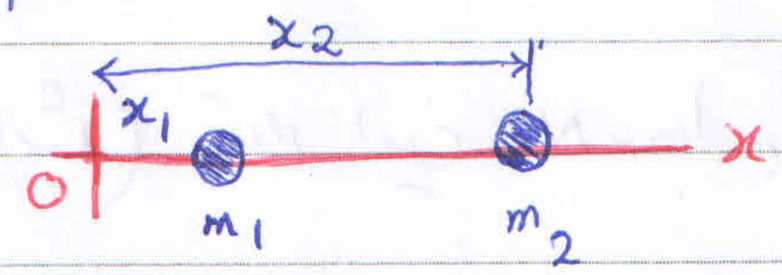
Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

فصل نهم : مرکز جرم و تکانه خطی

مرکز جرم سیستمی از ذرات، نقطه‌ای است که گویی (1) تمام جرم سیستم در آن جا متمرکز شده است و (2) همه نیروهای خارجی هم در آن جا وارد می‌شوند.

center of mass ≡ c.o.m ≡ cm

بنابر تعریف، برای یک سیستم دو ذره‌ای در یک بُعد (و اجسام گسترده):



$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

برای N تا ذره در یک بُعد

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

در بُعدهای دیگر

$$y_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

$$z_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

در سه بُعد

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{com} = x_{com} \hat{i} + y_{com} \hat{j} + z_{com} \hat{k}$$

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

اگر جسم پیوسته باشد (صُلب باشد) تعداد این N-ها به ∞ میل می‌کند و Σ به انتگرال تبدیل می‌شود:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{com} = \frac{1}{M} \int y \, dM$$

$$z_{com} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

که از این رابطه به دست آمده است:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

اگر برحسب چگالی بخواهیم بنویسیم :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$$

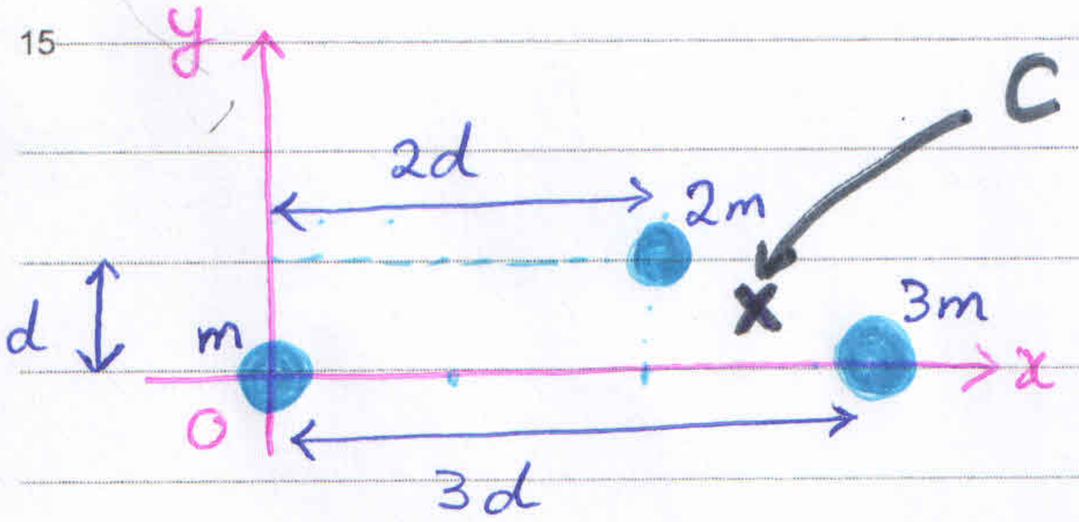
$$\Rightarrow x_{com} = \frac{1}{M} \int x\,(\rho\, dV) = \frac{1}{V} \int x\, dV$$

$M = \rho V$

$$y_{com} = \frac{1}{V} \int y\, dV$$

$$z_{com} = \frac{1}{V} \int z\, dV$$

مثال اول - مرکز جرم سیستم ذرات زیر را به دست آورید.



$m\,(0,0)$

$2m\,(2d,d)$

$3m\,(3d,0)$

$$x_{com} = \frac{0\times m + 2m\times 2d + 3m\times 3d}{m+2m+3m} \quad \frac{(4+9)md}{6m} = \frac{13}{6}d$$

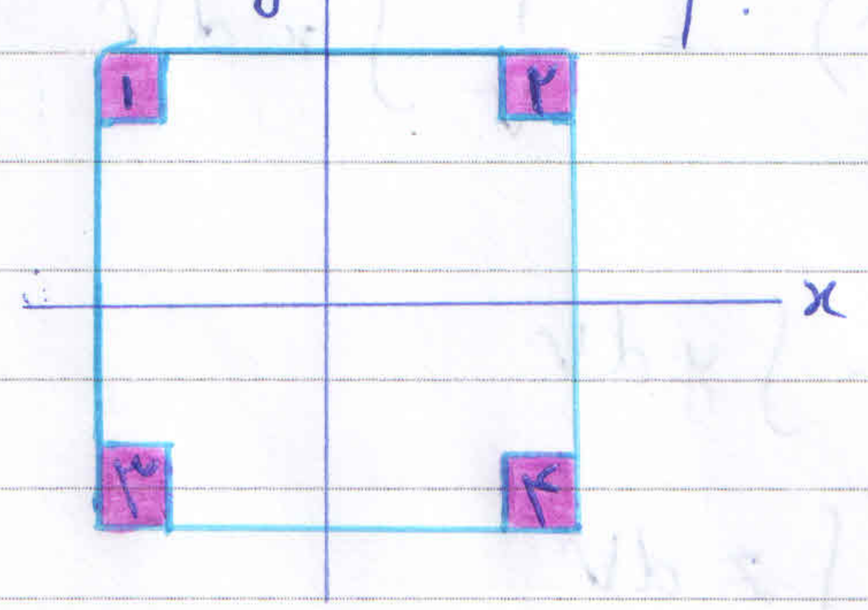
$$y_{com} = \frac{0\times m + 2m\times d + 0\times 3m}{m+2m+3m} = \frac{2dm}{6m} = \frac{1}{3}d$$

page : ( )

Subject:

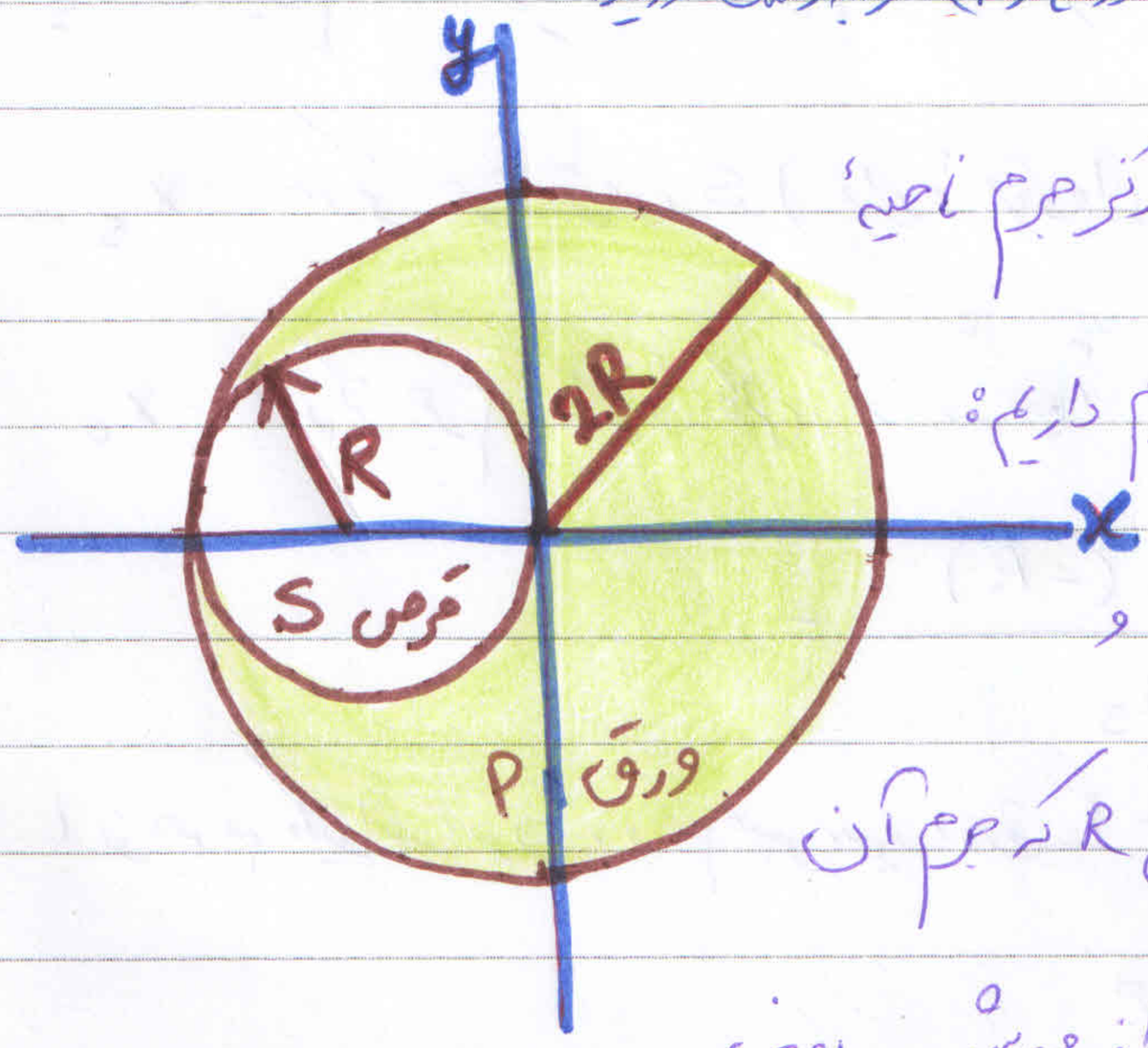
Year : Month : Day : ( )

مثال دوم - ورق مربعی یکواختی را در نظر بگیرید که چهار مربع یکسان را از گوشه‌های آن حذف خواهیم کرد. پس از حذف مربعهای $\frac{1}{}$ و $\frac{2}{}$ و $\frac{3}{}$ و $\frac{4}{}$ و ترکیب آنها را جمع به محل مرکز جرم بجا کنید.

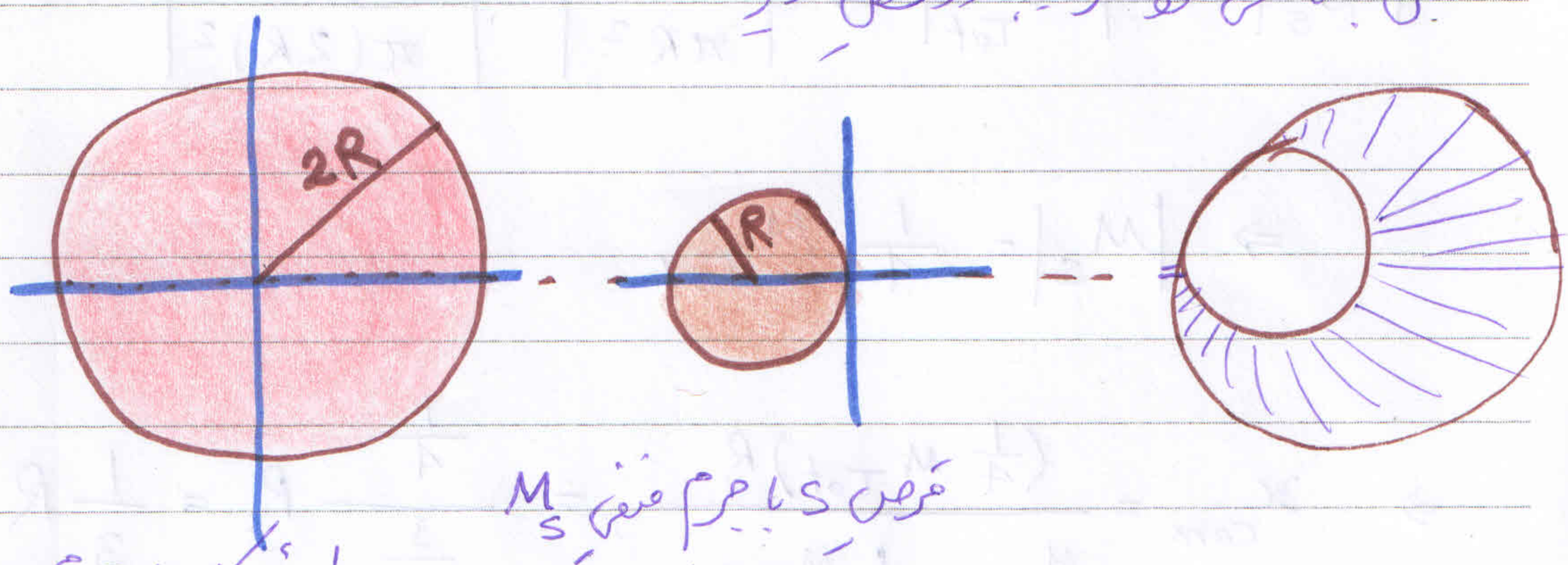


Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مثال سوم - ورقه فلزی یکنواخت P به شعاع 2R وجود دارد که قرصی به شعاع R از آن برداشته شده است. مرکز جرم ورقه (P) را به دست آورید.



