کانولوشن

کانولوشن (پیچش) دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $f(x)*g(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)*g(x)=\int_{\circ}^{x} f(t)g(x-t)dt$$

خواص کانولوشن

۱) $f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$

۲) اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(x)\}=G(s)$، آن‌گاه:

$$\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\}=\mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\}=F(s)G(s)$$

۳) اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(x)\}=G(s)$، آن‌گاه:

$$\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)G(s)\}=f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$$

مسائل حل شده

۱) تبدیل $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\times\frac{1}{s-3}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\\
&= e^{2x} * e^{3x}\\
&= \int_0^x e^{2t}\times e^{3(x-t)}dt\\
&= e^{3x}\left(-e^{-t}\Big|_0^x\right)\\
&= e^{3x}(-e^{-x}+e^0)\\
&= -e^{2x}+e^{3x}
\end{aligned}$$

۲) تبدیل $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۶}{s^{۲}-۱}\right\}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۶}{s^{۲}-۱}\right\} &= ۶\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s-۱)(s+۱)}\right\}\\
&= ۶\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s-۱}\right\} * \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s+۱}\right\}\\
&= ۶e^{x} * e^{-x}\\
&= ۶\int_{\circ}^{x} e^{t}\times e^{-(x-t)}dt\\
&= ۶e^{-x}\left(\frac{۱}{۲}e^{۲t}\Big|_{\circ}^{x}\right)\\
&= ۶e^{-x}\left(\frac{۱}{۲}e^{۲x}-\frac{۱}{۲}e^{\circ}\right)\\
&= ۳e^{-x}(e^{۲x}-۱) = ۳e^{x}-۳e^{-x}
\end{aligned}$$

۳) تبدیل $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s^۲+۴)}\right\}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s^۲+۴)}\right\} &= \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s^۲+۴}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^۲+۴}\right\} \\
&= ۱ * \frac{۱}{۲}\sin(۲x) \\
&= \frac{۱}{۲}\sin(۲x) * ۱ \\
&= \int_{\circ}^{x} \frac{۱}{۲}\sin(۲t)dt \\
&= -\frac{۱}{۴}\cos(۲t)\Big|_{\circ}^{x} \\
&= -\frac{۱}{۴}\cos(۲x) + \frac{۱}{۴} \\
&= \frac{۱}{۴}(۱-\cos(۲x))
\end{aligned}$$

مسائل تکمیلی

تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۲}{s(s+۱)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۳}{s^۲(s^۲+۴)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۹}{s^۲(s^۲+۹)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{(s-۱)(s-۲)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s^۲+۳s-۴}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۹}{s(s^۲+۹)}\right\}$$