فصل ۳ درون‌یابی

در ریاضیات معمولاً با توابعی سر و کار داریم که با یک یا چند ضابطه تعریف شده‌اند یعنی به ازای هر مقدار متغیر، دستوری برای تعیین مقدار تابع داده شده است. اما در عمل به ندرت با چنین وضعی روبرو می‌شویم. اکثرا توابعی که باید مورد بررسی قرار گیرند مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیر، آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه‌گیری به زحمت قابل تعیین است. فرض کنید مقادیر تابع f به ازای نقاط دوبه‌دو متمایز $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ به ترتیب عبارتند از $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$. چنین تابعی را تابع جدولی می‌نامیم. درون‌یابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$، به ازای مقادیر x به طوری که x در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$x_0 < x < x_n$$

$$x \neq x_i \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

و برون‌یابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$. زمانی که یک تابع جدولی داریم راه‌های متفاوتی برای درون‌یابی موجود است یکی از راه‌های نسبتاً ساده این است که یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد؛ به ازای $i = 0, \cdots, n$، یعنی داشته باشیم:

$$P(x_i) = f_i \ , \qquad i = 0, \cdots, n$$

و بعد به جای $f(x)$ در بازه $[x_0, x_n]$ با $P(x)$ کار کنیم.

۱.۳ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

در این روش یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n مانند $P(x)$ می‌یابیم که در شرط

$$P(x_i) = f_i \ , \qquad i = 0, \cdots, n$$

صدق می‌کند. این چندجمله‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n$$

که در آن $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ چندجمله‌ای‌هایی از درجه n هستند و از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \quad (۱.۳)$$

چندجمله‌ای‌های درجه n که به وسیله رابطه (۱.۳) بیان می‌شوند به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروف‌اند.

مثال ۱.۳ چندجمله‌ای درونیاب $P(x)$ مربوط به تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ محاسبه کنید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل : در این مثال $n = 2$ و در نتیجه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ از درجه دو هستند.

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول (۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) \\ &= \frac{x^2-x}{2} - (x^2-1) + \frac{3(x^2+x)}{2} = x^2+x+1 \end{aligned}$$

تحقیق کنید که $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$.

نتیجه ۱.۳ چندجمله‌ای $P(x)$ را می‌توان به روش ضرایب مجهول نیز به دست آورد.
به این معنا که فرض می‌کنیم

$$P(x) = ax^{۲} + bx + c$$

و قرار می‌دهیم

$$P(-۱) = ۱ \qquad P(\circ) = ۱ \qquad P(۱) = ۳$$

که در نتیجه یک دستگاه سه معادله، سه مجهول حاصل می‌شود که جواب آن $a = b = c = ۱$ خواهد بود. اما در عمل n می‌تواند بزرگ باشد و نقاط x_i نزدیک به هم، که در نتیجه حل دستگاه شامل $(n + ۱)$ مجهول را با اشکالاتی مواجه می‌کند.

مثال ۲.۳ با اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ به تابع جدولی مثال ۱.۳ مجدداً چندجمله‌ای $P(x)$ را حساب کنید. به عبارت دیگر، چندجمله‌ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7

حل : در این مثال $n = 3$ و چندجمله‌ای‌های لاگرانژ همه از درجه ۳ هستند. این چندجمله‌ای‌ها عبارتند از:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^2 - 2x^2 - x + 2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3 - x}{6}$$

در نتیجه چندجمله‌ای $P(x)$ عبارت است از: