حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیله تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه n ام تابع $y(x)$ عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-۱}y(۰) - s^{n-۲}y'(۰) - \cdots - sy^{(n-۲)}(۰) - y^{(n-۱)}(۰)$$

در حالت $n = ۱$ و $n = ۲$ تساوی بالا عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(۰)$$

$$\mathcal{L}\{y''(x)\} = s^۲\mathcal{L}\{y\} - y(۰)s - y'(۰)$$

برای حل یک معادله دیفرانسیل توسط تبدیل لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا یک معادله جبری برای $\mathcal{L}\{y(x)\}$ ایجاد شود. سپس معادله را برای پیدا کردن $\mathcal{L}\{y(x)\}$ حل می‌کنیم و در پایان از تبدیل معکوس لاپلاس برای یافتن $y(x)$ استفاده می‌کنیم.

مسائل حل شده

۱) معادله دیفرانسیل $y' - ۵y = ۰$ را با شرط اولیه $y(۰) = ۲$ به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

پاسخ:

$$y' - ۵y = ۰$$

$$\mathcal{L}\{y'\} - ۵\mathcal{L}\{y\} = ۰$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(۰) - ۵\mathcal{L}\{y\} = ۰$$

$$(s-۵)\mathcal{L}\{y\} = ۲$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{۲}{s-۵}$$

بنابراین $y = \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲}{s-۵}\right\} = ۲e^{۵x}$.

۲) معادله دیفرانسیل $y' - ۵y = e^{۵x}$ را با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

پاسخ:

$$y' - ۵y = e^{۵x}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} - ۵\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{۵x}\}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - ۰ - ۵\mathcal{L}\{y\} = \frac{۱}{s-۵}$$

$$(s-۵)\mathcal{L}\{y\} = \frac{۱}{s-۵}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{۱}{(s-۵)^{۲}}$$

بنابراین $y = \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s-۵)^{۲}}\right\} = e^{۵x}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}}\right\} = e^{۵x}x$.

۳) معادله دیفرانسیل $y' + y = \sin x$ را با شرط اولیه $y(۰) = ۱$ به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

پاسخ:

$$y' + y = \sin x$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin x\}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - ۱ + \mathcal{L}\{y\} = \frac{۱}{s^۲ + ۱}$$

$$(s + ۱)\mathcal{L}\{y\} = ۱ + \frac{۱}{s^۲ + ۱}$$

لذا:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{s^۲ + ۲}{s^۲ + ۱}}{s + ۱}$$

$$= \frac{s^۲ + ۲}{(s + ۱)(s^۲ + ۱)} = \frac{۱}{s + ۱} + \frac{۱}{(s + ۱)(s^۲ + ۱)}$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\
&= \frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+e^{-x}\\
&= \frac{3}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x
\end{aligned}
$$

۴) معادله دیفرانسیل $y''+4y=0$ را با شرط اولیه $y(0)=2$ و $y'(0)=2$ به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

پاسخ:

$$y''+4y=0$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+4\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-2s-2+4\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$(s^۲+۴)\mathcal{L}\{y\} = ۲s+۲$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{۲s+۲}{s^۲+۴}$$

بنابراین:

$$y = \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s+۲}{s^۲+۴}\right\} = ۲\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^۲+۴}\right\} + \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲}{s^۲+۴}\right\}$$

$$= ۲\cos(۲x) + \sin(۲x)$$

مسائل تکمیلی

معادلات دیفرانسیل زیر را به‌روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$y' + ۵y = ۰ \qquad y(۰) = ۱$

$y' + y = xe^{-x} \qquad y(۰) = -۲$

$y' + ۲۰y = ۶\sin(۲x) \qquad y(۰) = ۶$

$y'' - y = ۰ \qquad y(۰) = ۱ \qquad y'(۰) = ۱$

$y'' - y = e^{x} \qquad y(۰) = ۱ \qquad y'(۰) = ۰$