)