درسنامه فصل اول

☑ **مجموعه:** به دسته مشخصی از اعداد، اشیاء یا موجودات یا ... که حداقل در یک ویژگی مشترک باشند.

☑ **عضو مجموعه:** به هر عدد یا شی موجود یا ... که در مجموعه قرار بگیرد، عضو مجموعه گویند. نماد عضو بودن $\in$ (اعضای مجموعه داخل آکولاد $\{\}$ قرار می‌گیرند) ولی عضوها نیاز به آکولاد ندارند.

مثال $\Rightarrow$ $\quad A = \{۱.۲.-۳\}$ $\quad$ $۱ \in A$ $\quad$ $۵ \notin A$

➤ $\notin$ نماد عضو نبودن.

✹✹✹ **مجموعه‌های عددی مهم:**

مجموعه اعداد طبیعی $\quad N = \{۱.۲.\cdots\}$

مجموعه اعداد حسابی $\quad W$ یا $I = \{۰.۱.۲.\cdots\}$

مجموعه اعداد صحیح $\quad Z = \{\cdots.-۳.-۲.-۱.۰.۱.۲.\cdots\}$

مجموعه اعداد گویا $\quad Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a.b \in Z.b \neq ۰\right\}$ یا

{همه اعداد کسری که صورت و مخرج آنها اعداد صحیح هستند و مخرج صفر نباشد}

مجموعه اعداد گنگ یا اَصَم $\quad Q'$ یا $Q^C =$ {همه اعداد غیرگویا}

مجموعه اعداد حقیقی $\quad R =$ {همه اعداد}

☑ **مجموعه اعداد تهی**

به مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی می‌گویند و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان می‌دهند.

☑ مجموعه اعداد متناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن محدود و قابل شمارش باشد.

☑ مجموعه اعداد نامتناهی

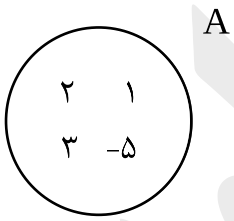
مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن نامحدود و غیرقابل شمارش باشد.

☑ صورت‌های مختلف نمایش مجموعه

۱- نمایش تفصیلی (نشان دادن عضوها): عضوهای مجموعه را داخل آکولان نشان می‌دهیم.

مثال ⇐ $A = \{۱.۲.۳.-۵\}$

۲- نمایش هندسی (نمودار وِن): عضوها را داخل یک شکل هندسی (عموماً دایره) نشان می‌دهیم.



۳- نمایش توصیفی (استفاده از علائم ریاضی):

$A = \{x|x \in N.\ x < ۵\}$

متغیر ما x است و نماد « | » را «به‌طوریکه» می‌خوانیم. یعنی مجموعه A به زبان فارسی می‌خوانیم x به‌طوریکه xهای ما عضو اعداد طبیعی هستند و xهای کوچتر از ۵ باشند. یعنی اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ که می‌شود: $\{۱.۲.۳.۴\}$

◈ زبان ساده نمایش توصیفی:

دقت کنید عزیزان من، علامت « | » یا «به‌طوریکه» را ما دیوار فرض می‌کنیم. سمت راست دیوار را پیدا می‌کنیم و در سمت چپ جای‌گذاری می‌کنیم تا عضوها را پیدا کنیم. به طور مثال:

الف) $A = \{۲x - ۱|x \in N. x < ۳\}$

سمت راست دیوار: یعنی عددهای طبیعی کوچکتر از ۳ را پیدا کن $\{۱.۲\}$

⇜ سمت چپ دیوار $۲x - ۱$ ⟵ پس عددهای طبیعی کوچکتر از ۳ را یافتیم، که شد ۱ و ۲، در سمت چپ یعنی $۲x - ۱$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x = ۱ \rightarrow (۲ \times ۱) - ۱ = ۱$$
$$x = ۲ \rightarrow (۲ \times ۲) - ۱ = ۳$$

نتیجه ⇝ $A = \{۱.۳\}$

ب) $B = \{x^۲ | x \in Z. -۲ \leq x < ۳\}$

⇜ سمت راست دیوار گفته عددهای صحیح بین ۲- تا ۳ را پیدا کن که نکته دارد:

نکته: در نماد «≤» تیک تساوی یعنی خود عدد در بازی هست.

⇜ پس ۲- در بازی هست، می‌شود ۲، ۱، ۰، ۱-، ۲- ، ولی عدد ۳ چون تیک تساوی ندارد، در بازی نیست.

حال سمت راستی‌ها را در سمت چپ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(-۲)^۲ = ۴ \qquad (-۱)^۲ = ۱ \qquad (۰)^۲ = ۰ \qquad ۱^۲ = ۱ \qquad ۲^۲ = ۴$$

نتیجه ⇝ $B = \{۱.۰.۴\}$

نکته: عضوهای تکراری را یکبار می‌نویسیم.

☑ زیرمجموعه

اگر تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B باشد، می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعه B است و با نماد $A \subset B$ نشان می‌دهیم. (نماد زیرمجموعه «⊂» شبیه حرف C انگلیسی ولی کشیده‌تر است.)

$A = \{۱.۲.۳\}$ $\qquad A \subseteq B$

$B = \{-۱.۰.۲.۳.۱.۵\}$ $\qquad B \nsubseteq A$ $\qquad$ ❉ یعنی B زیرمجموعه A نیست.

نکته: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

نکته: تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست.

✹ یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.

مثال: یک مجموعه ۴ عضوی، $۱۶ = ۲^۴$ زیرمجموعه دارد.

مثال: همه زیرمجموعه‌های $A = \{۱.\{۱\}.\emptyset\}$ را بنویسید.

❋ برای نوشتن زیرمجموعه، اول تهی و خود زیرمجموعه را می‌نویسیم، سپس تک‌عضوی و بعد دوعضوی و …

$\{\ \} / \{۱.\{۱\}.\emptyset\} / \{۱\} / \{\{۱\}\} / \{\emptyset\} / \{۱.\{۱\}\} / \{۱.\emptyset\} / \{\emptyset.\{۱\}\}$

❋ دقت کنید مجموعه A، ۳ عضوی بود و $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه داشت.

❋ زیرمجموعه نوشتن برعکس عضو باید حتماً { } داشته باشد.

❋ عضوی مثل {۱} را وقتی می‌خواهیم به صورت زیرمجموعه بنویسیم، دوباره باید داخل { } بگذاریم چون {۱} آکولادی که دارد، برای عضو هست (برای خودش) و زیرمجموعه مجدداً { } می‌خواهد.

☑ زیرمجموعه محض

به همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خودش، زیرمجموعه محض می‌گویند. پس یک مجموعه n عضوی، $۲^n - ۱$ زیرمجموعه محض دارد.

☑ مجموعۀ توان یک مجموعه

به مجموعه‌ای که اعضای آن همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد، مجموعه توان آن مجموعه گفته می‌شود.

مجموعه توان A را به صورت $P_{(A)}$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $A = \{۳.۴\}$ باشد، $P_{(A)}$ را بیابید.

$$P_{(A)} = \{\{۳\}.\{۴\}.\emptyset.\{۳.۴\}\}$$

☑ دو مجموعه مساوی

اگر عضوهای دو مجموعه مثل هم باشند، دو مجموعه برابرند.

مثال: دو مجموعه $\{x - ۱.۴\}$ و $\{۵.x + ۲y\}$ برابرند. x و y را بیابید.

حل: عدد ۴ که نمی‌تونه با ۵ برابر باشد. پس $x + ۲y = ۴$ و $x - ۱ = ۵$ هست.

