قضیه ۳.۱ تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر a تقریبی از نقطه x باشد، آن گاه خطای نسبی $f(a)$ برابر است با:

$$\delta(f(a)) = \left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right| \delta(a)$$

یعنی خطای نسبی $f(a)$ برحسب خطای نسبی a محاسبه می‌شود.

۶.۱ خطای توابع n متغیره

تابع n متغیره $f(x_1, \cdots, x_n)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ تقریبی از نقطه $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ باشد و $e_a = \max\limits_{1 \le i \le n} e_{a_i}$ در این صورت

$$
\begin{aligned}
&|f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(a_1, \cdots, a_n)| \\
&\qquad \le e_a \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n) \right| \right]
\end{aligned}
$$

مثال ۹.۱ با استفاده از تابع xy^2z^3 حداکثر خطای مطلق در محاسبه $\frac{5}{6}\pi^2 e^3$ را به دست آورید. (اعداد را با تقریب ۳ رقم اعشار در نظر بگیرید).

حل : تابع $f(x, y, z) = xy^2z^3$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه $\frac{5}{6}\pi^2 e^3$ بایستی $f\left(\frac{5}{6}, \pi, e\right)$ را محاسبه کنیم. اگر a، b و c تقریبی از $\frac{5}{6}$، π و e تا ۳ رقم اعشار باشند، آن گاه

$$a = ۰/۸۳۳ \quad , \quad b = ۳/۱۴۲ \quad , \quad c = ۲/۷۱۸$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲ z^۳\Big|_{(a,b,c)} = ۱۹۸/۲۲۶$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = ۲xyz^۳\Big|_{(a,b,c)} = ۱۰۵/۱۰۶$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = ۳xy^۲ z^۲\Big|_{(a,b,c)} = ۱۸۲/۲۵۴$$

$$|f(x,y,z) - f(a,b,c)| \leq ۵ \times ۱۰^{-۴}[۱۹۸/۲۲۶ + ۱۰۵/۱۰۶ + ۱۸۲/۲۵۴]$$
$$= ۰/۲۴۳$$

توجه کنید که $e_a = e_b = e_c = ۵ \times ۱۰^{-۴}$ چون اعداد تا ۳ رقم اعشار گرد شده‌اند.

فصل ۲

حل معادلات یک متغیره

هدف کلی در این بخش پیدا کردن ریشه معادله $f(x)=0$ است. از لحاظ هندسی ریشه $f(x)=0$ محل برخورد نمودار $f(x)$ با محور x ها است.

ریشه‌های یک معادله، در حالت کلی به طور دقیق به ندرت قابل تعیین هستند. لذا، روش‌های عددی برای محاسبه ریشه‌های معادله به کار گرفته می‌شوند. برای تعیین ریشه‌های یک معادله دانستن حدود ریشه و یا حتی تقریبی نزدیک به هر یک از ریشه‌های معادله لازم است. لذا ابتدا روش‌های تعیین تعداد و حدود ریشه‌های حقیقی یک معادله را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس روش‌های تعیین تقریبی از هر یک از ریشه‌ها با دقت خواسته شده را به دست می‌آوریم.

۱.۲ تعداد و حدود ریشه‌ها

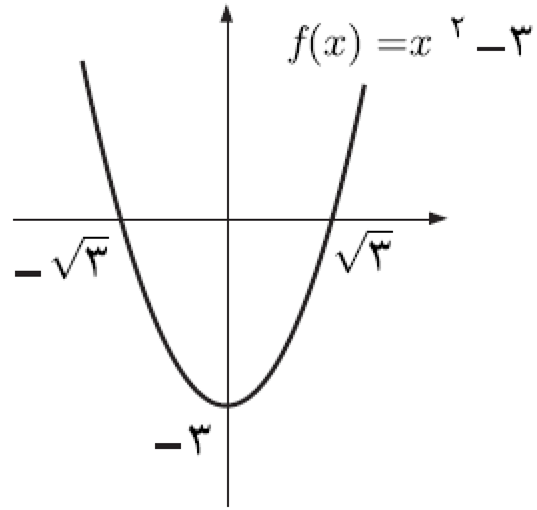
برای تعیین تعداد و حدود ریشه‌ها دو روش بیان می‌کنیم.

