

## ۵.۳ کمترین مربعات خطا

فرض کنید  $n$  نقطه مانند  $M_i(x_i, y_i)$  داشته باشیم و بخواهیم چندجمله‌ای مناسبی بیابیم که مجموع مربع فاصله این نقاط از نمودار آن چندجمله‌ای کمینه باشد. به طور مثال فرض کنید  $P(x)$  چندجمله‌ای از درجه ۲ باشد داریم:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$d_i = P_2(x_i) - y_i = ax_i^2 + bx_i + c - y_i$$

$$\implies d = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

شرط لازم برای آن که  $d$  کمینه باشد آن است که

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{\partial d}{\partial b} = \frac{\partial d}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \lambda x_i (ax_i + bx_i + c - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \lambda x_i (ax_i + bx_i + c - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial c} = \sum_{i=1}^n \lambda (ax_i + bx_i + c - y_i) = 0$$

بنابراین

$$a \sum_{i=1}^n \lambda x_i + b \sum_{i=1}^n \lambda x_i + c \sum_{i=1}^n \lambda x_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n \lambda x_i + b \sum_{i=1}^n \lambda x_i + c \sum_{i=1}^n \lambda x_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n \lambda x_i + b \sum_{i=1}^n \lambda x_i + c \sum_{i=1}^n \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda y_i$$

که از حل این دستگاه  $a$ ،  $b$  و  $c$  را می‌توان به دست آورد.

مثال ۱۲.۳ با استفاده از روش کم‌ترین مربعات خطا،  $\sin(0.6997)$  را با استفاده از چندجمله‌ای درجه دو محاسبه کنید. (اعداد را تا ۴ رقم اعشار گرد کنید).

حل: جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

$x_i$	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x_i$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱

$$\sum_{i=1}^5 x_i^4 = 7.7463 \quad (4D)$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^3 = 5.6522$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 4.4550$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 3.9270$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i = 3.9904$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 3.2948$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 3.0731$$

$$7,7463a + 5,6522b + 4,4550c = 3,9904$$

$$5,6522a + 4,4550b + 3,9270c = 3,2948$$

$$4,4550a + 3,9270b + 5c = 3,0731$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -0,3345511 \simeq -0,3346 \\ b = 1,1684051 \simeq 1,1684 \\ c = -0,004953910 \simeq -0,0050 \end{cases}$$

$$\sin x \simeq (-0,3346)x^2 + (1,1684)x - 0,0050$$

$$\sin(0,6997) \simeq 0,6487 = P_2(0,6997)$$

مثال ۱۳.۳ به روش کمترین مربعات خطا، نقاط زیر را با یک چندجمله‌ای درجه اول (خطی) تقریب بزنید.

$x_i$	-۳	-۱	۲	۴
$y_i$	۹	۵	-۱	-۵

حل :

$$P_1(x) = ax + b$$

$$d_i = P_1(x_i) - y_i = ax_i + b - y_i$$

$$d = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{\partial d}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \quad \frac{\partial d}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad , \quad a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 9 + 1 + 4 + 16 = 30 \quad , \quad \sum_{i=1}^4 x_i = -3 - 1 + 2 + 4 = 2$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = -27 - 5 - 2 - 20 = -54 \quad , \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 9 + 5 - 1 - 5 = 8$$

$$\begin{cases} 30a + 2b = -54 \\ 2a + 4b = 8 \end{cases} \implies a = -2, b = 3 \implies P_1(x) = -2x + 3$$

## مسائل تکمیلی؟

۲.۳ تابع جدولی زیر مفروض است. چند جمله‌ای درونیاب  $f$  را به دست آورید. آیا با اضافه کردن نقطه  $(2, 1)$  چند جمله‌ای درونیاب تغییر می‌کند؟

$x_i$	-1	0	1
$f_i$	1	-1	-1

۳.۳ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده به دست آورید.

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f_i$	-9	-2	-1	0	7

۴.۳ درجه چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید.  
(راهنمایی: درجه چند جمله‌ای درونیاب بزرگترین مرتبه تفاضلات تقسیم شده مخالف صفر است).

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	3	2	7	24	59	118

۵.۳ چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید و  $f(1/2)$  و  $f(1/7)$  را تخمین بزنید.

$x_i$	-1	-0.5	0	1/5
$f_i$	0.2	1.075	1/2	4.575

۶.۳ فرض کنید  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ ،  $x_0 = -1$ ،  $x_1 = 0$  و  $x_2 = 1$ . چند جمله‌ای درونیاب  $f$  را در نقاط  $x_0$ ،  $x_1$  و  $x_2$  به دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.