$x - ۱ = ۵ \Longrightarrow \boxed{x = ۶}$

$$x + ۲\,y = ۴ \Longrightarrow ۶ + ۲\,y = ۴ \Longrightarrow ۲\,y = -۲ \Longrightarrow \boxed{y = -۱}$$

✹ تعداد مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی، برابر با $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ می‌باشد. (! ⟵ فاکتوریل)

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\ldots$$

$$k! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times k$$

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی و ۲عضوی یک مجموعه ۵عضوی را بیابید.

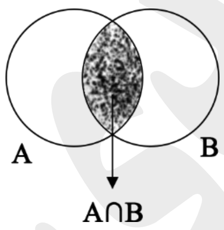
تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی از مجموعه ۵عضوی $\rightsquigarrow \dfrac{۵!}{۳!\,(۵-۳)!} = \dfrac{۵!}{۳\,!\times ۲!} = \dfrac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳\times۲\times۱\times۲\times۱} = \boxed{۱۰}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی از مجموعه ۵عضوی $\rightsquigarrow \dfrac{۵!}{۲!\,(۵-۲)!} = \dfrac{۵!}{۲!\times ۳!} = \dfrac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱} = \boxed{۱۰}$

☑ اشتراک دو مجموعه

به مجموعه‌ای که از عضوهای مشترک ۲ دو مجموعه تشکیل شود، اشتراک گویند.

❈ اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند.



مثال:

$A = \{۲.۴.-۵\}$

$B = \{۳.-۱.۲.۶\}$ $\rightsquigarrow$ $A \cap B = \{۲\}$

☑ دو مجموعه جدا از هم

اگر دو مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی اشتراک آنها تُهی باشد، دو مجموعه را جدا از هم گویند.

$A = \{۱.۵\}$
$B = \{۲.۴\}$ ⇝ $A \cap B = \emptyset$

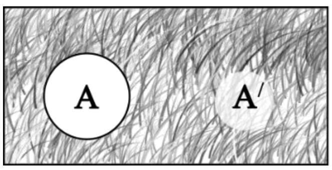
☑ مجموعه مرجع

مجموعه‌ای که شامل همه مجموعه‌ها باشد و آن را اصولاً با $\mathbf{M}$ یا $\mathbf{U}$ نشان می‌دهند.

❊ همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ مجموعه مرجع هستند.

☑ متمم یک مجموعه

متمم مجموعه‌ای مثل $\mathbf{A}$، مجموعه‌ای است که شامل تمام عضوهایی که در مجموعه مرجع هستند ولی در مجموعه $\mathbf{A}$ نیستند و آن را با A' نشان می‌دهند.



نکات مهم:

۱) متممِ متمم یک مجموعه، خود مجموعه است. $(A')' = A$

۲) $A \cup A' = M$ و $A \cap A' = \emptyset$

۳) $\emptyset' = M$ و $M' = \emptyset$

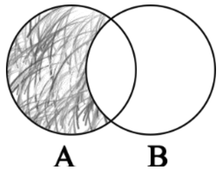
☑ تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه یعنی $A - B$: عضوهایی از مجموعه A که B درونش نباشد. یا به زبان ساده‌تر اشتراک دو مجموعه را پیدا کن، از مجموعه اول خط بزن، هرچی در مجموعه اول ماند، می‌شود جواب.

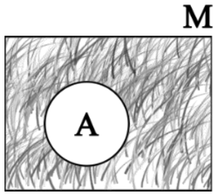
$A = \{-۲.۵.۰.۴\}$
$B = \{۱.۳.۵.۰\}$ ⇝ $A - B = \{۱.۳\}$

نکات تفاضل دو مجموعه:

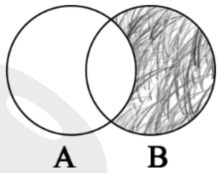
$A - B$



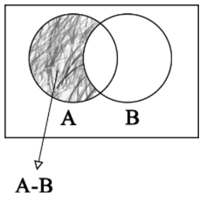
$M - A = A'$



$B - A$



$A - B = A \cap B'$



☑ اجتماع دو مجموعه

مجموعه‌ای که شامل همه عضوهای ۲مجموعه باشد.

❋ اجتماع را با نماد ∪ نشان می‌دهیم.

❋ اجتماع شبیه کاسه گدایی است، یعنی همه عضوهای ۲ مجموعه را بریز داخل یک مجموعه.

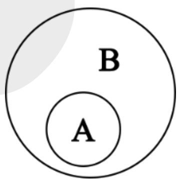
نکات واجب:

$A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

$(A \cap B) \subseteq B$ $\qquad$ $(A \cap B) \subseteq A$

$B \subseteq (A \cap B)$ $\qquad$ $A \subseteq (A \cap B)$

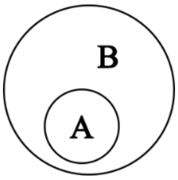
❋ اگر $A \subseteq B$ باشد، $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$



❋ **دقت:** در مجموعه‌های درون هم:

- اشتراک، مجموعه داخلی (کوچک) $\qquad$ - اجتماع، مجموعه بزرگ (خارجی)

❋ $A \subseteq B$ یعنی A درون B است.



نکته

توزیع‌پذیری اشتراک روی اجتماع ⇝ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (الف

توزیع‌پذیری اجتماع روی اشتراک ⇝ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ب

❋ **قوانین دمورگان:**

$$\begin{cases}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{cases}$$

❋ **قوانین شبه جذب:**

$$\begin{cases}A \cap (B \cup A') = A \cap B \\ A \cup (B \cap A') = A \cup B\end{cases}$$

☑ بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل

اگر حاصل یک عملیات ریاضی روی هر دو عضو از یک مجموعه، باز هم در مجموعه قرار بگیرد، می‌گوییم مجموعه نسبت به آن عمل بسته است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است، چون جمع هر دو عدد طبیعی حتماً در مجموعه قرار دارد ولی تفریق چنین نیست، مثلاً ۲− = ۳ − ۱ که عدد ۲− در مجموعه اعداد طبیعی نیست.

☑ تفاضل متقارن

به اجتماع مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ می‌گویند که با نماد $A\Delta B$ نشاد می‌دهند.

$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ یا $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

نکته

$A\Delta A = \emptyset$

$A\Delta \emptyset = A$

❈ تعداد اعضای مجموعه‌ها را با n نمایش می‌دهند.

مثلاً $n(A)$ یعنی تعداد عضوهای مجموعه A $\quad A = \{-۱.۰.۷\} \longrightarrow n(A) = ۳$

نکات

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

مثال: در یک گروه ۱۳ نفری ۷ نفر عینک می‌زنند و ۹ نفر ساعت دارند و ۵ نفر هم ساعت دارند و هم عینک می‌زنند. چند نفر نه عینک می‌زنند و نه ساعت دارند؟

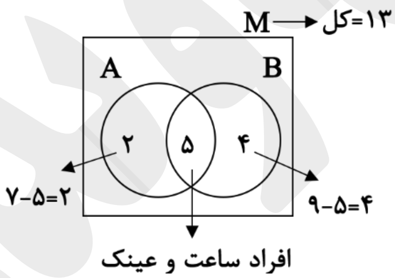
حل: افرادی که عینک می‌زنند A و ساعت دارند B ، هم ساعت و هم عینک $A \cap B$

$$n(A) = ۷ \qquad n(B) = ۹ \qquad n(A \cap B) = ۵$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۷ + ۹ - ۵ = ۱۱$$

کسای که نه عینک می‌زنند و نه ساعت دارند در اصل خارج مجموعه‌اند.

کل مجموعه ۱۳ نفر بوده $n(M) = ۱۳$ و $n(A \cup B) = ۱۱$ پس $۱۳ - ۱۱ = ۲$

راه شکل:



درسنامه فصل دوم

☑ مجموعه اعداد گویا

$$Q=\{\frac{a}{b}|a.b\in Z.b\neq ۰\}$$

☑ کسر مسلسل

برای محاسبه کسر مسلسل از کوتاهترین خط کسری شروع می‌کنیم و یادمان هست حاصل ۱ تقسیم بر هر عدد یا کسر یعنی معکوس کن.

$$\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۳-\frac{۱}{۲}}}}\rightsquigarrow ۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}\rightsquigarrow ۲+\frac{۲}{۵}=\frac{۱۲}{۵}\rightsquigarrow \frac{۱}{\frac{۱۲}{۵}}=\frac{۵}{۱۲}\rightsquigarrow ۲+\frac{۵}{۱۲}=\frac{۲۹}{۱۲}\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \frac{۱}{\frac{۲۹}{۱۲}}=\frac{۱۲}{۲۹}$$

☑ کسرهای تلسکوپی

اگر مخرج یک کسر برابر با حاصل ضرب دو عدد و صورت آن کسر، برابر با اختلاف همان ۲ عدد باشد، می‌توانیم آن را به صورت اختلاف دو کسر با صورت‌های ۱ و مخرج دو عدد بنویسیم.

$$\frac{a-b}{a\times b}=\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}$$

مثال:

$$\frac{۱}{۳\times ۴}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}$$

مثال:

$$\frac{۲}{۵\times ۷}+\frac{۲}{۷\times ۹}+\frac{۲}{۹\times ۱۱}+\cdots+\frac{۲}{۲۳\times ۲۵}=\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۲۳}-\frac{۱}{۲۵}$$

$$=\frac{۴}{۲۵}$$

☑ نوشتن کسر بین دو کسر نامساوی

بین دو کسر، بی‌شمار کسر وجود دارد که می‌توانیم ابتدا مخرج مشترک کسرها را بگیریم، سپس اگر قرار باشد m کسر بین دو کسر بنویسیم، صورت‌ها و مخرج‌ها را در $(m+۱)$ ضرب می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ سه کسر بنویسید. ⇜ $m=۳$

مخرج مشترک		ضرب در $m+۱=۴$		جواب‌ها
$\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$	⇝	$\frac{۳}{۶}\times۴=\frac{۱۲}{۲۴}$ $\frac{۲}{۶}\times۴=\frac{۸}{۲۴}$	⇝	$\frac{۹}{۲۴}.\frac{۱۰}{۲۴}.\frac{۱۱}{۲۴}$

◇ **روش تستی:** صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳} \rightarrow \boxed{\frac{۲}{۵}}$

$\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵} \rightarrow \boxed{\frac{۳}{۷}}$

$\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵} \rightarrow \boxed{\frac{۳}{۸}}$

☑ تبدیل کسر به عدد اعشاری

برای تبدیل کسر به عدد اعشاری، با تقسیم صورت بر مخرج، حاصل را پیدا می‌کنیم.

❋ **نماد اعشاری مختوم:** کسرهایی که با تقسیم صورت بر مخرج آنها، به باقی‌مانده صفر می‌رسیم.

$\frac{۱}{۴}$ ⇝

$$\begin{array}{r|l} ۱۰ & ۴ \\ \underline{-\;۸} & ۰/۲۵ \\ ۲۰ & \\ \underline{-\;۲۰} & \\ \boxed{۰۰} & \end{array}$$

کسرهایی مختوم هستند که پس از ساده شدن کسر، فقط در تجزیه مخرج عامل اول ۲ یا ۵ یا هردو را ببینیم.

مثل $\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\text{ساده}}\frac{۴}{۲۰}$ یا $\frac{۱}{۲۰}$ که $۵\times۲\times۲=۲۰$ که چون فقط عوامل ۲ یا ۵ داریم، پس مختوم هستند.

✸ **به طور خلاصه، کسرها:**

۱- مختوم: در تجزیه فقط عامل ۲ یا ۵ داریم. ⟵ اعشار باقی مانده صفر

۲- متناوب ساده در تجزیه اصلاً ۲ یا ۵ ندارم. ⟵ بلافاصله بعد از ممیز، دوره گردش

۳- متناوب مرکب در تجزیه کنار ۲ یا ۵، عامل‌های اول دیگری داریم. ⟵ بلافاصله گردش نداریم.

☑ تبدیل اعداد اعشاری به کسر

❊ اگر عدد اعشاری <u>تحقیقی</u> باشد، تبدیل ساده است.

$$\frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

$$\frac{۱۸}{۱۰۰} = ۰/۱۸$$

❊ اگر عدد اعشاری متناوب ساده باشد:

ابتدا برای عدد اعشاری، نام‌گذاری می‌کنیم و طرفین را در عددی ضرب می‌کنیم تا یک دوره کامل تناوب از ممیز خارج شود. سپس تساوی‌ها را از هم کم می‌کنیم.

مثال: $۳/\overline{۱۸}$

حل:

$$A = ۳/۱۸۱۸\ldots \xrightarrow{\times ۱۰۰} ۱۰۰\,A = ۳۱۸/۱۸\ldots \rightsquigarrow ۱۰۰\,A - A = ۳۱۸/۱۸\ldots - ۳/۱۸\ldots$$

$$۹۹\,A = ۳۱۵ \rightsquigarrow A = \frac{۳۱۵}{۹۹} = \frac{۳۵}{۱۱} \rightsquigarrow \boxed{A = \frac{۳۵}{۱۱}}$$

❊ اگر متناوب مرکب باشد:

ابتدا نام برای عدد اعشاری انتخاب می‌کنیم. سپس طرفین را در عددی ضرب می‌کنیم که اعداد غیرتکراری از ممیز خارج شود. در نهایت مثل متناوب ساده عمل می‌کنیم.

مثال: $۰/۱۲\overline{۳۴} \rightarrow ۰/۱۲۳۴۳۴$

حل:

$$B = ۰/۱۲\overline{۳۴} \rightsquigarrow \begin{cases} ۱۰۰\ B = ۱۲/\overline{۳۴} \\ ۱۰۰۰۰\ B = ۱۲۳۴/\overline{۳۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۹۹۰۰\ B = ۱۲۳۴ - ۱۲ \rightsquigarrow B = \frac{۱۲۲۲}{۹۹۰۰} =$$

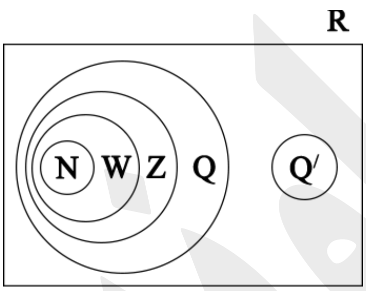
$$\rightsquigarrow \boxed{B = \frac{۶۱۱}{۴۹۵۰}}$$

☑ مجموعه اعداد گویا یا اَصَم (Q^C یا Q')

به همه اعداد غیرگویا، اَصَم می‌گویند.مثل عددهایی که جذر کامل ندارند، مثل محورهای اعشاری که ارقام آنها بدون تکرار و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مانند π یا $\sqrt{۵}$

☑ مجموعه اعداد حقیقی

شامل همه اعداد است و با R نشان می‌دهند.



$$Q \cup Q' = R$$

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

❉ مجموعه اعداد گنگ و گویا اشتراک ندارند.

❉ در مجموعه‌های N و W و Z و Q چون درون هم هستند:

اشتراک = مجموعه داخلی

اجتماع = مجموعه خارجی

مثال: $N \cap Z = N$ و $W \cup Q = Q$

❉ اعداد گنگ نسبت به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم بسته نیستند. مثلاً در مجموعه اعداد گنگ، اگر دو عدد گنگ را با هم جمع کنیم، نتیجه صرفاً در مجموعه اعداد گنگ نیست. مثلاً $\sqrt{۲}$ و $۱ + \sqrt{۲}$

$$\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۲} = ۱ \rightsquigarrow \text{دیگر گنگ نیست}$$

❉ حاصل ضرب هر عدد گنگ در عدد گویا همیشه گنگ است. (گویای به غیر از صفر)

❊ حاصل جمع هر عدد گویا و عدد گنگ، حتماً گنگ است.

