مثال ۴.۳ جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطه $(۲,۷)$ مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

حل : با توجه به مثال قبل داریم:

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطه $(۲,۷)$ حاصل می‌شوند خط کشیده شده است.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-۱	۱			
		۰		
۰	۱		۱	
		۲		$\underline{۰}$
۱	۳		$\underline{۱}$	
		$\underline{۴}$		
۲	$\underline{۷}$			

قضیه زیر نشان می‌دهد که از جدول تفاضلات می‌توان درجه چندجمله‌ای درونیاب را قبل از به دست آوردن آن، معین کرد.

قضیه ۳.۳ (فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن)
چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ عبارت است از

$$P(x) = f_۰ + (x - x_۰) f[x_۰, x_۱] + \cdots + (x - x_۰) \cdots (x - x_{n-۱}) f[x_۰, x_۱, \cdots, x_n]$$

مثال ۵.۳ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفاضلات تقسیم شده به دست آورید و $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ را برآورد کنید.

x_i	-۱	۱	۲	۳
f_i	-۲	۰	۷	۲۶

حل : با توجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-۱	-۲			
		۱		
۱	۰		۲	
		۷		۱
۲	۷		۶	
		۱۹		
۳	۲۶			

از این رو، بنابر فرمول (۴.۳) برای چندجمله‌ای درونیاب داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= -۲ + (x+۱)\times ۱ + (x+۱)(x-۱)\times ۲ + (x+۱)(x-۱)(x-۲)\times ۱ \\ &= -۲ + x + ۱ + ۲x^{۲} - ۲ + x^{۳} - ۲x^{۲} - x + ۲ \end{aligned}$$

که در نتیجه

$$P(x) = x^{۳} - ۱$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) \simeq P\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۷}{۸}$$

مثال ۶.۳ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطه (۴,۱۱) به آن مجدداً چندجمله‌ای درونیاب را حساب کنید.

x_i	۱	۲	۳
f_i	۲	۵	۱۰

حل : جدول تفاضلات تقسیم شده به قرار زیر است. (زیر اعداد مربوط به اضافه کردن (۴,۱۱) خط کشیده شده است).

جدول ۵.۳

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۱	
		۵		−۱
۳	۱۰		−۲	
		۱		
۴	۱۱			

چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲ و ۳ عبارت است از

$$P(x) = ۲ + (x - ۱) \times ۳ + (x - ۱)(x - ۲) \times ۱ = x^۲ + ۱$$

برای به دست آوردن چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ کافی است که جمله زیر را به $P(x)$ قبلی اضافه کنیم

$$(x - ۱)(x - ۲)(x - ۳) \times (-۱)$$

از این رو، چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از

$$P(x) = -x^۳ + ۷x^۲ - ۱۱x + ۷$$

مشاهده می‌شود که یکی از محاسن روش تفاضلات تقسیم شده برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب آن است که چندجمله‌ای را به تدریج محاسبه می‌کند و با اضافه کردن نقطه یا نقاطی به جدول، محاسبات قبلی تماما به کار می‌روند. ضمناً درجه چندجمله‌ای نیز از روی جدول تفاضلات قابل پیش‌بینی است.

قضیه ۴.۳ اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط دوبه‌دو متمایز $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ و f دارای مشتق مرتبه $(n+۱)$ ام باشد آن گاه

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x - x_۰)\cdots(x - x_n)| \times \frac{M_{n+۱}}{(n+۱)!} \qquad (۷.۳)$$

که در آن $M_{n+۱}$ یک کران بالا برای $|f^{(n+۱)}(x)|$ در $[x_۰, x_n]$ است. یعنی، برای هر x از $[x_۰, x_n]$، $|f^{(n+۱)}(x)| \leq M_{n+۱}$.

مثال ۷.۳ چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = \cos\frac{\pi x}{۲}$ را در نقاط $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $\left|f\left(\frac{۱}{۲}\right) - P\left(\frac{۱}{۲}\right)\right|$ را با کران بالا در $x = \frac{۱}{۲}$ مقایسه کنید.