برای به دست آوردن مرکز جرم ناحیه سبز رنگ، فرض می‌کنیم دو تا جرم داریم:
یکی دایره کل به شعاع 2R و دیگری دایره‌ای به شعاع R که جرم آن منفی است و به دایره کل اضافه می‌شود. یعنی شکل بالا می‌شود ترکیب دو شکل زیر



دایره کل با جرم M_{Tot} — قرص S با جرم منفی M_S

$$x_{com} = \frac{M_{Tot}\, x_0 + M_S\, x_S}{M_{Tot} + M_S}$$

$M_S < 0$

سوال: چرا x_{com} و نه y_{com}؟

Subject:

Year: Month: Day: ( )

M_{Tot} جرم کل دایره به شعاع $2R$

M_S جرم قرص S که منفی است (فرض ما اینست برای حل مسأله)

x_S مرکز جرم قرص S (دایرهٔ قهوه‌ای رنگ) که در $-R$ است.

x_0 مرکز جرم دایرهٔ کل که در مبدأ مختصات است.

$$x_{com} = \frac{0 + (-M_S)(-R)}{M_{Tot} - M_S} =$$

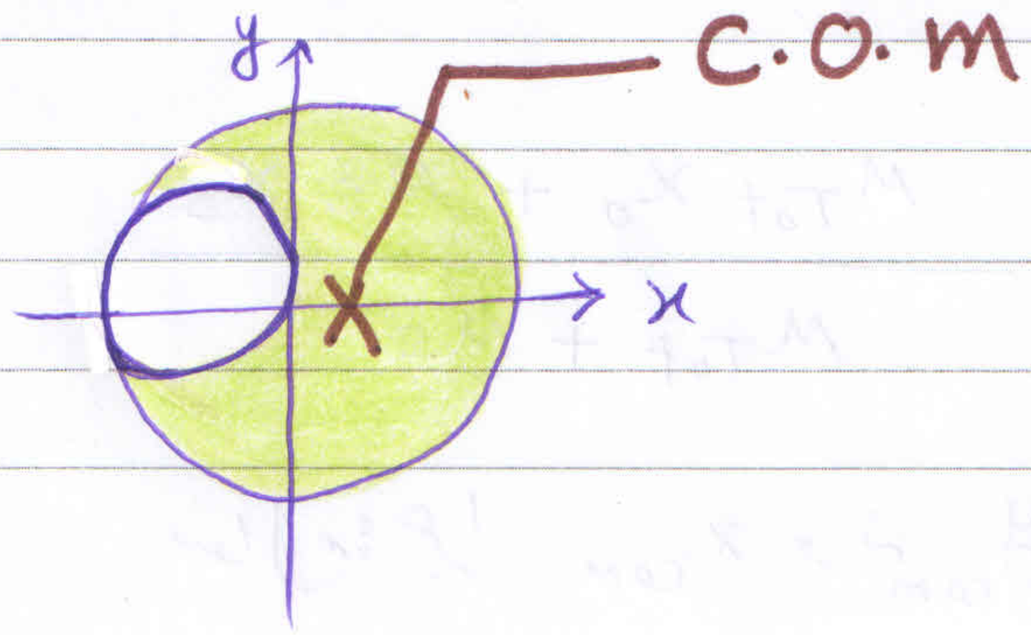
با توجه به یکنواخت بودن و هم‌جنس بودن ورقه‌ها چگالی سطحی آن‌ها با هم برابر است.

$$\text{چگالی سطحی} = \frac{\text{جرم}}{\text{مساحت سطح}}$$

$$|\sigma_S| = |\sigma_{Tot}| \Rightarrow \left|\frac{M_S}{\pi R^2}\right| = \left|\frac{M_{Tot}}{\pi (2R)^2}\right|$$

$$\Rightarrow |M_S| = \frac{1}{4} M_{Tot}$$

$$\Rightarrow x_{com} = \frac{(\frac{1}{4} M_{Tot})R}{M_{Tot} - \frac{1}{4} M_{Tot}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} R = \frac{1}{3} R$$



Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مثال چهارم - مسأله قبل را برای کره‌ای به شعاع $2R$ که کرهٔ کوچکتری به شعاع R از آن جدا شده است، محاسبه کنید.

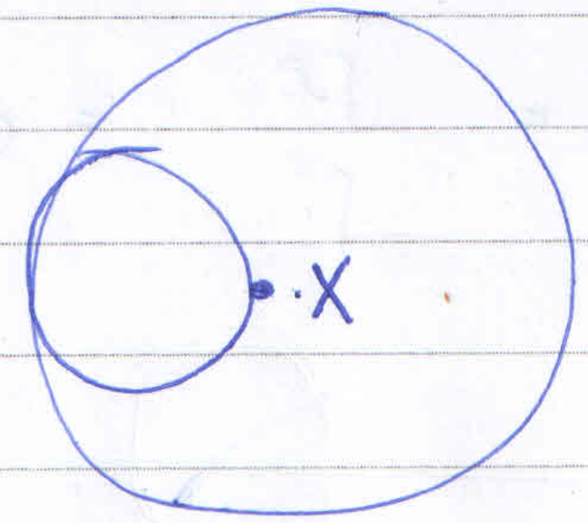
$$x_{Com} = \frac{M_{Tot}\,x_0 + M_V x_V}{M_{Tot} + M_V} = \frac{-|M_V|(-R)}{M_{Tot} - |M_V|}$$

حفره‌ای جرمی $=$ کره بزرگ $-$

$$\rho_{Tot} = \rho_V \Rightarrow \frac{M_{Tot}}{\frac{4}{3}\pi(2R)^3} = \frac{M_V}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

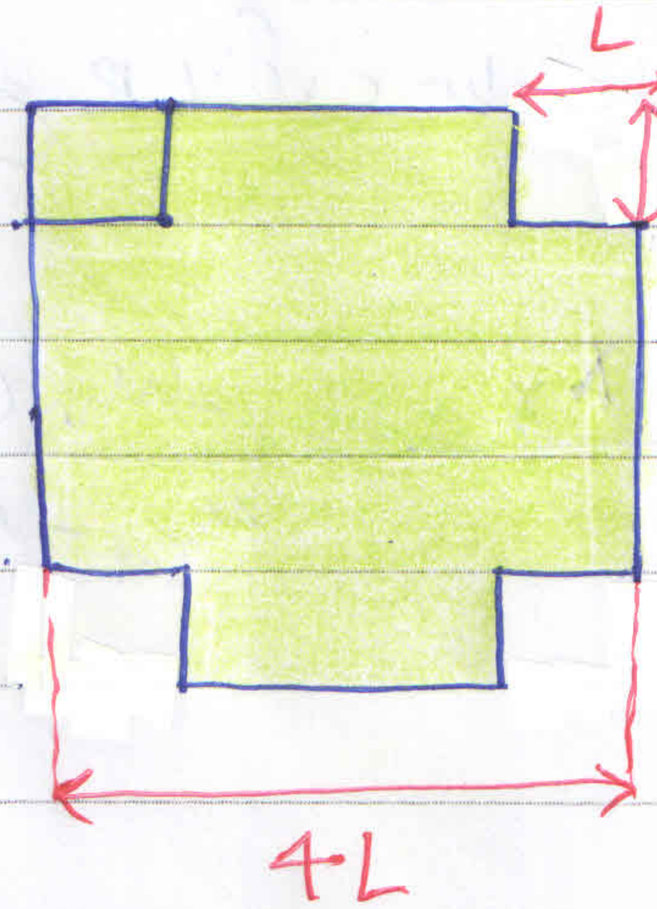
$$\Rightarrow M_V = \frac{1}{8} M_{Tot}$$

$$\Rightarrow x_{Com} = \frac{\frac{1}{8} M_{Tot}\, R}{M_{Tot} - \frac{1}{8} M_{Tot}} = \frac{1}{7} R$$



Subject:
Year : Month : Day : ( )

مثال مهم - مرکز جرم شکل زیر را به دست آورید.



چگالی سطحی ثابت است.

سه نوع توزیع جرم داریم:

چگالی خطی = $\frac{\text{جرم}}{\text{طول}} = \frac{m}{L}$ واحدش $\frac{kg}{m}$

سطحی = $\frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}} = \frac{m}{A}$ واحدش $\frac{kg}{m^2}$

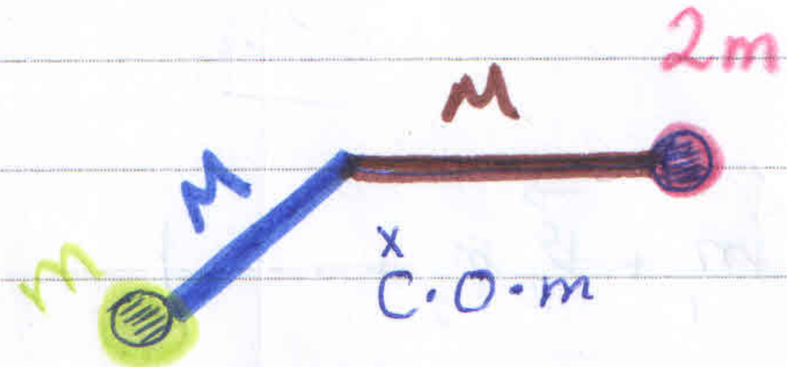
حجمی = $\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \frac{m}{V}$ واحدش $\frac{kg}{m^3}$

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

نکته مهم: مرکز جرم لزوماً روی جرم نیست.



یک دونات مرکز جرمش وسط حلقه‌اش است. چایی که هیچ جرمی وجود ندارد.

یا دینامیک مرکز جرم

page: ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

حرکت مرکز جرم

خلاصه مطالب قبلی:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\left(\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots\right)$$

$$\vec{v}_{com} = \frac{1}{M}\left(\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 + \dots\right)$$

$$\vec{a}_{com} = \frac{1}{M}\left(\vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_2 m_2 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow m\vec{a}_{com} = \left(\vec{F}_{1,int} + \vec{F}_{1,ext}\right) + \left(\vec{F}_{2,int} + \vec{F}_{2,ext}\right) + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,int} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

($\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,int} \to 0$)

چرا نیروهای داخلی در مجموع حذف شدند؟

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{com}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Subject: momentum — تکانه خطی

Year : Month : Day : ( ) page : ( )

حالا از مطالب قبلی برای بیان قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم. ابتدا لازم است که تکانه را تعریف کنیم.

linear momentum = تکانه خطی

$\vec{p} = m\vec{v}$ → سرعت ذره

↙ تکانه تک ذره

جرم ذره

تکانه خطی تک ذره ✓

و در یک سیستم N ذره‌ای ✓

$[p] = \frac{kg \cdot m}{s}$

$\vec{p}$ و $\vec{v}$ هم جهت هستند.

قانون دوم نیوتن در اصل برحسب تغییر تکانه است:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

نیروی برآیند خارجی وارد بر تک ذره

جرم تک ذره

برای یک سیستم ذرات می‌توان نوشت:

$$\vec{P}_{Tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots$$

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} + \dots$$

$$\Rightarrow (F_{ext})_{Tot} = \sum_i F_{ext,i} = \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt}$$

از طرف دیگر برای یک مجموعه از ذرات

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{com} \Rightarrow (1)$$

M: جرم کل

$$\vec{P}_{Tot} = M\vec{v}_{com} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{com}}{dt} = M\vec{a}_{com} \quad (2)$$

$\vec{v}_{com}$: سرعت مرکز جرم مجموعه ذرات

$$(1) = (2) \Rightarrow \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt}$$

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

پایستگی تکانه خطی

if $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$

Then $\begin{cases} F_{ext,x} = 0 \Rightarrow \frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_{x,i} = P_{x,f} & \text{پایستا است.} \\ F_{ext,y} = 0 \Rightarrow \frac{dP_y}{dt} = 0 \Rightarrow P_{y,i} = P_{y,f} & \text{پایستا است.} \end{cases}$

بنابراین اگر $\vec{F}_{ext} = 0$ باشد، سیستم را منزوی می‌گوییم و

$P_{Tot} =$ پایستا است

$\Rightarrow MV_{com} =$ پایستا $\Rightarrow V_{com} =$ بدون تغییر

باقی می‌ماند.

هشدار: پایستگی تکانه، لزوماً پایستگی انرژی را به همراه ندارد.

پایستگی انرژی مکانیکی $\not\Longleftrightarrow$ نیروهای ناپایستار نباشند.

پایستگی تکانه خطی $\not\Longleftrightarrow$ نیروهای خارجی نباشند

Soroush

page: ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

مجموعه‌ای از ذرات	تک ذره
$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$	(x_0, y_0, z_0)
$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{v}\, dm$	$\vec{v}_0$
$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{a}\, dm$	$\vec{a}_0$
$\vec{P} = m\vec{v}_{cm} = \sum_i \vec{p}_i$	$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$
$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$	$\vec{F} = m\vec{a}_0$
$F_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_0}{dt}$

دستگاه ذرات

مثال ششم - دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 به وسیله فنری به هم متصل شده‌اند. فنر را فشرده می‌کنیم. اجسام در این حالت ساکن هستند. بعد از رها شدن سیستم سرعت قطعات را بر حسب یکدیگر بنویسید.

دستگاه = فنر + کف + جسم ۱ و ۲

$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow$ پایستگی تکانه خطی $\Rightarrow P_i = P_f$

حالت اولیه ساکن هستند $\Leftarrow P_i = P_1 + P_2 = 0$

$$\vec{P}_f = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \Rightarrow \vec{v}_2' = \frac{-m_1}{m_2}\vec{v}_1'$$

Soroush

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مرکز جرم این دستگاه ذرات کجاست و در این حرکت چه تغییری دارد؟

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

این مرکز جرم اگر در ابتدا ساکن است/ باشد، به دلیل $\vec{F}_{ext} = 0$ همچنان ساکن باقی می‌ماند. و اگر با سرعت اولیه‌ای حرکت می‌کند، هم چنان با همان سرعت اولیه حرکت می‌کند.

سرعت مرکز جرم چه تغییری می‌کند؟

$$\vec{P}_{Tot} = 0 = M \vec{V}_{com} \Rightarrow V_{com} = 0$$

یعنی مرکز جرم ساکن است.