☑ نمایش اعداد رادیکالی بر محور

نمایش اعداد رادیکالی روی محور را سال‌های قبل آموختیم و فقط یادآور می‌شود:

برای رسم $\sqrt{a}$ها باید دو عدد پیدا کنیم که جمع آنها a شود و هر دو جذر کامل داشته باشند.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

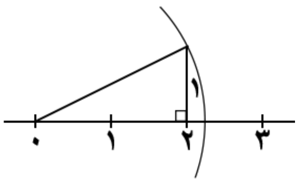
الف) $\sqrt{۵}$

- دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آنها ۵ شود و هر دو جذر داشته باشند.

مثل $۴+۱$ (جذر ۱ خود ۱ می‌شود و جذر ۴ برابر ۲ می‌باشد.)

از عددهای پیدا شده جذر می‌گیریم. عدد کمتر ← افقی و عدد بیشتر ← عمودی

- سوزن پرگار را روی نقطه مبدأ (صفر) قرار می‌دهیم و دهانه پرگار را به اندازه وتر باز می‌کنیم. و کمال می‌زنیم.

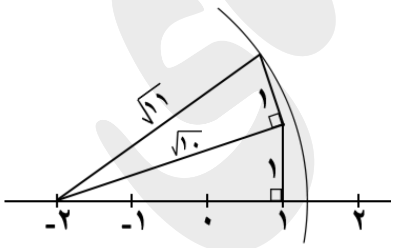


ب) -۲ $+\sqrt{۱۱}$

- (-۲) نقطه شروع، $\sqrt{۱۱}$ به راست برو

❊ دقت کنید که دو عددی که جمع آنها ۱۱ شود و هر دو جذر کامل باشند، پیدا نمی‌شود، پس می‌رویم سراغ رادیکار قبلی. $(\sqrt{۱۰})$

$۹+۱=۱۰$ که جذر ۱ خود ۱ و جذر ۹ برابر ۳ می‌باشد.



- ابتدا $\sqrt{۱۰}$ را کشیدیم سپس یک واحد سوار کردیم (به روش حلزونی) شد $\sqrt{۱۱}$ ، سوزن پرگار در نقطه شروع -۲ دهانه به اندازه وتر باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم.

☑ قدرمطلق

فاصله نمایش عدد a از مبدأ را قدرمطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ نشان می‌دهیم.

✸✸✸

- قدرمطلق صفر می‌شود صفر. $a = ۰ \rightsquigarrow |a| = ۰$

- قدرمطلق اعداد مثبت برابر خودشان هستند. $a > ۰ \rightsquigarrow |a| = a$

- قدرمطلق اعداد منفی، قرینه آنهاست. $a < ۰ \rightsquigarrow |a| = -a$

❉ برای حل قدرمطلق‌ها، کافیست یک جمله فارسی را یاد بگیریم.

ابتدا ماهیت داخل قدرمطلق را تعیین می‌کنیم. اگر مثبت بود، خود عبارت را بیرون می‌آوریم و عیناً می‌نویسیم و اگر منفی بود، <u>قرینه</u> عبارت داخل قدرمطلق را می‌نویسیم.

مثال:

$$A = \underbrace{\left|۲ - \sqrt{۱۰}\right|}_{\text{منفی} \leftarrow \text{قرینه}} - \underbrace{\left|\sqrt{۱۰} - \sqrt{۸}\right|}_{\text{مثبت} \leftarrow \text{خودش}} = -۲ + \sqrt{۱۰} - \sqrt{۱۰} + \sqrt{۸} = -۲ + \sqrt{۸}$$

❉ دقت کنید، قدرمطلق اول $۲ - ۳/۰۰$ $(\sqrt{۱۰} \approx ۳/۰۰)$ حاصل منفی شد، پس قرینه <u>عبارت داخل قدرمطلق</u> را نوشتیم و $\sqrt{۱۰} - \sqrt{۸}$ حاصل مثبت شد و خود عبارت داخل قدرمطلق را نوشتیم.

$\sqrt{۲} \approx ۱/۴$ $\quad$ $\sqrt{۵} \approx ۲/۲$ $\quad$ $\sqrt{۷} \approx ۲/۶$

$\sqrt{۳} \approx ۱/۷$ $\quad$ $\sqrt{۶} \approx ۲/۴$

نیازی نیست مقدار $\sqrt{\quad}$ها را جای‌گذاری کنیم. اینها فقط برای این هستند که تشخیص دهیم دخل قدرمطلق مثبت است یا منفی.

☟ ***نکته:*** اگر a عدد حقیقی و n زوج باشد، آنگاه داریم: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

اگر a عدد حقیقی و n فرد باشد، آنگاه داریم: $\sqrt[n]{a^n} = a$

☟ ***نکته:*** اگر از عبارتی جذر بگیریم، حتماً داخل قدرمطلق می‌نویسیم. $\sqrt{x^۲} = |x|$

نکته: مجموع هر عدد حقیقی و قدرمطلق آن، همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است.

مثال: $a + |a| \geq ۰$

نکته: قدرمطلق مجموع دو عدد، کوچکتر یا مساوی مجموع قدرمطلق آن دو عدد است.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

نکته: قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد برابر با حاصل ضرب قدرمطلق آنهاست.

$$|ab| = |a| \times |b|$$

نکته: اگر a حقیقی و مثبت باشد: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$

نکته: اگر a حقیقی و منفی باشد: $a + \frac{۱}{a} \leq -۲$

نکته: $|a| \leq b \longrightarrow -b \leq a \leq b$

$|a| \geq b \longrightarrow a \geq b$ یا $a \leq -b$

مثال: $|a| \leq ۵ \longrightarrow -۵ \leq a \leq ۵$

✸✸ جا دارد مبحثی را به صورت فارسی و روان توضیح دهم:

عزیزان، ما از عبارت توان ۲ جذر بگیریم، حتماً باید در داخل قدرمطلق بنویسیم. به دلایل زیر:

(سال‌های قبل، بعضی از اساتید می‌گفتند توان ۲ با فرجه می‌ره، این جمله از لحاظ ریاضی غلطه!!)

$$\sqrt{x^{۲}} = |x|$$

عزیزم، اگر x را عدد ۳ در نظر بگیریم، آنگاه: $\sqrt{۳^{۲}} = \sqrt{۹} = |۳|$

این درست است. اما اگر اگر x را عدد ۳− در نظر بگیریم، زیر رادیکال می‌شود ۹ که جذر ۹ می‌شود ۳، یعنی جواب رادیکال ما x که ۳− بود، نشد و شد x − یعنی قرینه ۳− . پس ما قدرمطلق را به این دلیل می‌گذاریم.

✸ ✸ عزیزان من، وقتی می‌گوییم اگر داخل رادیکال مثبت باشد، خودش می‌آید بیرون و منفی باشد، قرینه‌اش، بعضی از دوستان مثال‌های عددی که میزنیم برای تشخیص مثبت یا منفی قدرمطلق‌ها در نهایت حاصل آنها را بیرون قدرمطلق می‌نویسند. **نه!!** باید خود عبارت را بنویسیم.

مثال: اگر $x < y < ۲$ باشد، $|x - y| - |x + y|$

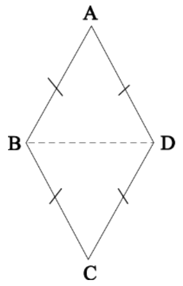
برای حل این سؤال، من برای خودم مثال می‌زنم. مثلاً $x = ۰$ و $y = ۱$ که شرط $x < y < ۲$ برقرار شود. پس داخل قدرمطلق اول منفی می‌شود و قدرمطلق دوم مثبت می‌شود. یعنی قدرمطلق اول قرینه و قدرمطلق دوم خودش:

غلط × $\underbrace{|۰ - ۱|}_{-۱} - \underbrace{|۰ + ۱|}_{۱} = +۱ - ۱ = ۰$ ⇝ راه غلط (**بی دقت ها**)

صحیح ✓ $(-x + y) - (x + y) = -x + y - x - y = -۲x$ ⇝ راه شاگردان من

درسنامه فصل سوم

۱- آیا در لوزی زاویه‌های روبرو با هم برابر هستند؟



فرض: شکل لوزی است.

حکم: زاویه‌های روبرو با هم برابرند.

استدلال: لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبرو برابرند. پس در لوزی نیز زاویه‌های روبرو برابرند.

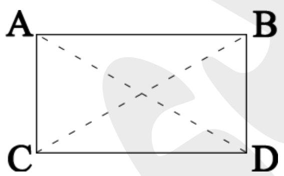
راه دوم: اثبات به روش هم نهشتی مثلث‌ها

$$\left.\begin{array}{l} AB = BD \ \text{ضلع لوزی} \\ AC = CD \ \text{ضلع لوزی} \\ BC = BC \ \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

اجزای متناظر: $\hat{A} = \hat{D}$

حال اگر لوزی را به صورت عمودی از وسط برش داده و به دو مثلث تبدیل کنیم و هم نهشتی را بنویسیم، ثابت می‌شود که زاویه $\hat{B} = \hat{C}$. در نتیجه زاویه‌های روبرو برابرند.

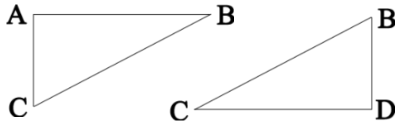
۲- ثابت کنید در مستطیل قطرها با هم برابرند.



فرض: $ABCD$ مستطیل است.

حکم: $AD = BC$

👌 ***نکته:*** دو مثلث را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که قطر BC و AD به طور کامل ضلع مثلث شوند. به طور مثال مثلث ABD با مثلث CBD یا مثلث ACD با مثلث BCD. فقط مهم این است که قطر شود ضلع مثلث.

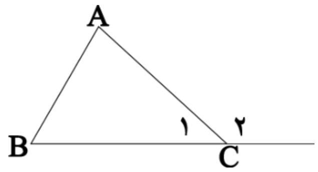


👌 ***نکته:*** هرگاه در اثبات، زاویه ۹۰ درجه را نوشتی، چک کن ببین وتر را نوشتیم یا خیر. برای اینکه اگر وتر باشد، حالت وتر و ضلع یا وتر و زاویه.

$$\left.\begin{array}{r} AB = CD \text{ طول مستطیل} \\ BD = BD \text{ ضلع مشترک} \\ ۹۰ = \hat{B} = \hat{D} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

اجزای متناظر: $AD = \mathrm{BC}$

۳- نشان دهید در هر مثلث اندازه زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور برابر است.



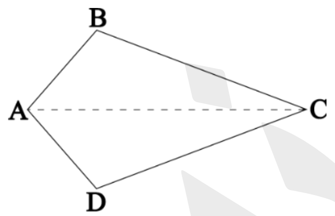
فرض: ABC مثلث و $C_۲$ زاویه خارجی.

حکم: $\widehat{C_۲} = \hat{A} + \hat{B}$

$$\left.\begin{array}{r} A + B + \widehat{C_۱} = ۱۸۰ \\ \widehat{C_۱} + \widehat{C_۲} = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \widehat{C_۲}$$

نکته: می‌دانیم در مثلث جمع زاویه‌های داخلی ۱۸۰ درجه است، می‌دانیم $C_۱$ و $C_۲$ مکمل یکدیگرند.

۴- در شکل مقابل، AC نیم‌ساز زاویه A است. ثابت کنید دو مثلث ABC و ADC هم نهشت‌اند.

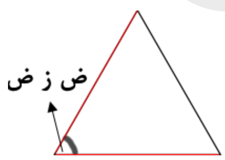


فرض: $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$ و $\widehat{C_۱} = \widehat{C_۲}$ ، چون AC نیم‌ساز است.

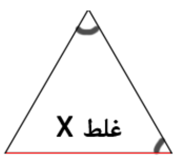
حکم: $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC}$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} \\ \widehat{C_۱} = \widehat{C_۲} \\ \mathrm{AC} = \mathrm{AC} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC}$$

نکته: در اثبات‌ها وقتی می‌گوییم ض‌زض یعنی باید دقیقاً دو ضلعی که در مثلث برای اثبات انتخاب می‌کنیم، زاویه بین آنها بیفتد یا زض‌ز باید دقیقاً دو زاویه، ضلع بین آنها باشد. در غیراینصورت غلط است.

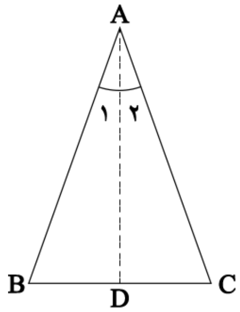


دقیقاً زاویه بین دو ضلع



ضلع بین دو زاویه قرار ندارد

۵- نشان دهید در مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌ساز وارد بر قاعده، میانه نیز هست.



فرض: $AB = AC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و $\widehat{A_{۱}} = \widehat{A_{۲}}$

حکم: $BD = DC$

➤ **میانه:** میانه ضلع مقابل را نصف می‌کند.

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \\ \widehat{A_{۱}} = \widehat{A_{۲}} \\ \text{ضلع مشترک}\ AD = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ADC}$$

اجزای متناظر: $BD = \mathrm{BC}$

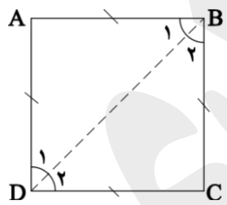
* اجزای متناظر دیگری هم داریم، مثل $\hat{B} = \hat{C}$ و $\widehat{D_{۱}} = \widehat{D_{۲}}$، ولی ما فقط $BD = \mathrm{BC}$ را نوشتیم. زیرا حکم همین را خواسته. اگر بقیه را هم بنویسیم غلط نیست.

راه حل دوم ⇝

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \\ \hat{B} = \hat{C} \\ AD = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}}$$

غلط است، زیرا زاویه $\hat{B}$ بین اضلاع AB و AD قرار نگرفته.

۶- ثابت کنید قطر مربع نیم‌ساز است.



فرض: $ABCD$ مربع

حکم: $\widehat{D_{۱}} = \widehat{D_{۲}}$ و $\widehat{B_{۱}} = \widehat{B_{۲}}$

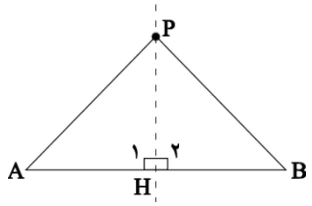
$$\left.\begin{array}{r} \text{ضلع مربع}\ \mathrm{AB} = \mathrm{DC} \\ \text{ضلع مربع}\ \mathrm{BC} = \mathrm{AD} \\ ۹۰ = \hat{A} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BDC}$$

اجزای متناظر: $\widehat{B_{۱}} = \widehat{B_{۲}}$ و $\widehat{D_{۱}} = \widehat{D_{۲}}$

در $\hat{C} = \hat{A} = ۹۰$، ۹۰ درجه را داریم، ولی وتر ننوشتیم.

پس BD نیم‌ساز است.

۷- ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.



فرض: $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ و $\mathrm{AH} = \mathrm{HB}$ چون PH عمود منصف

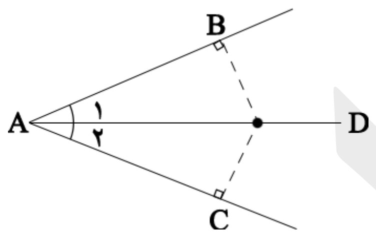
حکم: $PA = PB$

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{AH} = \mathrm{HB} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90 \\ PH = PH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{PAH} \cong \overset{\triangle}{PHB}$$

اجزای متناظر: $PA = PB$

۹۰درجه نوشتیم، چک کردیم، وتر ننوشتیم.

۸- ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



فرض: AD نیم‌ساز، پس $\leftarrow$ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ و $\hat{B} = \hat{C} = 90$

حکم: $DC = BD$

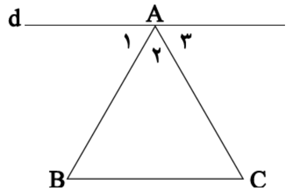
👌 ***نکته:*** در ریاضیات، فاصله نقطه از خط $\leftarrow$ خط عمود $\leftarrow$ $\hat{B} = \hat{C} = 90$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \hat{B} = \hat{C} = 90 \\ \text{ضلع مشترک } AD = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ADC}$$

اجزای متناظر: $BD = DC$

* زاویه ۹۰ درجه در اثبات نوشتیم، چک کردیم، دیدیم، وتر را هم نوشتیم (وتر ضلع مقابل زاویه ۹۰ درجه است یعنی AD) حالا برای پیدا کردن حالت دستمان را می‌گذاریم روی وتر و زاویه ۹۰ درجه. اگر ضلع ماند، می‌شود به حالت وتر و ضلع، اگر زاویه ماند می‌شود به حالت وتر و یک زاویه.

۹- ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.



فرض: ABC مثلث

حکم: $\widehat{A_2} + \hat{B} + \hat{C} = 180$

➤ از رأس A خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم و می‌دانیم $\widehat{A_۱}+\widehat{A_۲}+\widehat{A_۳}=۱۸۰$.

طبق خطوط موازی مورب (ساخت Z یا ∠ یا N یا И) می‌توانیم زاویه‌های برابر را پیدا کنیم.

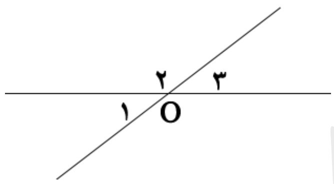
$d \parallel BC$ و $AB \not\longrightarrow \widehat{A_۱}=\hat{B}$

$d \parallel BC$ و $AC \not\longrightarrow \widehat{A_۳}=\hat{C}$

سپس جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\widehat{A_۱}+\widehat{A_۲}+\widehat{A_۳}=۱۸۰ \xrightarrow{\widehat{A_۱}=\hat{B}\ \text{و}\ \widehat{A_۳}=\hat{C}} \boxed{\hat{B}+\widehat{A_۲}+\hat{C}=۱۸۰}$$

۱۰- نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.

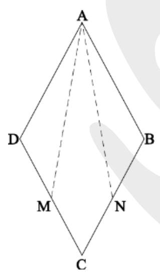


فرض: $\widehat{O_۱}+\widehat{O_۲}=۱۸۰$ و $\widehat{O_۲}+\widehat{O_۳}=۱۸۰$

حکم: $\widehat{O_۱}=\widehat{O_۳}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O_۱}+\widehat{O_۲}=۱۸۰\\ \widehat{O_۲}+\widehat{O_۳}=۱۸۰\end{array}\right\} \longrightarrow \widehat{O_۱}=\widehat{O_۳}$$

۱۱- در شکل مقابل $ABCD$ لوزی و نقطه‌های M و N وسط اضلاع CD و CB هستند. نشان دهید $\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$.



فرض: $ABCD$ لوزی است، پس $AD=AB=BC=DC$ و $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$

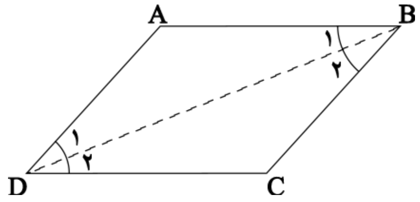
حکم: $\overset{\triangle}{\mathrm{ADM}} \cong \overset{\triangle}{\mathrm{ABN}}$

➤ وقتی دو ضلع $DC=BC$ است، پس نصفه‌های آنها نیز با هم برابرند:

$$\frac{۱}{۲}DC=\frac{۱}{۲}BC \rightsquigarrow DM=BN$$

$$\left.\begin{array}{r}AD=AB\ \text{ضلع لوزی}\\ \hat{D}=\hat{B}\\ DM=BN\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{\mathrm{ADM}} \cong \overset{\triangle}{\mathrm{ABN}}$$

۱۲- ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبرو برابرند.



فرض: $ABCD$ متوازی‌الاضلاع

حکم: $AB = DC$ و $AD = BC$

➤ متوازی‌الاضلاع دیدی، یاد خطوط موازی مورب بیفت:

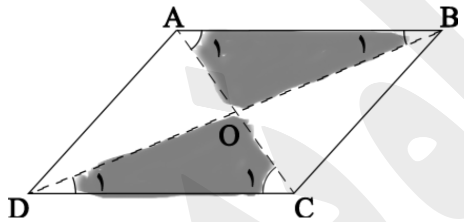
$AB \parallel DC$ و $BD / \rightsquigarrow \widehat{B}_{۱} = \widehat{D_{۲}}$

$AD \parallel BC$ و $BD / \rightsquigarrow \widehat{B}_{۲} = \widehat{D_{۱}}$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{B}_{۱} = \widehat{D_{۲}} \\ \widehat{B}_{۲} = \widehat{D_{۱}} \\ \text{ضلع مشترک } BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BDC}$$

اجزای متناظر: $\mathrm{AB} = \mathrm{DC}$ و $AD = BC$

۱۳- ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.



فرض: $ABCD$ متوازی‌الاضلاع

حکم: $OD = OB$ و $OA = OC$

➤ برای اثبات هم می‌توانیم هم‌نهشتی دو مثلث OBC و OAD را بنویسیم، هم دو مثلث OAB و ODC.

$AB \parallel DC$ و $BD / \rightsquigarrow \widehat{B}_{۱} = \widehat{D_{۱}}$

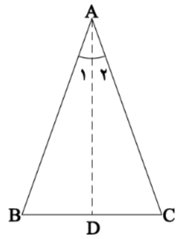
$AB \parallel DC$ و $AC / \rightsquigarrow \widehat{A_{۱}} = \widehat{C}_{۱}$

$$\left.\begin{array}{r} \text{ضلع متوازی‌الاضلاع } AB = DC \\ \widehat{B}_{۱} = \widehat{D_{۱}} \\ \widehat{A_{۱}} = \widehat{C}_{۱} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{ODC}$$

اجزای متناظر: $\mathrm{OA} = \mathrm{OC}$ و $OB = OD$

➤ دقت کنید دقیقاً دو زاویه‌ای که در اثبات نوشتم، ضلع بین آنها قرار گرفت و باز متوازی‌الاضلاع دیدم یاد خطوط موازی مورب افتادم.

۱۴- نشان دهید در مثلث متساوی‌الساقین میانه وارد بر قاعده، نیم‌ساز نیز هست. (عکس اثباتی پنج)



فرض: $AB = AC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و $BD = DC$

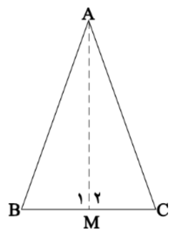
حکم: $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$

$$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BD = DC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ADC}$$

اجزای متناظر: $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$

پس AD نیم‌ساز است.