(الف) رسم منحنی

در این روش نمودار $y = f(x)$ در صورت امکان، رسم می‌شود. طول نقاط برخورد این نمودار با محور x ها ریشه‌های $f(x) = 0$ هستند. رسم نمودار $f(x)$ در حالت کلی ساده نیست ولی می‌توان نمودار آن را در بازه‌های محدود توسط کامپیوتر رسم کرد.

مثال ۱.۲ تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادله $f(x) = x^۲ - ۳$ را بیابید.

حل : معادله دارای ۲ ریشه $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ می‌باشد.



شکل ۱.۲

گاهی اوقات می‌توان معادله $f(x) = ۰$ را به صورت $f_۱(x) = f_۲(x)$ نوشت. در این صورت با رسم نمودار منحنی‌های

$$y_۲ = f_۲(x) \qquad , \qquad y_۱ = f_۱(x)$$

کافی است x هایی را تعیین کنیم که به ازای آن‌ها $y_۲ = y_۱$.

ب) جدول‌بندی مقادیر تابع

در این روش می‌توان ریشه‌هایی را که تابع $f(x)$ در دو طرف آن تغییر علامت می‌دهد پیدا کرد. قابل ذکر است که اساس این روش استفاده از قضایای زیر است.

قضیه ۱.۲ مقدار میانی در پیوستگی

اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و m مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آن گاه حتماً عددی مانند c بین a و b هست به طوری که $f(c)=m$.

نتیجه ۲.۲ اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند در این صورت $f(x)$ بین a و b ریشه دارد. یعنی عددی مانند c بین a و b هست که مقدار f در آن صفر شود و اگر $f(x)$ یکنوا باشد آن ریشه منحصر به فرد است.

قضیه ۳.۲ (قضیه رُل)

اگر $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. ضمناً $f(a)=f(b)=0$ آن گاه عددی مانند c بین a و b هست به طوری که $f'(c)=0$.

تذکر: در قضیه رل حتماً لازم نیست $f(a)=f(b)=0$ همین که این دو مقدار با هم مساوی باشند کافی است.

تعریف ۱.۲ فرض کنید $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ به طوری که $g(\alpha)\neq 0$ و $m\in\mathbb{N}$ اگر $m>1$ باشد α را ریشه تکراری مرتبه m معادله $f(x)=0$ گوییم. اگر $m=1$ باشد α را ریشه ساده معادله $f(x)=0$ می‌گوییم.

۲.۲ روش دوبخشی (روش تنصیف)

در این روش فرض می‌کنیم دو عدد a و b موجودند به قسمی که

الف) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

ب) $f(a)f(b) < ۰$

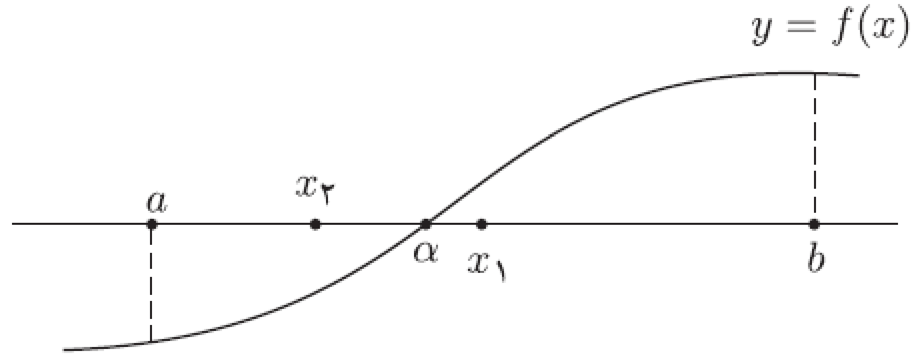
ج) معادله $f(x) = ۰$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را α می‌نامیم).