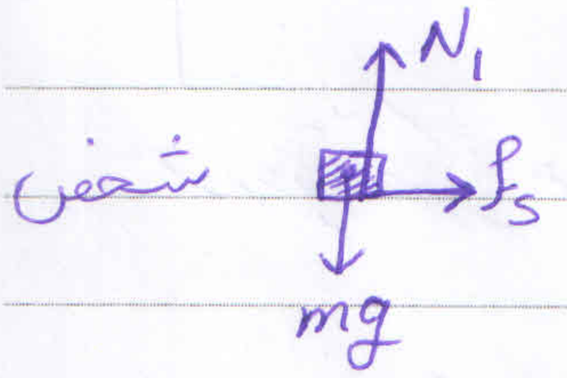
page : ( )

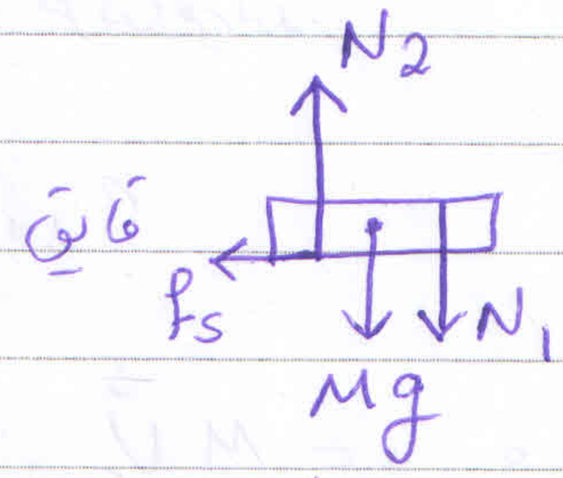
Subject:

Year : Month : Day : ( )

مثال هفتم - شخصی بر روی یک قایق ساکن ایستاده است. سطح بدون اصطکاک است. فرد با سرعت v_0 نسبت به قایق به سمت راست حرکت می‌کند. قایق به چه سمتی و با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

سیستم: قایق + شخص





خودرجسم آزاد

خودرجسم آزاد

N_1 نیروی تکیه از طرف قایق به شخص است.

N_2 " " " آب به قایق

$F_{ext} = 0$ دستگاه منزوی

$\Rightarrow \vec{P}_{Tot} = \text{ثابت} \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$

$P_i = 0$ حالت اول درحالیکه قایق و شخص ساکن هستند.

$\vec{P}_f = m\vec{v}' + M\vec{V}$ حالت دوم درحالیکه شخص قدم می‌زند.

$\Rightarrow m\vec{v}' + M\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}'$

Soroush

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

جهت سرعتِ قایق در خلافِ جهت قدم زدنِ شخص است.

حالا سرعتی که در مسئله به ما مقدارش v_0 داده شده است، سرعتِ شخص نسبت به قایق است. آن را نسبت به زمین به دست می‌آوریم:

$$\vec{v} \text{ (فرد نسبت به زمین)} = \vec{v} \text{ (فرد نسبت به قایق)} + \vec{v} \text{ (قایق نسبت به زمین)}$$

$$v' = v_0 + 7$$

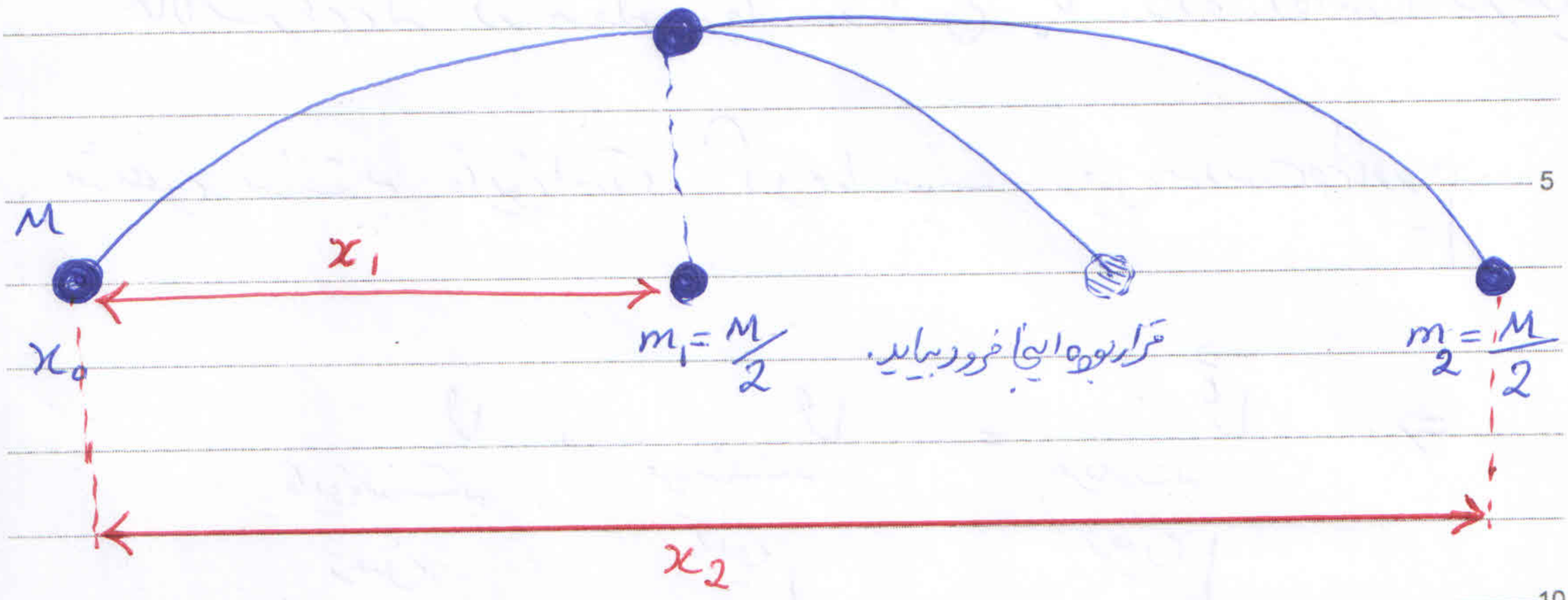
$$\Rightarrow \boxed{7 = v' - v_0}$$

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

توصیف حرکت مرکز جرم بعد از انفجار



$$2x_1 = x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{M}{2}x_1 + \frac{M}{2}x_2}{M}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow 2x_1 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

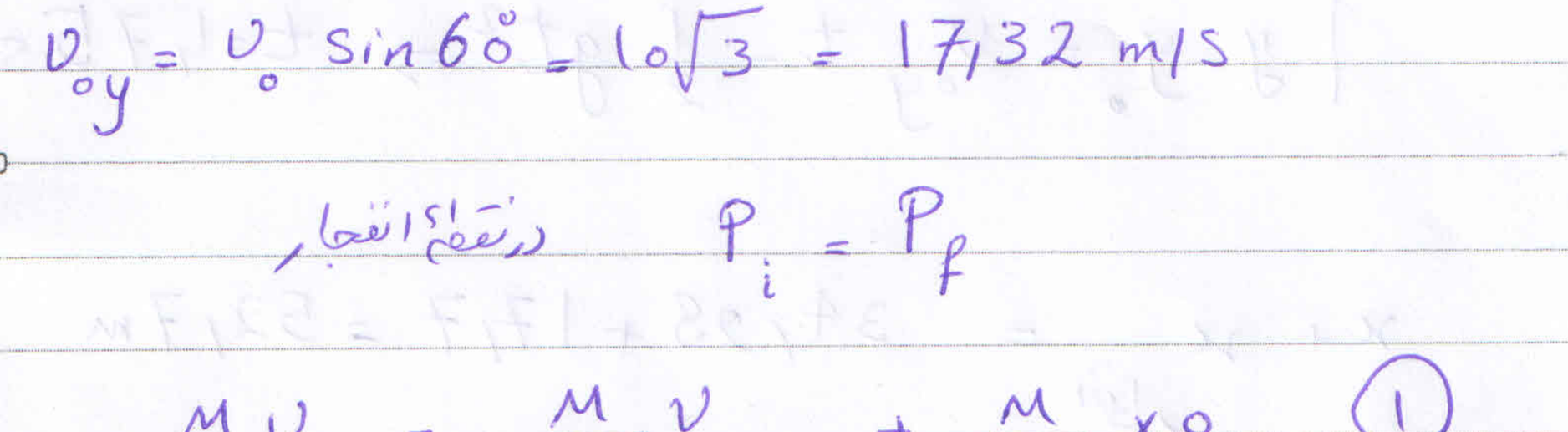
$$\Rightarrow \frac{3}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x_2 = 3x_1$$

محل فرود آمدن ذره دوم سه برابر نصف برد است.

Subject:
Year : Month : Day : ( )

تمرین‌ها page : ( )

۹- ۱۵** (۹-۱۲) گلوله توپی با سرعت اولیه $\vec{v}_0$ به مقدار $20 m/s$ و با زاویه $\theta_0 = 60^\circ$ نسبت به افق شلیک می‌شود. این گلوله در اوج مسیرش، بر اثر انفجار به دو پاره با جرم‌های یکسان تقسیم می‌شود. یکی از این پاره‌ها، که سرعت بعد از انفجار صفر دارد، در راستای قائم سقوط می‌کند. با فرض آنکه سطح زمین افقی و نیروی پس‌برنده ناچیز باشد، پارهٔ دوم در چه فاصله‌ای از توپ به زمین خواهد رسید؟



$$v_{0x} = v_0 \cos 60^\circ = 10 \, m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} = 17{,}32 \, m/s$$

در لحظهٔ انفجار $P_i = P_f$

$$M v_{0x} = \frac{M}{2} v_{0x,1} + \frac{M}{2} \times 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow M \times 10 = \frac{M}{2} v_{0x,1} \Rightarrow v_{0x,1} = 20 \, m/s$$

بعد از انفجار، ذرهٔ (۱) سرعتی در راستای محور x ها دارد که اندازه‌اش $20 m/s$ است.

Soroush

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

در نقطه اوج $v_{0y,1} = 0$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$\Rightarrow t_{\text{اوج}1} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} = 1,7\ s$$

$$x_{\text{انفجار}} = v_{0x} t_{\text{اوج}} = 10 \times 1,7 = 17\ m$$

$$y_{\text{انفجار}} = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Big|_{\text{اوج}} =$$

حالا از نقطه انفجار تا زمین چه فاصله ای طی می شود؟

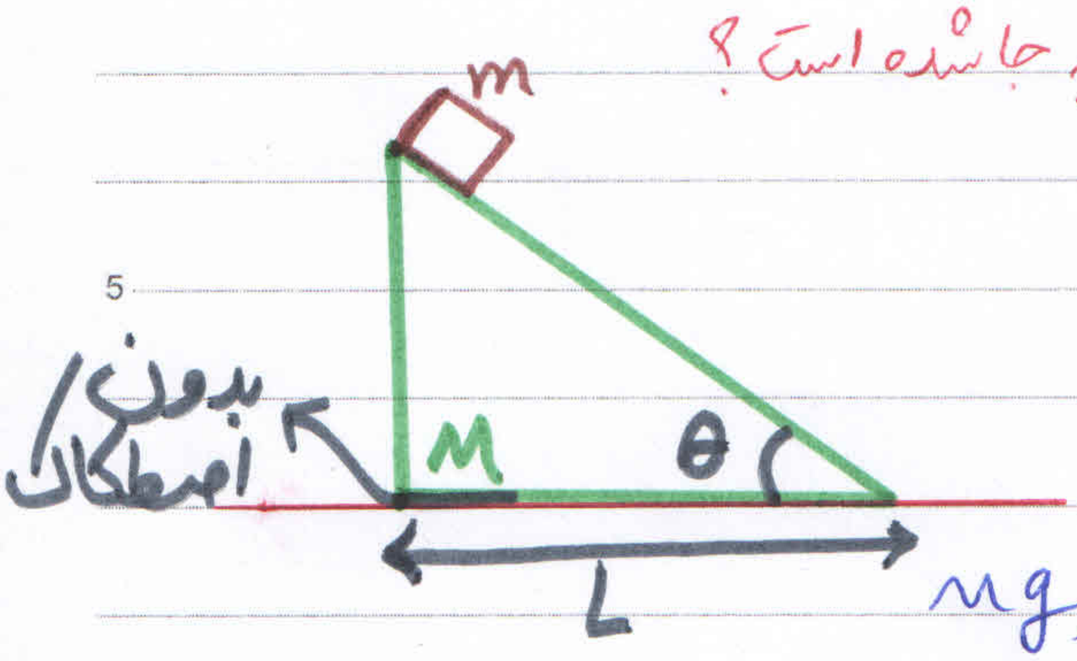
بعد از انفجار
$$\begin{cases} x = v'_{0x} t = 20 \times 1,75 = 34,98 \\ y - y_0 = v'_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = 1,75\ s \end{cases}$$

$$x + x_{\text{انفجار}} = 34,98 + 17,7 = 52,7\ m$$

مسافتی که آمده است.

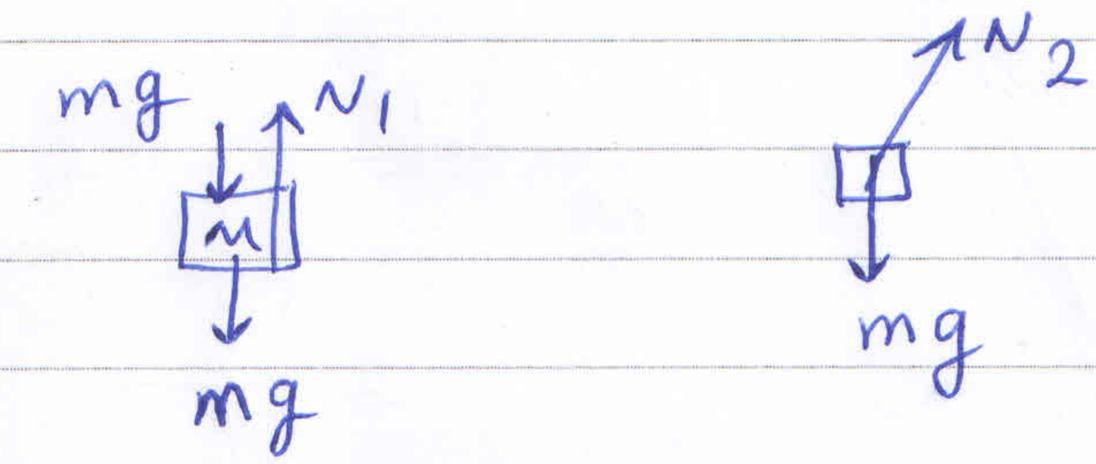
Subject:
Year : Month : Day : ( ) page : ( )

مثال مهم: مجموعه را از حال سکون رها می‌کنیم. در لحظه‌ای که m به پایین سطح شیبدار می‌رسد، M چقدر جابه‌جا شده است؟



دستگاه = M و m

نیروها: Mg و mg و N_2 و N_1



نیروی خارجی از این سامانه وجود ندارد پس

$$F_{ext,x} = 0 \Rightarrow \frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_x = \text{ثابت}$$

چون مجموعه از حال سکون رها می‌شود ← تکانه اول صفر است.

$$0 + 0 = P_x = m(V_{com})_x$$

$$\Rightarrow (V_{com})_x = 0 \Rightarrow \Delta x_{com} = 0$$

یعنی مرکز جرم جابه‌جا نمی‌شود!

$$\Delta x_{com} = \frac{m\Delta x + M\Delta X}{m+M} = 0$$

m به جلو می‌آید و M به عقب حرکت می‌کند.

Soroush

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day

$$\Rightarrow m(l-x) + M(-x) = 0$$

$$x = \frac{ml}{M+m}$$

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

برخورد و ضربه

عبارت برخورد شامل همه مواردی است که در آنها یک جسم در زمان کوتاهی برهمکنش شدید با جسم دیگر دارد. در هر قدم پاشنه پاهای ما به زمین برخورد می‌کند.

در قرار دادن یک فنجان در نعلبکی یک شتاب ناگهانی بزرگ ایجاد می‌شود. انتقال سفینه‌ی فضایی به یکدیگر یک نوع برخورد است. شتاب دهنده‌ی ذرات برای برخورد دادن آنها به یکدیگر، بازی‌های ورزشی و...

انواع برخوردها:
۱- کشسان یا الاستیک $K_i = K_f$
۲- ناکشسان یا غیرالاستیک $K_i = K_f$
۳- کاملاً ناکشسان

دو ذره به همدیگر می‌چسبند.

برخورد:
- پرتابه
- هدف

برخورد:
- یک بُعدی ← شاخ به شاخ
- دو بعدی ← توپ بیلیارد
- سه بعدی ← مسئله انفجار ذره

در همه‌ی اینها $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

Soroush

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

دو جسم برخورد کننده در برخوردها، یعنی پرتابه و هدف، را یک سیستم بسته در نظر می‌گیریم ⇐ پایستگی تکانه خطی همگی برقرار است.

مثال هشتم - جسمی به جرم 6kg با سرعت 4m/s در راستای $+\hat{x}$ منفجر می‌شود. قطعهٔ اول با جرم $m_1 = 2kg$ با سرعت 8m/s در راستای $+\hat{x}$ از آن جدا می‌شود. حرکت قطعهٔ دوم را توصیف کنید.

$6 = m_1$ $\vec{v}_i = 4m/s$ $\quad m'_2 = 4$ $\quad m'_1 = 2$

$\vec{v}'_2$ $\quad \vec{v}'_1 = 8m/s$

$$M\vec{v}_i = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$6 \times 4 = 2 \times 8 + 4v'_2 \Rightarrow 24 = 16 + 4v'_2$$

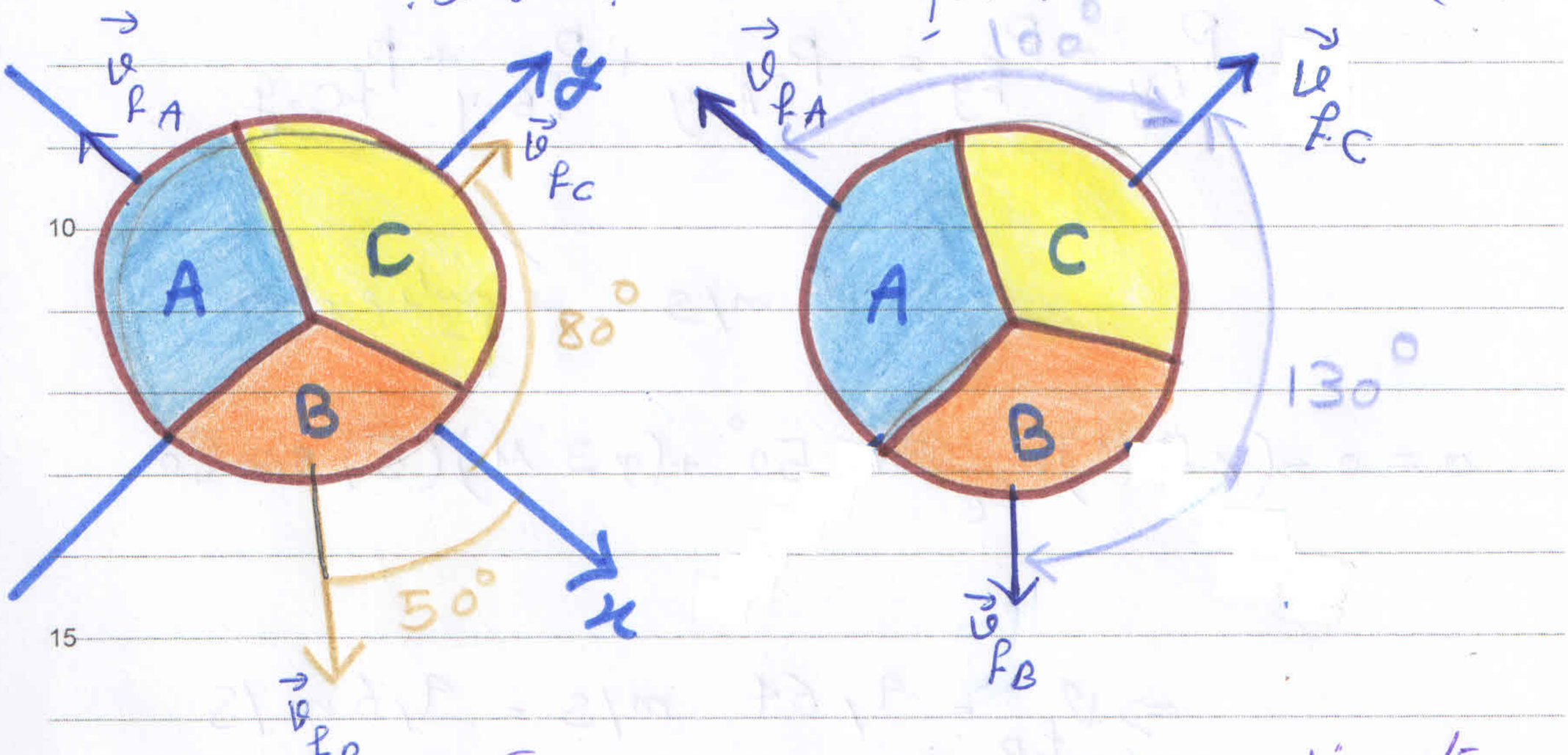
$$8 = 4v'_2 \Rightarrow v'_2 = 2m/s$$

در راستای $+\hat{x}$

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مثال ششم - جسمی به جرم M را در نظر بگیرید که منفجر می‌شود. در حالت اولیه ساکن است و بعد از انفجار به سه تکه تقسیم می‌شود. سرعت نهایی قطعهٔ C به جرم $0/3\,M$ برابر $\vec{v}_{fC} = 5\,m/s$ است.

(الف) سرعت قطعهٔ B به جرم $0/2\,M$ چقدر می‌شود؟



تکانه خطی در امتداد محور x و y پیوسته است.

$$P_{iy} = P_{fy}$$

$$P_{ix} = P_{fx}$$

چون قطعه در ابتدا ساکن است $P_{iy} = 0$

محور x و y را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که قطعهٔ A در راستای $\hat{x}$ باشد.

۲۷

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

$$P_{fA,y} = 0$$

$$P_{fB,y} = -0/2\,M\,v_{fB,y} = -0/2\,M\,v_{fB}\sin 50^\circ$$

$$P_{fC,y} = 0/3\,M\,v_{fC,y} = -0/3\,M\,v_{fC}\sin 80^\circ$$

$$P_{iy} = P_{fy} = P_{fA,y} + P_{fB,y} + P_{fC,y}$$

$$v_{fC} = 5\ m/s$$ سپس جایگذاری می‌کنیم

$$0 = 0 - (0/2\,M)\,v_{fB}\sin 50^\circ + (0/3\,M)(5)\sin 80^\circ$$

$$\Rightarrow v_{fB} = 9,64\ m/s = 9,6\ m/s$$

(ب) سرعت قطعهٔ A چقدر است؟

$$P_{ix} = P_{fx}$$

$$P_{ix} = 0$$ به دلیل سکون اولیه جسم

$$P_{fA,x} = -0/5\,M\,v_{fAx} = -(0/5\,M)\,v_{fA}$$

$$P_{fB,x} = 0/2\,M\,v_{fBx} = (0/2\,M)\,\underbrace{v_{fB}}_{9,64\ m/s}\cos 50^\circ$$

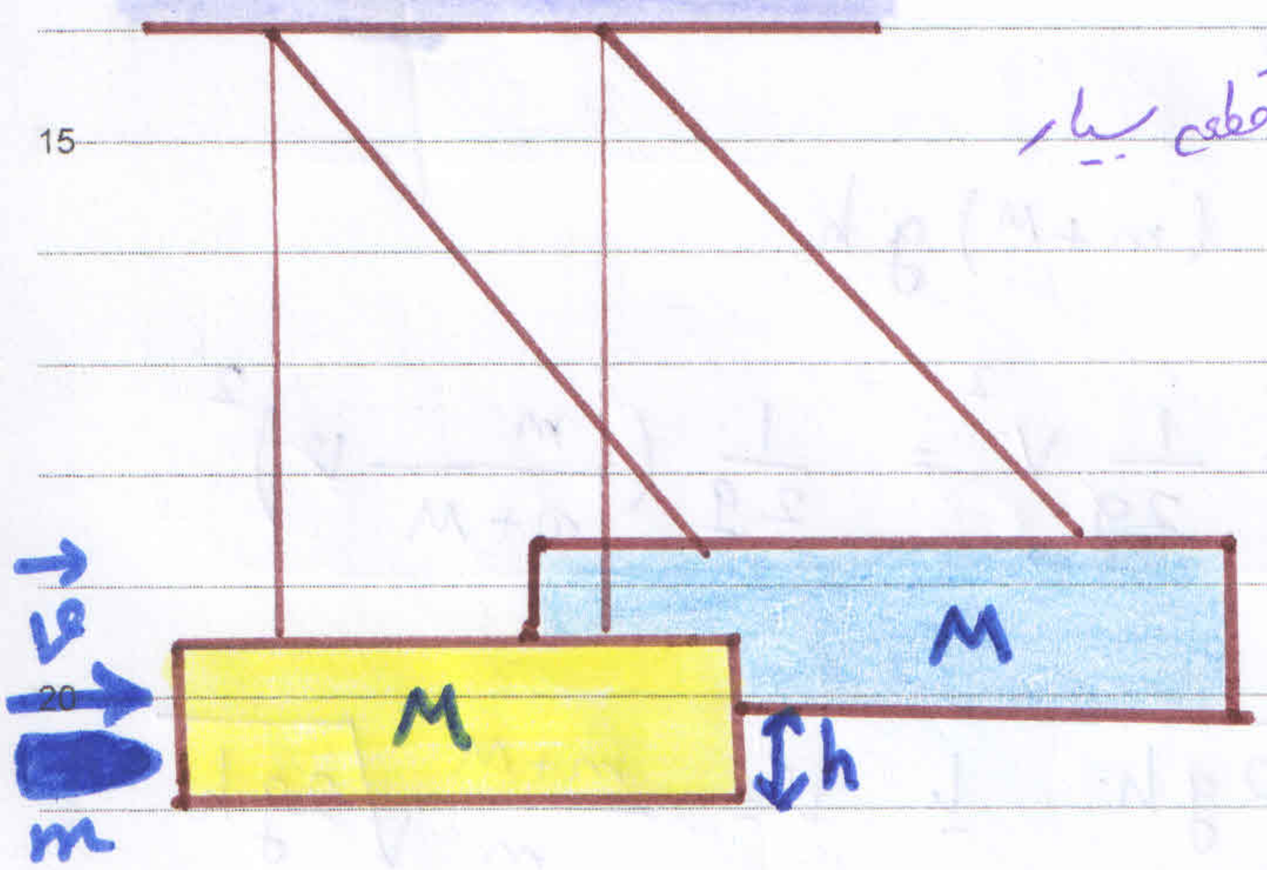
$$P_{fC,x} = (0,3\,M)\,v_{fC,x} = (0,3\,M)\,\underbrace{v_{fC}}_{15\ m/s}\cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow v_{fA} = 3\ m/s$$

Soroush

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مثال دهم - (مثال ۹-۹ هالیدی) آونگ بالیستیک از قطعهٔ چوبی بزرگی به جرم $M = 5,4\,kg$ که با دو رشتهٔ طنابِ سبک آویزان شده است، تشکیل شده است. گلوله‌ای به جرم $m = 9,5\,gr$ به درون آن شلیک می‌شود و به سرعت در آن به حال سکون می‌رسد. در این حالت مجموعه قطعه + گلوله به طرف بالا به نوسان درمی‌آید و مرکز جرم مجموعه در لحظه‌ای که آونگ در انتهای مسیر نوسانی به طور موقت به حال سکون می‌رسد به فاصلهٔ قائم $h = 6,3\,cm$ بالاتر رفته است. سرعت قبل از برخورد گلوله چقدر است؟



برخورد در سیستم گلوله - قطعه بسیار کوتاه مدت است و بنابراین:

۱- نیروی گرانشی وارد بر قطعه با نیروی حاصل از طناب‌ها در حال تعادل است ۲- برخورد یک بُعدی است و جهت حرکت مجموعه درست در حین برخورد، برآیند نیروی خارجی وارد بر گلوله - قطعه صفر است.

لحظهٔ قبل و بعد از برخورد یکسان است

Soroush

۲۸

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

⇐ با استفاده از تکانه خطی داریم:

قبل از برخورد i بعد از برخورد f

$$P_i = P_f \Rightarrow m v + 0 = (M+m) V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{m+M} v$$

در مرحله بعدی

$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$\frac{1}{2}(m+M) V^2 = (m+M) g h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g} V^2 = \frac{1}{2g} \left(\frac{m}{m+M} v \right)^2$$

$$\text{از } V = \sqrt{2gh} \text{ و } v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

$$v = 630 \text{ m/s}$$

۲۹

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

ضربه :

تغییر تکانه را ضربه می‌گویند.

$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$ یا $d\vec{P}$

برای یک ذره

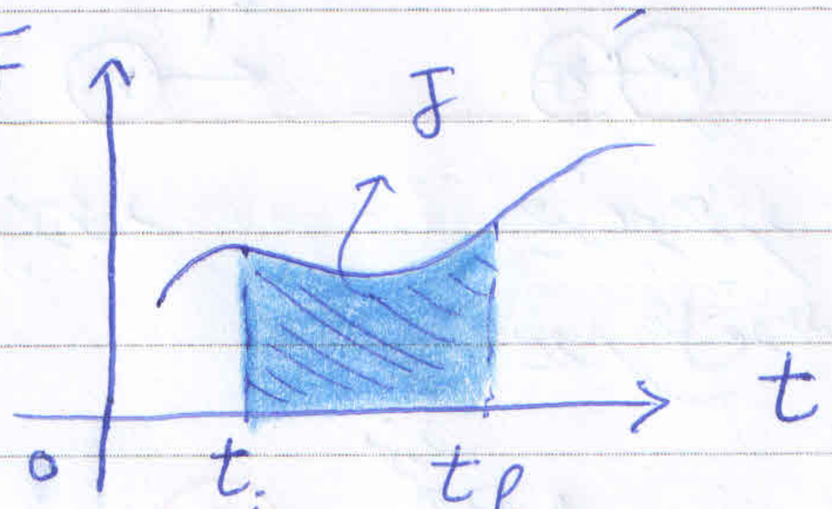
$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ طبق قانون دوم نیوتن

$d\vec{P} = \vec{F}\,dt \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$

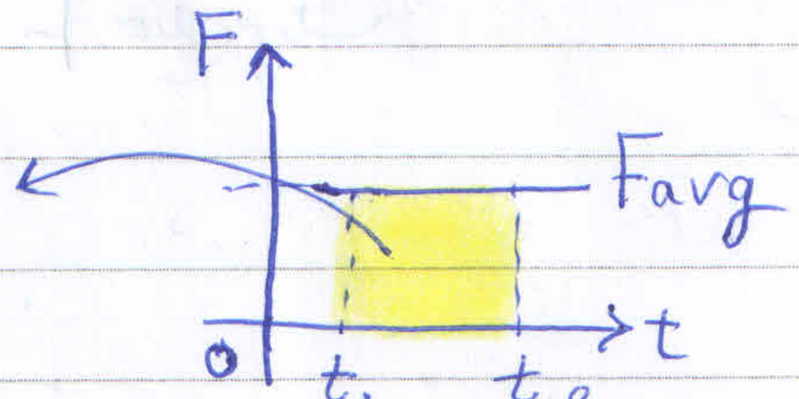
$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$

یعنی در بر خورد.

در ضربه توجه ما روی یک از اصطکاک در مسأله است.



$\vec{J} = \int \vec{F}\,dt$



$\vec{J} = F_{avg}\,\Delta t$

یکای ضربه چیست؟ N.S

۳۰

Subject:

Year: Month: Day: ( )

$$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{P}$$

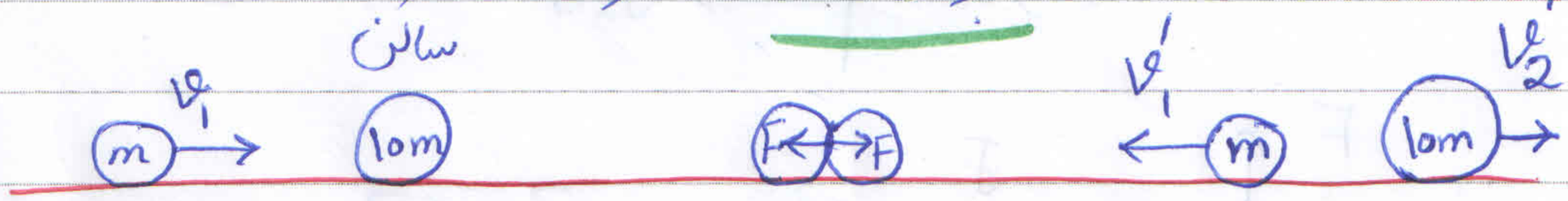
$$J_x = \vec{P}_{f,x} - P_{i,x}$$

جهت ضربه در جهت تغییر سرعت است.

$$J_y = P_{f,y} - P_{i,y}$$

$$\uparrow\uparrow \vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t \downarrow\downarrow} \quad (A)$$

نکته مهم: در برخوردهای در زمان بسیار کوتاه نیروی وارد شده به جسم بسیار بزرگ می‌شود. با اینحال می‌توان از پایستگی تکانه خطی حین برخورد استفاده کرد.



قبل از برخورد — حین برخورد — بعد از برخورد

نیروی عمل و عکس العمل

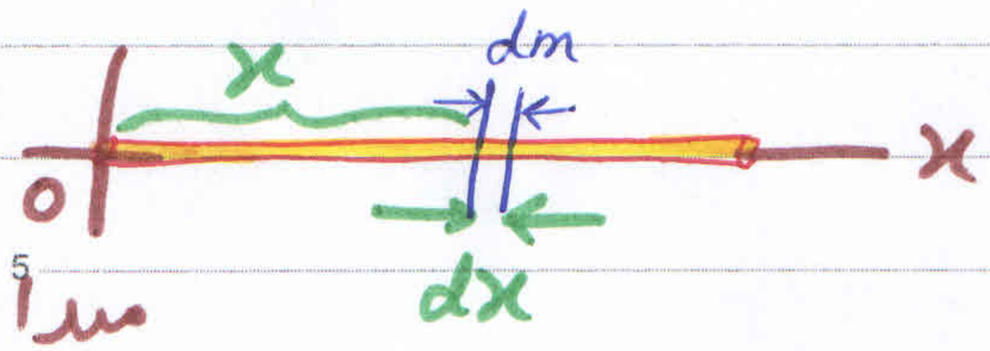
$$\vec{F}_{\text{خیلی بزرگ}} = \frac{\Delta P_{\text{بزرگ}}}{\Delta t_{\text{زمان خیلی کوچک}}} \quad (A)$$

تکانه سیستم بعد از برخورد = تکانه سیستم قبل از برخورد : حین برخورد

Soroush

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

مثال ۱۱ مرکز جرم یک میله نازک به طول L و جرم M



مبدأ

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$dm = ?$

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dl = dx} \Rightarrow dm = \frac{M}{L}dx$$

$$\Rightarrow x_{com} = \frac{1}{M}\int x\left[\frac{M}{L}dx\right]$$

$$= \frac{1}{M}\frac{M}{L}\int_{x=0}^{x=L} x\, dx$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}x^2\Big]_0^L = \frac{1}{2}L^2 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{L} \times \frac{1}{2}L^2 = \frac{1}{2}L$$

که حدس خودمان است.

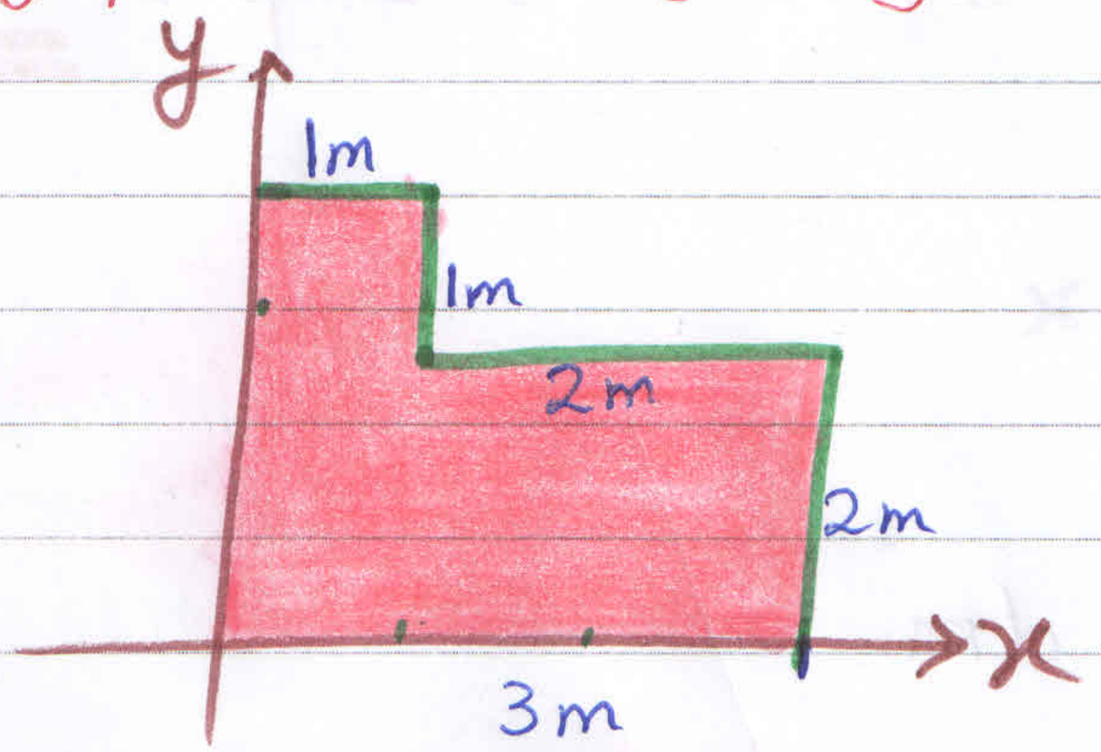
۳۲

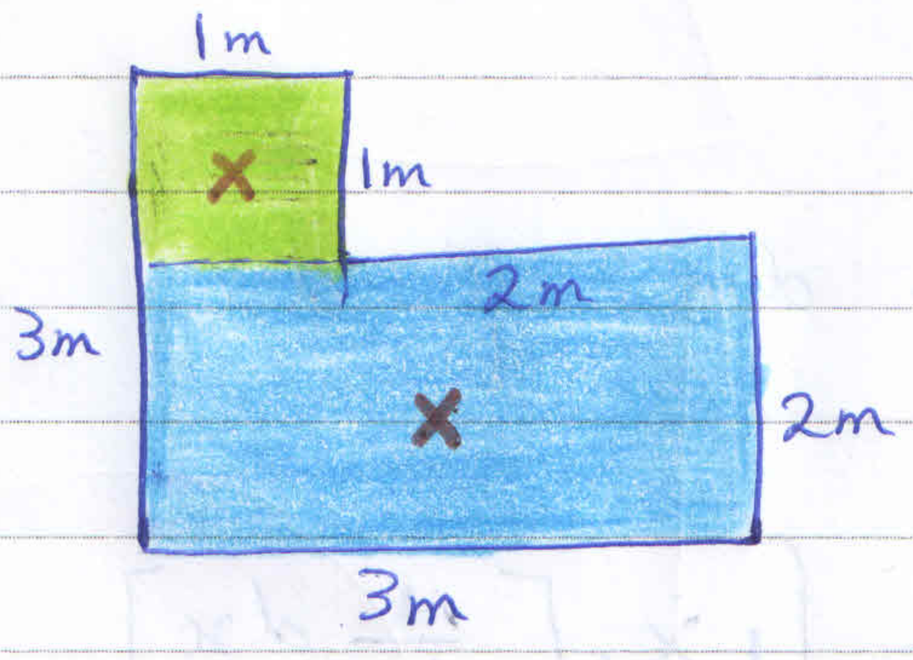
Subject:

page: ( )

Year : Month : Day : ( )

مثال ۱۲ مرکز جرم جسم تخت مقابل که یکنواخت است و جرم کل M است؟





// ناحیه سبز رنگ m_1 ؛ $x_{com} = 0/5\,m$ ؛ $y_{com} = 2/5\,m$

// ناحیه آبی رنگ m_2 ؛ $x_{com} = 1/5\,m$ ؛ $y_{com} = 1\,m$

جرم کل M	m_1
مساحت کل $1m^2 + 6m^2 = 7m^2$	$1m^2$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{M \times 1}{7}$$

کل M m_2

$7m^2$ $6m^2$ $\Rightarrow$

$$m_2 = \frac{6M}{7}$$

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

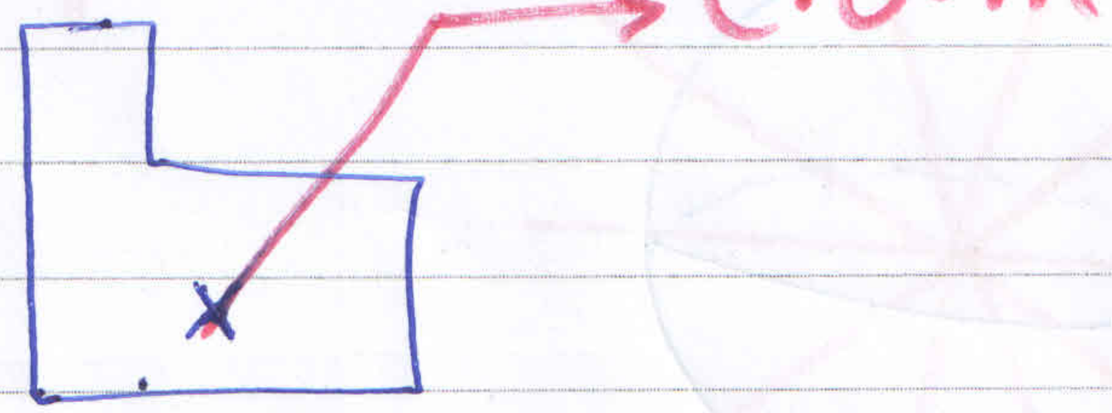
$$\Rightarrow x_{Com}^{\text{مجموعه}} = \frac{m_1 \times 0/5 + m_2 \times 1/5}{M}$$

$$= \frac{\frac{1}{7}M \times 0/5 + \frac{6}{7}M \times 1/5}{M} \overset{?}{=} 1,36\,m$$

$$y_{Com} = \frac{m_1 \times 2/5 + m_2 \times 1}{M}$$

$$= \frac{\frac{1}{7}M \times 2/5 + \frac{6}{7}M \times 1}{M} \overset{?}{=} 1,21\,m$$