۱۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC میانه AM را رسم کرده‌ایم. چرا AM بر BC عمود است؟



فرض: $AB = AC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و $BM = MC$

حکم: $\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰$

$$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = MC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{AMC}$$

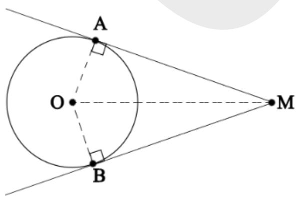
اجزای متناظر: $\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}$

نکته: دقت کنید، ما هنوز اثبات نکردیم که $\widehat{M_۱}$ و $\widehat{M_۲}$ ۹۰درجه هستند.

$$\widehat{M_۱} + \widehat{M_۲} = ۱۸۰ \xrightarrow{\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}} \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰$$

نکته: از هر نقطه خارج از دایره، فقط دو خط مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

۱۶- ثابت کنید از هر نقطه خارج دایره ۲مماس می‌توان بر دایره رسم کرد که ۲ مماس با هم برابرند.



نکته: ما فقط اثبات هم‌نهشتی یاد گرفته‌ایم، پس از نقطه M به O و A و B وصل می‌کنیم تا مثلث‌ها ایجاد شوند.

نکته: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

$$\hat{A} = \hat{B} = ۹۰$$

➤ دایره دیدیم، در اثبات یاد شعاع می‌افتیم.

$$\left.\begin{array}{r} \text{شعاع } OA = OB \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و ضلع}} \overset{\triangle}{OAM} \cong \overset{\triangle}{OBM}$$

اجزای متناظر: $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$

۹۰درجه نوشتیم، وتر چک می‌کنیم.

☑ زاویه مرکزی

زاویه‌ای که رأسش مرکز دایره و ضلع‌هایششعاع دایره هستند و مقدارش با کمان مقابلش برابر است.

نماد وتر $\overline{}$

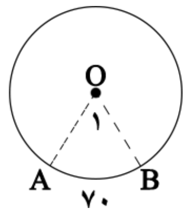
نماد کمان $\frown$

$\overline{AB}$ وتر یا ضلع AB

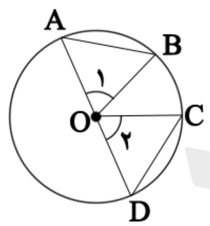
$\widehat{AB}$ کمان $\widehat{AB}$

$\widehat{O_1} = \widehat{AB}$

$\hat{O} = ۷۰^\circ$



۱۷- ثابت کنید اگر در دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر دو وتر نیز برابرند.



👌***نکته:*** دقت کنید دو وتر را موازی هم رسم نکنیم، چون می‌شود حالت خاص و باز مثلث می‌سازیم چون فقط هم‌نهشتی مثلث را یاد گرفته‌ایم.

فرض: $\overline{AB} = \overline{CD}$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

➤ دایره دیدیم، یاد شعاع می‌افتیم.

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \text{شعاع } OA = OD \\ \text{شعاع } OB = OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

اجزای متناظر:

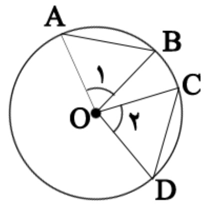
$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$
$$\hat{A} = \hat{\mathrm{D}}$$
$$\hat{B} = \hat{\mathrm{C}}$$

هنوز حکم ثابت نشده. باید ثابت کنیم کمان‌ها نیز برابرند.

➤ دقت کنید زاویه $\widehat{O_1}$ و $\widehat{O_2}$ زاویه‌های مرکزی هستند که با کمان‌های مقابلشان برابرند. $\widehat{O_1}$ زاویه مرکزی مقابل کمال AB و $\widehat{O_2}$ زاویه مرکزی مقابل کمال CD.

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \rightsquigarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۱۸- ثابت کنید در دایره اگر دو کمان برابر باشند، زاویه‌های مقابل آنها نیز برابرند.



➤ عکس اثباتی ۱۷ می‌باشد. دقت کنید ما در اثبات هم‌نهشتی‌ها حق نوشتن کمان نداریم و فقط ضلع و زاویه.

➤ مثل اثباتی ۱۷ نباید کمان‌ها را موازی هم رسم کنیم، چون می‌شود حالت خاص.

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $\overline{AB} = \overline{CD}$

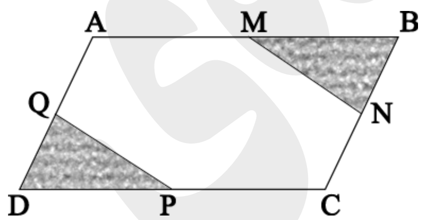
➤ وقتی دو کمان برابر باشند، زاویه‌های مرکزی مقابل آنها نیز برابرند. در نتیجه $\widehat{O_{۱}} = \widehat{O_{۲}}$

$$\left.\begin{array}{r} OA = OC \text{ شعاع} \\ OB = OD \text{ شعاع} \\ \widehat{O_{۱}} = \widehat{O_{۲}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

اجزای متناظر: $\overline{AB} = \overline{CD}$

👆 ***نکته:*** اگر در دایره دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها نیز برابرند و برعکس اگر در دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز برابرند.

۱۹- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط اضلاع متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید $MN = PQ$.



فرض: $AB = DC$ و $\widehat{A} = \widehat{C}$

$AD = BC$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$

حکم: $MN = PQ$

➤ وقتی دو ضلع متوازی‌الاضلاع با هم برابرند، پس نصفه‌های آنها نیز برابرند.

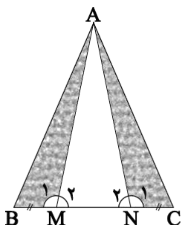
$$AB = DC \rightsquigarrow \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}DC \rightsquigarrow MB = DP$$

$$AD = BC \rightsquigarrow \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲}BC \rightsquigarrow QD = BN$$

$$\left.\begin{array}{c} QD = BN \\ MB = DP \\ \widehat{D} = \widehat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{MNB} \cong \overset{\triangle}{QDP}$$

اجزای متناظر: $\boxed{QM = MN}$

۲۰- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM = NC$. نشان دهید مثلث AMN متساوی‌الساقین است.



فرض: $AB = AC$ و $\widehat{B} = \widehat{C}$ و $BM = NC$

حکم: AMN متساوی‌الساقین، پس $\widehat{M} = \widehat{N}$ و $AM = AN$

$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \\ \widehat{B} = \widehat{C} \\ BM = NC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ANC}$$

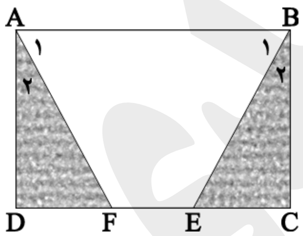
اجزای متناظر: $\boxed{AM = AN}$ و $\widehat{M_۱} = \widehat{N_۱}$

❋ $AM = AN$ در حکم هست. ولی $\widehat{M_۱} = \widehat{N_۱}$ در حکم نیست. ما باید ثابت کنیم $\widehat{M_۲} = \widehat{N_۲}$.

➤ دقت کنید، وقتی اجزای متناظر را می‌نویسیم ولی در حکم نیست، باید ادامه دهیم.

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{M_۱} + \widehat{M_۲} = ۱۸۰ \\ \widehat{N_۱} + \widehat{N_۲} = ۱۸۰ \end{array}\right\} \rightsquigarrow \boxed{\widehat{M_۲} = \widehat{N_۲}}$$

۲۱- در مستطیل $ABCD$، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه $\widehat{A_۱}$ و $\widehat{B_۱}$ برابرند. ثابت کنید $AF = BE$.