با مفروضات بالا دنباله $\{x_n\}$ را چنان می‌سازیم که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. برای این منظور، مطابق شکل ۶.۲، بازه $[a,b]$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم

$$x_۱ = \frac{a+b}{۲}$$

به عبارت دیگر، $x_۱$ را وسط بازه $[a,b]$ می‌گیریم تا $[a,b]$ به دو بخش $[a,x_۱]$ و $[x_۱,b]$ تقسیم شود. با توجه به شرط (ج)، α در یکی از این دو بخش قرار دارد. بخشی که α در آن قرار دارد اختیار و مجدداً آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمه حاوی α را اختیار

می‌کنیم (در شکل ۶.۲، بازه $[a, x_1]$ را اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$) و این عمل را همین طور ادامه می‌دهیم.



شکل ۶.۲

اما در حالت کلی، رسم منحنی میسر نیست و می‌توان برای ادامه کار به طریق جبری زیر عمل کرد:

۱) اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آن گاه ریشه در $[a, x_1]$ است. لذا می‌توان قرار داد $b = x_1$ و مجدداً عمل را در $[a, b]$ تکرار کرد.

۲) اگر $f(a)f(x_۱) > ۰$ آن گاه ریشه در $[x_۱, b]$ است. لذا می‌توان قرار داد $a = x_۱$ و مجدداً عمل را در $[a, b]$ تکرار کرد.

۳) اگر $f(a)f(x_۱) = ۰$ آن گاه ریشه $x_۱$ است و عمل خاتمه پیدا می‌کند.

به این ترتیب دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ ساخته می‌شود. البته عملاً نمی‌توان بی‌نهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات وجود داشته باشد.

مثال ۶.۲ می‌دانیم که معادله $x + \cos x = ۰$ فقط یک ریشه در $(-۱, ۰)$ دارد. تقریبی از این ریشه را به روش دوبخشی حساب کنید.

حل : جدول زیر محاسبات مربوطه را نشان می‌دهد. در این مثال، $a = -۱$، $b = ۰$، $f(a) = -۰/۴۶\ (۲D)$ و $f(b) = ۱$.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(x_n)$
۱	-۱	۰	$-۰/۵$	$+$
۲	-۱	$-۰/۵$	$-۰/۷۵$	$-$
۳	$-۰/۷۵$	$-۰/۵$	$-۰/۶۲۵$	$+$
۴	$-۰/۷۵$	$-۰/۶۲۵$	$-۰/۶۸۷۵$	$+$
۵	$-۰/۷۵$	$-۰/۶۸۷۵$	$-۰/۷۱۸۷۵$	$+$
۶	$-۰/۷۵$	$-۰/۷۱۸۷۵$	$-۰/۷۳۴۳۷۵$	$+$

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می‌شود و همواره $a < b$.

مثال ۷.۲ تقریبی از یک ریشه معادله $۳xe^x = ۱$ را تا سه رقم اعشار درست به روش دوبخشی حساب کنید.

حل : معادله فوق را به صورت $f(x) = ۳x - e^{-x} = ۰$ می‌نویسیم. واضح است که ریشه‌های دو معادله یکسان هستند. پس از جدول‌بندی مقادیر f در می‌یابیم که f در بازه $(۰/۲۵, ۰/۲۷)$ تغییر علامت می‌دهد و با توجه به اکیداً صعودی بودن f معادله تنها یک ریشه دارد. جدول زیر تقریبی از ریشه را تا سه رقم اعشار درست به دست می‌دهد.

در این جدول،

$$a = ۰/۲۵ \quad f(a) = -۰/۰۲۸۸ \ \ (۴D)$$

$$b = ۰/۲۷ \quad f(b) = -۰/۴۶۶۲ \ \ (۴D)$$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	$f(a)f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	$-$
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	$+$
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	$+$
۴	۰٫۲۵۷۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۸۸	$-$
۵	۰٫۲۵۷۵	۰٫۲۵۸۸	۰٫۲۵۸۲	$-$
۶	۰٫۲۵۷۵	۰٫۲۵۸۲	۰٫۲۵۷۸۵	

ازاین رو، ریشه تا سه رقم اعشار برابر ۰٫۲۵۸ است.