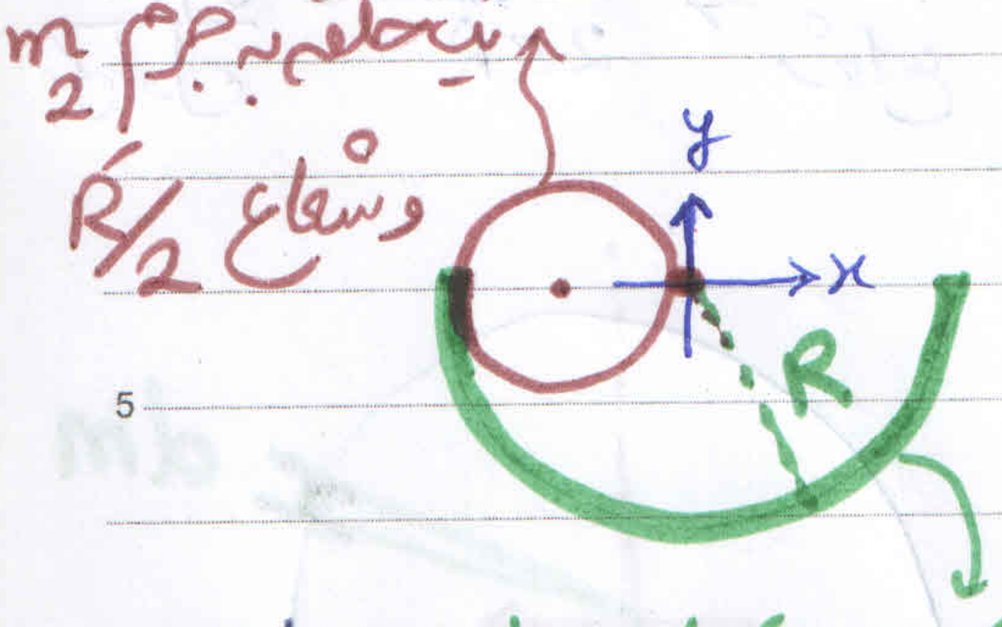
⇐ محل مرکز جرم معلوم می‌شود.



Soroush

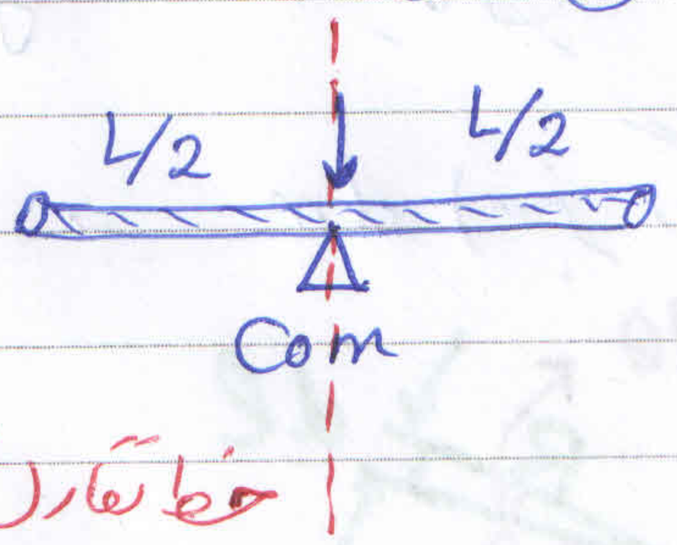
Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

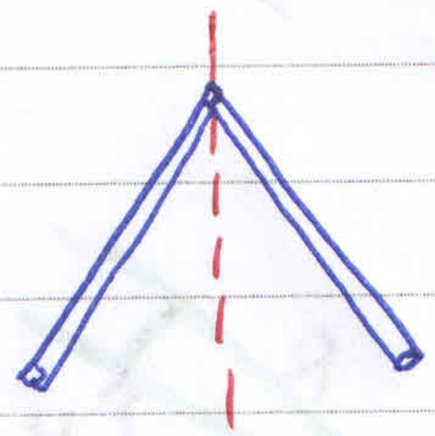
مثال سیزدهم ۱۳ مرکز جرم مجموعه زیر را به دست آورید.



برای انجام این مرکز جرم را به دست بیاوریم، لازم است که مرکز جرم حلقه را جداگانه و مرکز جرم نیمدایره را جداگانه محاسبه نیم و بعد با هم در نظر بگیریم.

در محاسبه مرکز جرم تقارن بسیار مهم است، مثلاً مرکز جرم یک خط کش با چگالی یکنواخت مرکز آن است.

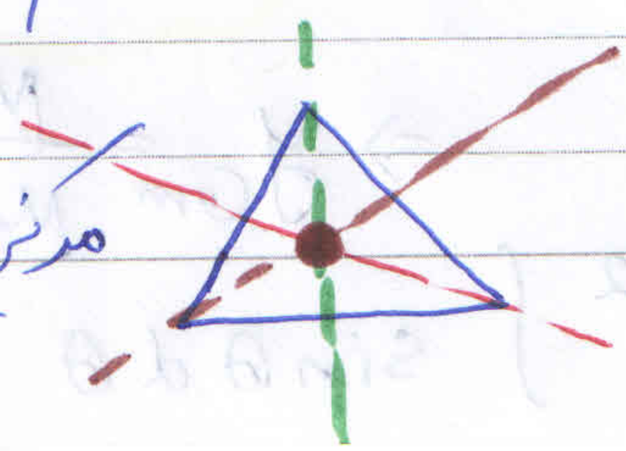




خط تقارن: مرکز جرم این دو میله روی خط تقارن است.

خط تقارن: مرکز جرم روی این خط است.

مرکز جرم روی تقاطع خطوط تقارن است.



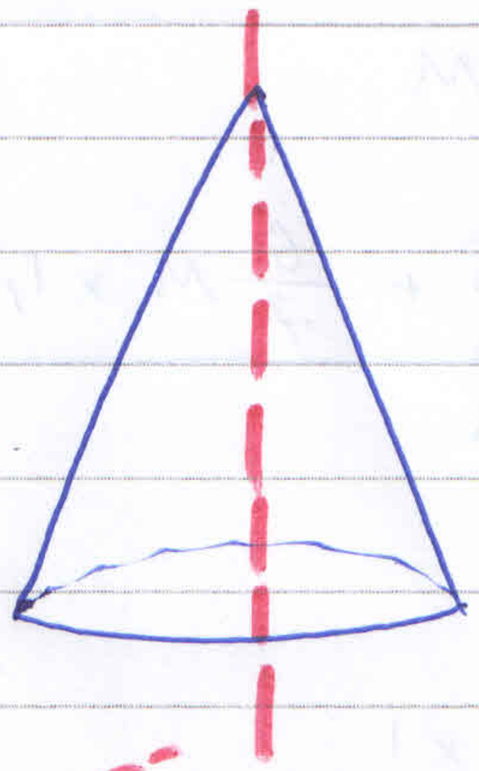
Soroush

۳۵

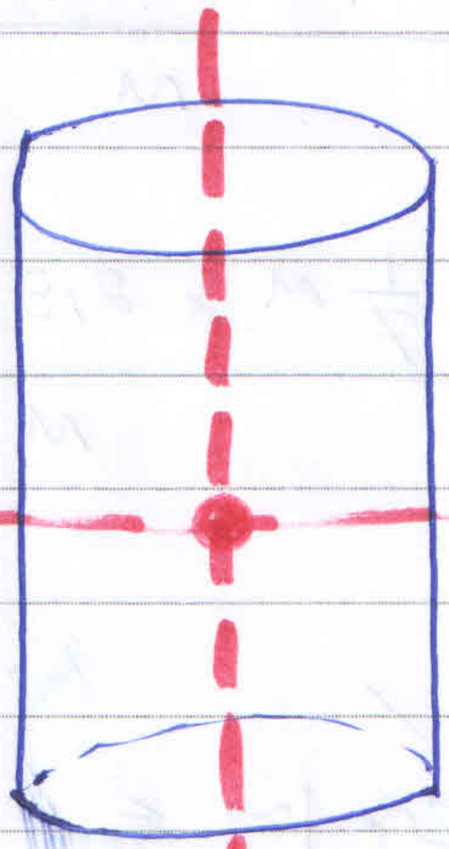
page : ( )

Subject:

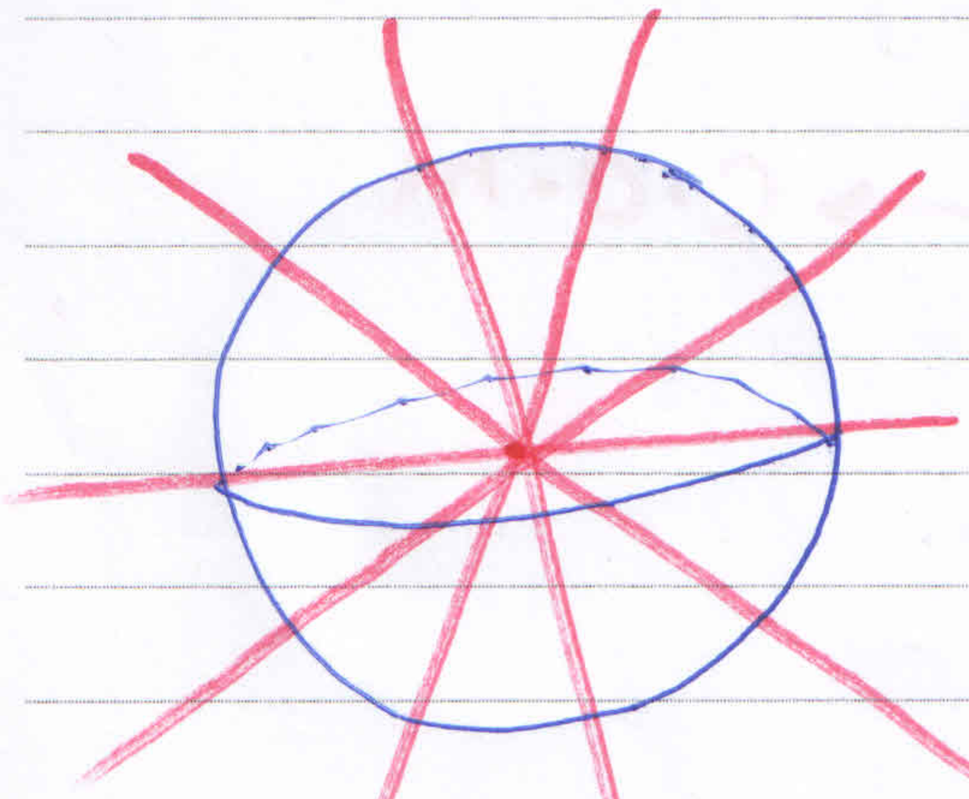
Year : Month : Day : ( )



محور تقارن



محور تقارن



تقاطع محور تقارن = C o m

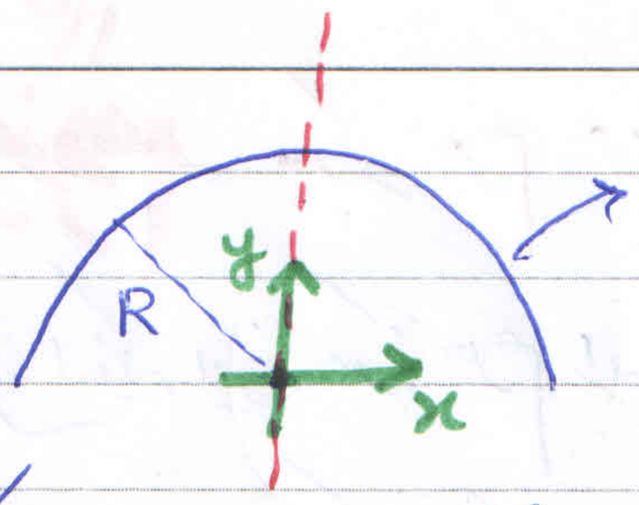
۳۶

خط تقارن

page : ( )

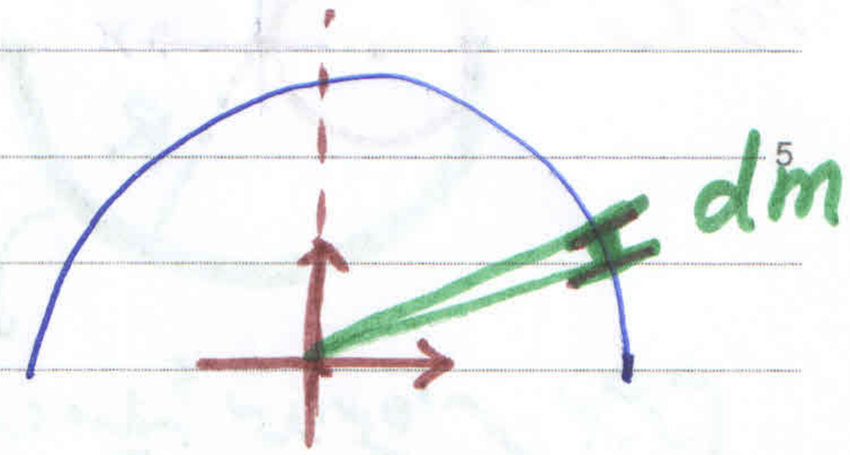
Subject:

Year : Month : Day : ( )



M جرم
R شعاع $\Rightarrow \frac{M}{\pi R} = \frac{\text{جرم کل}}{\text{طول کل}}$

یک نیم‌دایره با چگالی یکنواخت.