فرض: $ABCD$ مستطیل و $\widehat{A_۱} = \widehat{B_۱}$

حکم: $AF = BE$

➤ دقت کنید، اینجا برعکس اثباتی ۲۰، زاویه $\widehat{B_۱}$ و $\widehat{A_۱}$ درون مثلث نیست و برای اثبات نمی‌توانیم بنویسیم. پس:

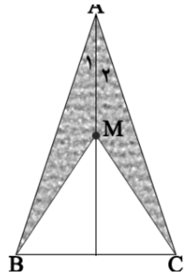
$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A_۱} + \widehat{A_۲} = ۹۰ \\ \widehat{B_۱} + \widehat{B_۲} = ۹۰ \end{array}\right\} \rightsquigarrow \boxed{\widehat{A_۲} = \widehat{B_۲}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{عرض مستطیل } AD = BC \\ \widehat{D} = \widehat{C} = ۹۰ \\ \widehat{A_۲} = \widehat{B_۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{BEC}$$

اجزای متناظر: $\boxed{BE = AF}$

۹۰ ننوشتیم وتر چک می‌کنیم.

۲۲- نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیم‌ساز زاویه رأس از دو سر قاعده به یک فاصله است.



فرض: $AB = AC$ و $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

حکم: $BM = MC$

$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \text{ضلع مشترک } AM = AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC}$$

اجزای متناظر: $\boxed{BM = MC}$

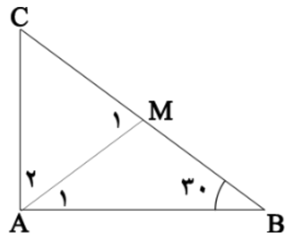
نکات

- در اثبات هم‌نهشتی‌ها همیشه فرض (داده مسأله) و حکم (خواسته مسأله) را بنویسید.
- اگر دایره دیدیم یاد شعاع دایره بیفت و در اثبات استفاده می‌کنیم.
- مستطیل، مربع و لوزی یاد خواصشان می‌افتیم.
- متوازی‌الاضلاع دیدیم، یاد خطوط موازی مورب بیفت و با استفاده از قوانین Z و N زاویه‌های برابر را پیدا کن.
- در اثبات‌ها اگر با نوشتن اجزای متناظر به حکم رسیدیم که تمام، در غیراین‌صورت ادامه می‌دهیم تا به حکم برسیم.
- حواسمان باشد در اثبات باید حتماً دو ضلع و زاویه بین، دقیقاً زاویه بین دو ضلع باشد.

- در اثبات‌ها، اگر زاویه ۹۰درجه دیدیم، حتماً باید چک کنیم ببینیم وتر را نوشتیم یا نه، اگر وتر ننوشته باشیم، همان حالت‌های ض‌ض‌ض یا زض‌ز می‌شود اما اگر در اثبات وتر را نوشته باشیم، چک می‌کنیم ببینیم به حالت وتر و ضلع هست یا وتر و زاویه. برای این کار دست می‌گذاریم روی زاویه ۹۰درجه و وتر اگر ضلع نوشته بودیم می‌شود وتر و ضلع اما اگر زاویه را نوشته بودیم، می‌شود وتر و زاویه.

➤ در اثبات‌ها حواسمان باشد ما کمان نداریم. باید زاویه مقابل کمان‌ها را بنویسیم.

➤ در اثبات مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبرو به زاویه ۳۰درجه نصف وتر می‌باشد.



اثبات:

فرض: $\hat{A} = ۹۰$ و $\hat{B} = ۳۰$

حکم: $AC = \frac{BC}{۲}$

میانه AM را رسم می‌کنیم.

$AM = BM = MC$

$\hat{C} = ۱۸۰ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = ۱۸۰ - (۹۰ + ۳۰) = ۶۰°$

$AM = MC \rightsquigarrow \widehat{A_۲} = \hat{C} = ۶۰$

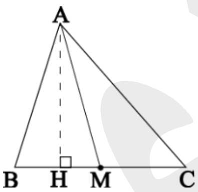
$\widehat{M_۱} = ۱۸۰ - \left(\widehat{A_۲} + \hat{C}\right) = ۱۸۰ - (۶۰ + ۶۰) = ۶۰ \rightsquigarrow$

$AC = AM = MC \rightsquigarrow \boxed{AC = \frac{BC}{۲}}$

➤ در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

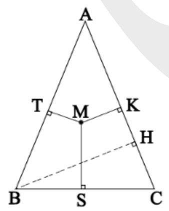
➤ **میانه:** خطی است که از یک رأس به وسط ضلع روبرو وصل می‌شود.

هر میانه مثلث، مساحت آن را نصف می‌کند.



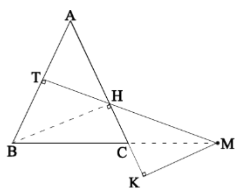
$S_{ABM} = S_{AMC}$

➤ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده مثلث‌متساوی‌الساقین از دوساق برابراست‌با طول ارتفاع وارد بر ساق.



$MK + MT = BH$

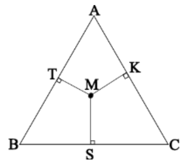
اگر نقطه M روی امتداد BC باشد:



$MT - MK = BH$

➤ اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع a باشد، ارتفاع‌های آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و مساحت آن $\frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}$ می‌شود.

➤ مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر است با ارتفاع مثلث.



$$MK + MT + MS = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$

➤ محل برخورد عمودمنصف‌ها از هر رأس به یک فاصله است.

الف) اگر هر سه زاویه تند باشد، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها داخل مثلث است.

ب) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها وسط وتر می‌باشد.

ج) اگر مثلث زاویه باز داشته باشد، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها خارج مثلث می‌شود.

☑ تشابه

هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، دو چند ضلعی با هم متشابه‌اند.

➤ به نسبت ضلع‌های متناسب دو شکل متشابه، «**نسبت تشابه**» می‌گوییم.

☑ تشابه مثلث‌ها

۱) اگر در دو مثلث دو زاویه برابر باشند، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

۲) اگر در دو مثلث دو ضلع متناسب باشند و زاویه بین آنها با هم برابر باشد، حتماً دو مثلث متشابه‌اند.

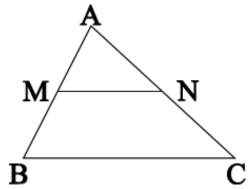
۳) اگر هر سه ضلع دو مثلث متناسب باشند، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

☑ قضیه تالس

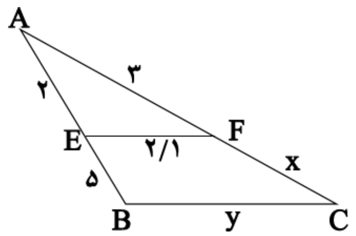
اگر MN موازی BC باشد، $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه‌اند. پس داریم:

جزء به کل: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

جزء به جزء: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$



مثال: در شکل روبرو $x + y$ را بیابید. ($EF \parallel BC$)



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \rightsquigarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{x} \rightsquigarrow ۲\,x = ۱۵ \rightsquigarrow \boxed{x = ۷/۵}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \rightsquigarrow \frac{۲}{۷} = \frac{۲/۱}{y} \rightsquigarrow ۲\,y = ۱۴/۷ \rightsquigarrow \boxed{y = ۷/۳۵}$$

$$x + y = ۷/۵ + ۷/۳۵ = \boxed{۱۴/۸۵}$$

➤ اگر هر چند ضلعی با نسبت k متشابه باشند، محیط آنها نیز با نسبت k متشابه است ولی نسبت مساحت‌های آنها برابر با $k^{۲}$ می‌باشد.