حتماً روی این خط تقارن است. Com

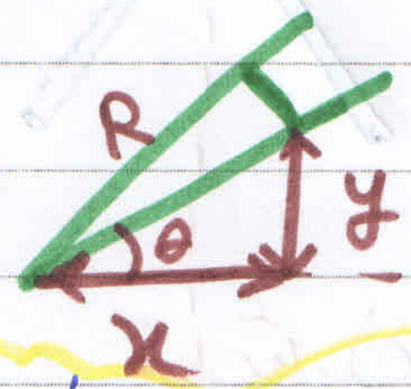
$y_{com} \neq 0$ ، $x_{com} = 0$ پس

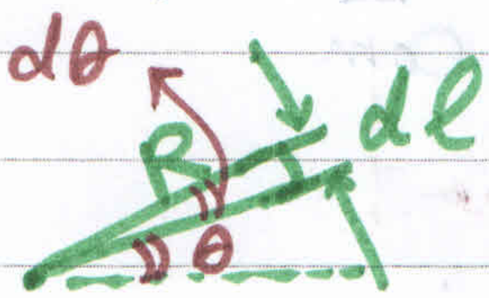
$$y_{com} = \frac{1}{M_{کل}} \int y \, dm$$

dm دیفرانسیلِ جرم (بخش کوچکی از جرم روی میله)

y فاصلهٔ ایمانِ dm از مبدأ (بخشِ y اَش)

به dm (سبز رنگ) نگاه کنید:





$$\frac{M}{\pi R} = \frac{dm}{d\ell} \Rightarrow dm = \frac{M}{\pi R} d\ell$$ وجود دارد $d\ell$ در طولِ dm

$$d\ell = R\,d\theta$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{\pi R}(R\,d\theta)$$

$$y = R\sin\theta$$

$$\Rightarrow y_{com} = \frac{M_{Tot}}{M_{Tot}} \frac{\pi R}{} \int \underbrace{R\sin\theta}_{y} (R\,d\theta)$$

$$y_{com} = \frac{1}{\pi R} R^2 \int \sin\theta \, d\theta$$

Soroush

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

$$y_{com} = \frac{1}{\pi R} \int R^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=180^\circ} \sin\theta \, d\theta$$

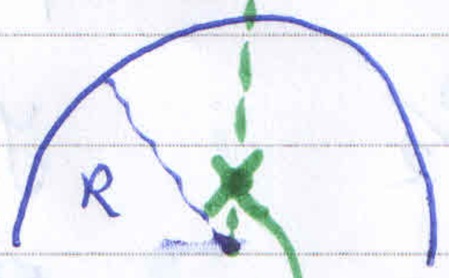
$$\left[-\cos\theta\right]_0^{180} = -\cos(180^\circ) - (-\cos 0^\circ)$$

$$= -(-1) - (-1)$$

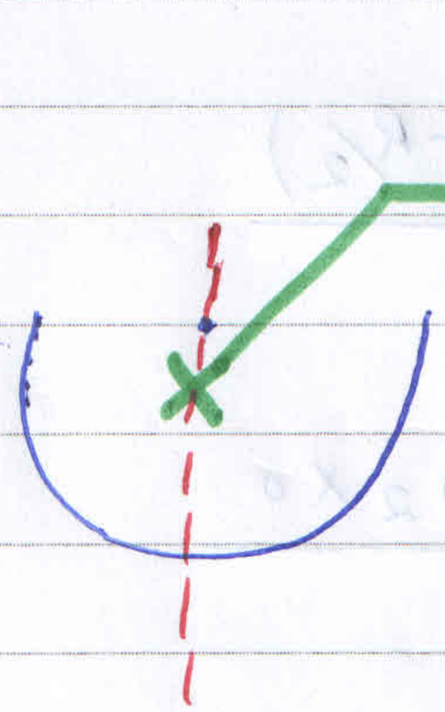
$$= +2$$

$$y_{com} = \frac{2R}{\pi}$$

یعنی میله نیم‌دایره‌ای به شعاع R و جرم M مرکز جرمش می‌شود:



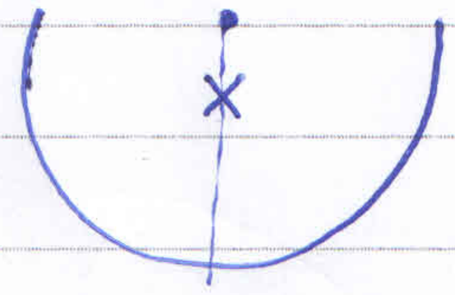
اگر میله برعکس شود:



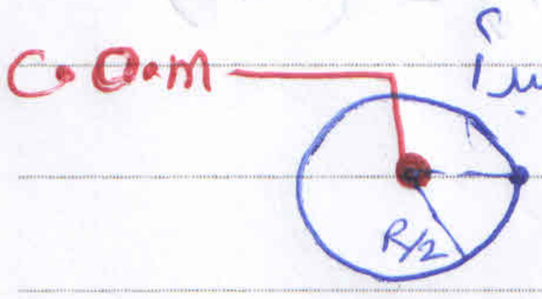
$$y_{com} = \frac{\downarrow}{-} \frac{2R}{\pi}$$

مسئلهٔ یازدهم

برای نیمدایره



$$y_{com} = \frac{2R}{\pi}$$



برای دایره کامل مرکز دایره می‌شود

$$x_{com} = -R/2$$

مرکز جرم آن

(و) ذره داریم

$$m_1 \quad ; \quad x_{com} = -R/2 \quad ; \quad y_{com} = 0$$

$$m_1 \quad ; \quad x_{com} = 0 \quad ; \quad y_{com} = -\frac{2R}{\pi}$$

مجموعه

$$x_{com} = \frac{m_1 x_0 + m_2 (-R/2)}{m_1 + m_2}$$

مجموعه

$$y_{com} = \frac{m_1 \left(-\frac{2R}{\pi}\right) + m_2 x_0}{m_1 + m_2}$$

Subject:

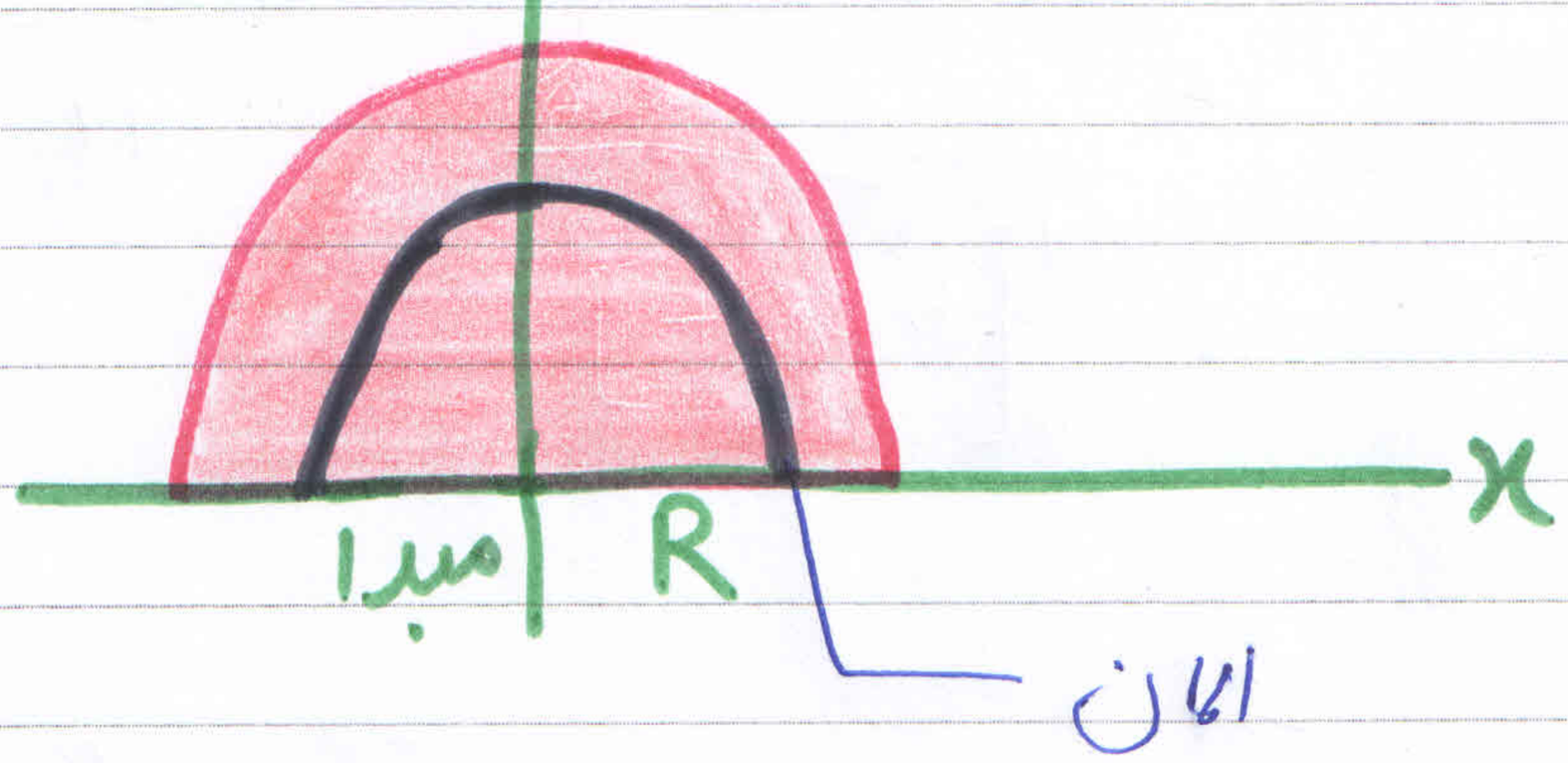
Year : Month : Day : ( )

page : ( )

تعجده دانشجویان

۱۴

مثال **چهاردهم** - مرکز جرم یک دیسک نازک به جرم m و شعاع R که نصف آن بریده شده است.



Subject

Date

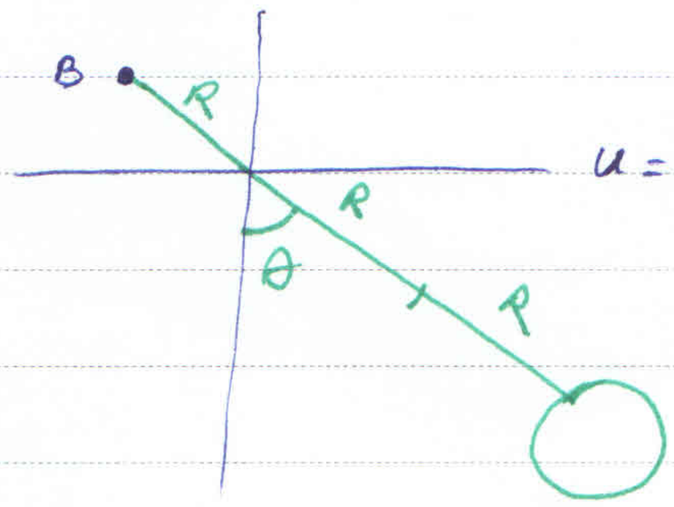
۹-۶ هر دو ویرایش

۹-۶- مطابق شکل کره‌ای به جرم M و شعاع R، به میله‌ای به جرم M و طول $L = 3R$ جوش داده شده است. مجموعه می‌تواند آزادانه حول محور عمود بر صفحه در نقطه O دوران کند.

الف) لختی دورانی مجموعه را نسبت به محور دوران به دست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای دستگاه را در لحظه‌ای که از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد، به دست آورید.

$$I_{cm\,\text{میله}} = \frac{1}{12} ML^2 \quad ; \quad I_{cm.\text{کره}} = \frac{2}{5} MR^2$$



$$I_{\text{میله}} = I_{cm} = \frac{1}{2} M(2R)^2 = 2MR^2$$

$$I_{\text{کره}} = I_{cm\,\text{کره}} + M(2R)^2$$

$$= \frac{2}{5} MR^2 + 4MR^2 = 4.4MR^2$$

$$I_{\text{ک}} = I_{\text{کره}} + I_{\text{میله}} = (2 + 4.4)MR^2 = 6.4MR^2$$

$$K_1 = 0 \qquad K_2 = \frac{1}{2} I_{\text{ک}} (\omega_{max})^2$$

$$U_1 = 0 - Mg(2R)\cos 60^\circ = -MgR$$

$$U_2 = 0 - Mg(2R)$$

$$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 - MgR = \frac{1}{2} I_{\text{ک}} (\omega_{max})^2 - Mg(2R)$$

$$MgR = \frac{1}{2}(6.4) MR^2 (\omega_{max})^2$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{3.2R}}$$

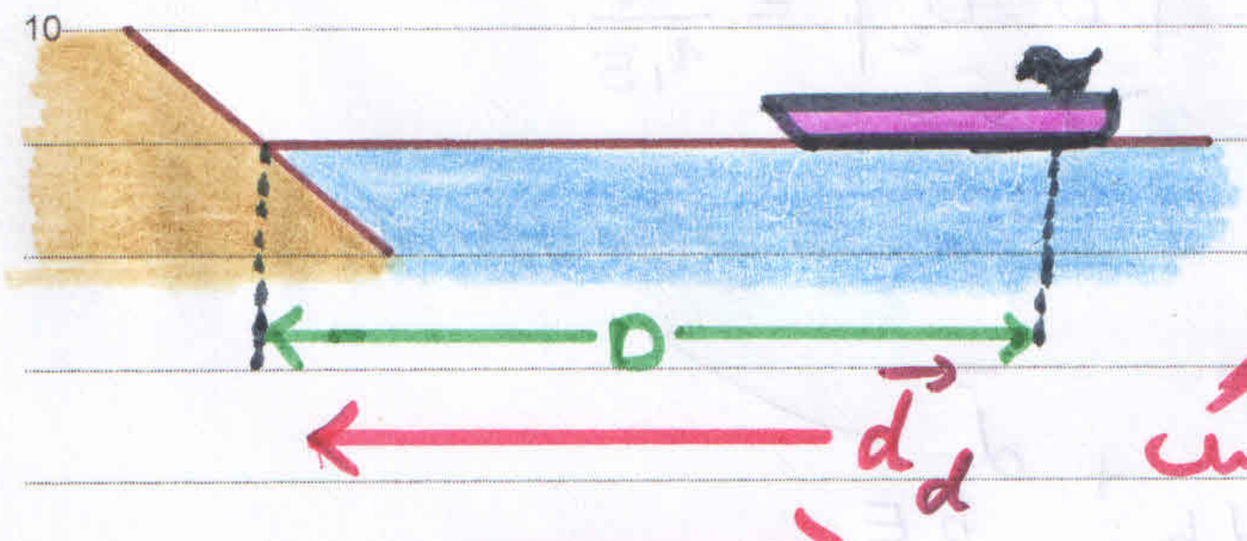
PAPCO

ویرایش دهم ۹-۱۷

Subject:
Year : Month : Day : ( )

page : ( )

۹- ۱۷ (۹-۱۷)*** ویرایش هشتم در شکل زیر، سگی به جرم 4,5 kg را نشان داده‌ایم که به فاصلهٔ D = 6,1 m از ساحل روی قایقی ته صاف به جرم 18kg ایستاده است. این سگ به اندازهٔ 2,4 m در طول قایق به ساحل نزدیک می‌شود و سپس مجدداً می‌ایستد. با فرض آنکه هیچ اصطکاکی بین قایق و آب نباشد، فاصله‌های سگ از ساحل چقدر می‌شود؟



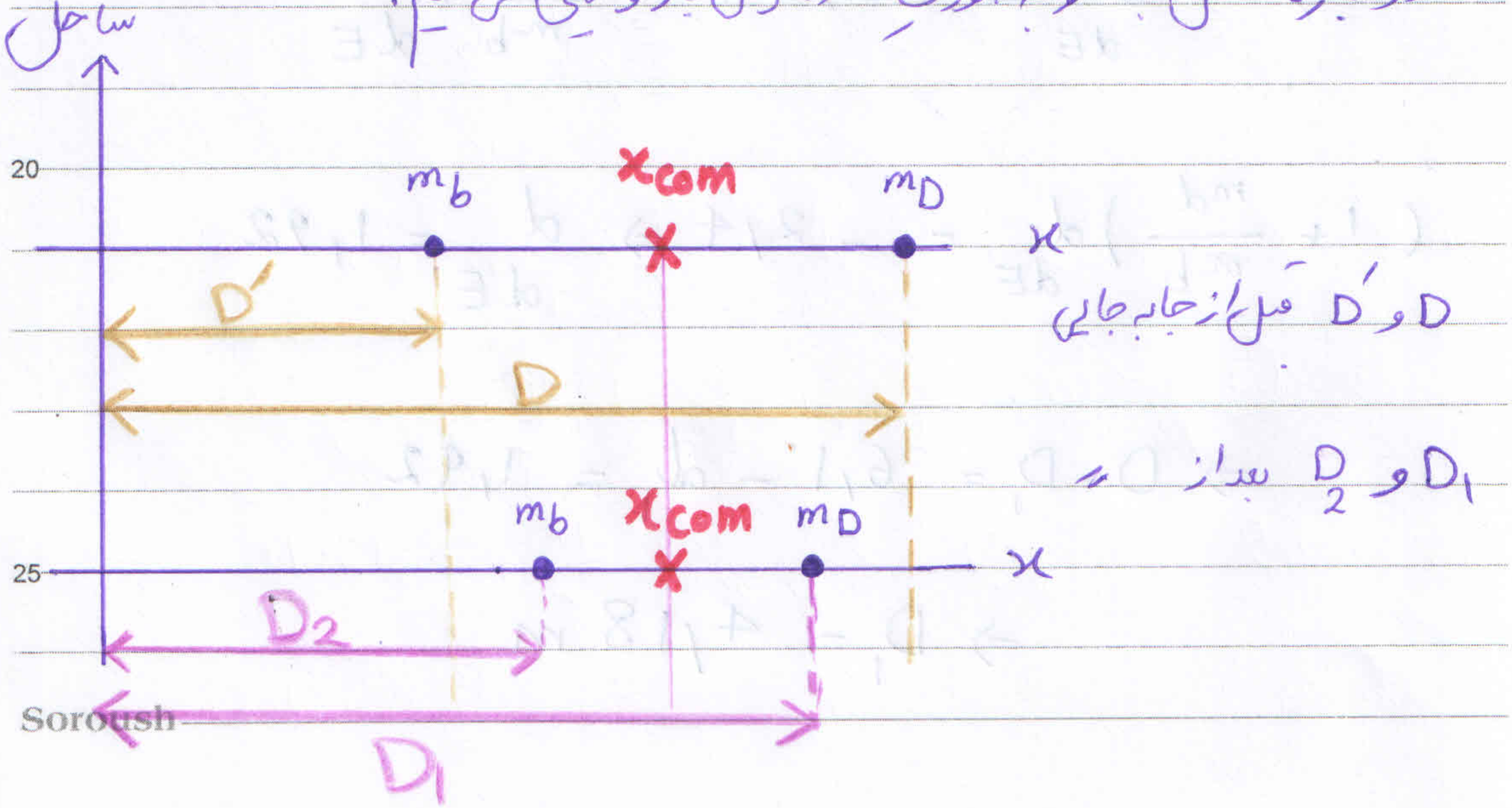
سگ dog: d

قایق boat: b

جابه‌جایی سگ $\vec{d}_d$

جابه‌جایی قایق $\vec{d}_b$

دوباره شکل بالا را به صورت ساده‌تری بازنویسی می‌کنیم.



D و D' قبل از جابه‌جایی

D_1 و D_2 بعد از "

Soroush

page: ( )

Subject:

Year: Month: Day: ( )

از آنجا که سیستم سگ + قایق هیچ نیروی خارجی ندارد، مرکز جرم بدون تغییر می‌ماند:

$$x_{com} = \frac{m_d x_d + m_b x_b}{m_d + m_b} = \frac{m_d D + m_b D'}{m_d + m_b} = \frac{m_d D_1 + m_b D_2}{m_d + m_b}$$

$$\Rightarrow m_d (D - D_1) = -m_b (D' - D_2)$$

$$\Rightarrow |D - D_1| = \frac{m_b}{m_d} |D' - D_2| = \frac{18}{4,5}$$

$|D - D_1|$: جابه‌جایی سگ نسبت به زمین

$|D' - D_2|$: جابه‌جایی قایق نسبت به زمین

$$\vec{d}_{dE} = \vec{d}_{db} + \vec{d}_{bE}$$

مجهول مسئله D_1 است.

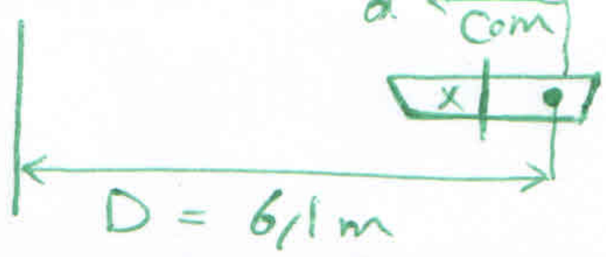
$$\Rightarrow -\vec{d}_{dE} = -2,4\,\hat{i} + \frac{m_d}{m_b} \vec{d}_{dE}$$

$$\left(1 + \frac{m_d}{m_b}\right) d_{dE} = -2,4 \Rightarrow d_{dE} = 1,92$$

$$\Rightarrow D - D_1 = 6,1 - D_1 = 1,92$$

$$\Rightarrow D_1 = 4,18\ m$$

۴۳



d = 2/4 m

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

ووش دیگر

$$F_{ext}=0 \Rightarrow v_{com} = v_{0,com} = 0$$

$$\Rightarrow x_{com} = x_{0,com} \Rightarrow \Delta x_{com} = 0$$

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \Delta x_{com} = \frac{m_d \Delta x_d + m_b \Delta x_b}{m_d + m_b}$$

صفر است

$$\Rightarrow \Delta x_b = \frac{-m_d}{m_b} \Delta x_d$$

$+x$ ↑ ، $-x$ ←

جابجایی قایق بر زمین = جابجایی سگ بر زمین + جابجایی سگ نسبت به قایق

$$d = +\Delta x_d - \Delta x_b$$

$$= \Delta x_d + \frac{m_d}{m_b} \Delta x_d$$

$$= \left(1 + \frac{m_d}{m_b}\right) \Delta x_d$$

جابجایی سگ نسبت به زمین $\Delta x_d = \frac{d}{1 + m_d/m_b} =$

$$\Rightarrow D - \Delta x_d =$$

Soroush

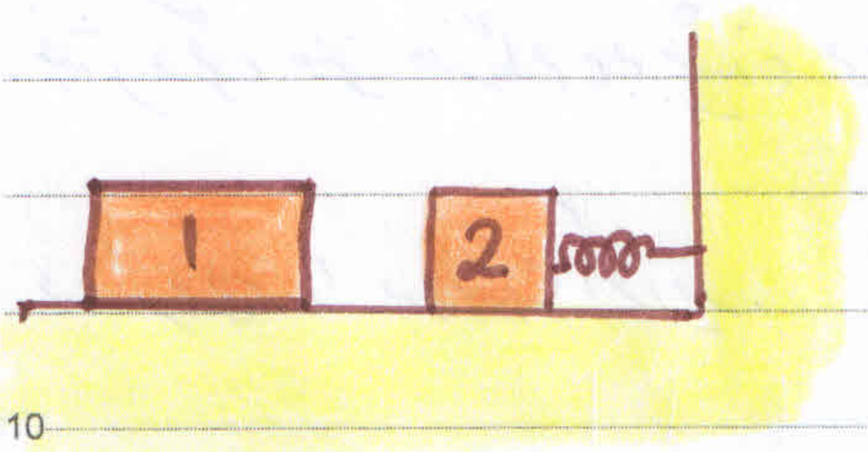
فاصله سگ بعد از جابجایی نسبت به زمین

Subject:
Year : Month : Day : ( )

page : ( )

حین تدریس حل می‌شود.

۹- در شکل زیر، $k=200\frac{N}{m}$ و $m_1=2\,kg$ و $m_2=1\,kg$ روی سطح بدون اصطکاک است. در حالیکه $v_1=4m/s$ جسم ۱ به قطعه ۲ برخورد می‌کند و دو قطعه به یکدیگر می‌چسبند. هنگامی که قطعه‌ها به هم چسبیده برای لحظه‌ای متوقف می‌شوند، فشردگی فنر چقدر است؟



$$p_1 = p_2$$

$$0 + m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 = \frac{4}{3}\ m/s$$

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{25} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

۴۵

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

حین تدریس حل شد.

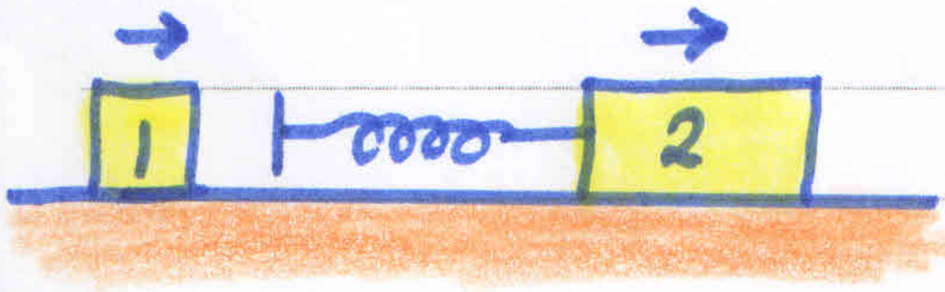
۹- ***۵۹ برای قطعه ۱ $m_1 = 2\,kg$ ، $v_1 = 10\,m/s$ به سمت راست

حرکت می‌کند و قطعهٔ ۲ $m_2 = 5\,kg$ ، $v_2 = 3\,m/s$ به سمت راست حرکت می‌کند. سطح

بدون اصطکاک و $k = 1120\,\frac{N}{m}$ و فنر متصل به قطعهٔ ۲ است. پس از برخورد،

فشردگی فنر هنگامی به بیشینه می‌رسد که هر دو قطعه سرعت یکسانی دارند. این max

فشردگی را به دست آورید.



با استفاده از قضیه کار-انرژی و پایستگی تکانه

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{35}{7} = 5\,m/s$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow x =$$

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

ویرایش دهم

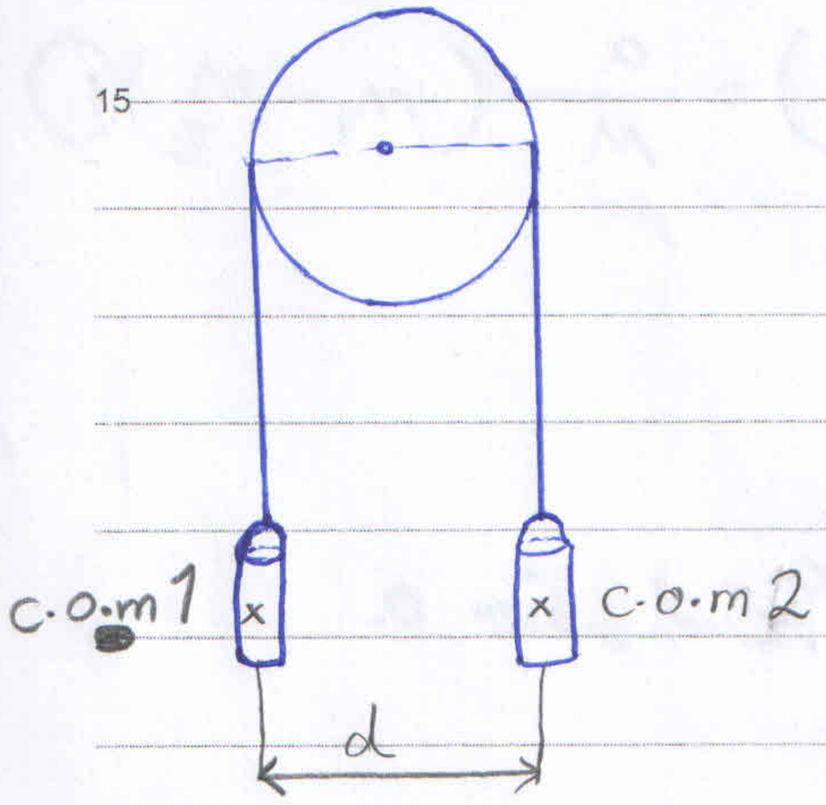
۹ـ ۱۰۵ (۹ـ ۹۹) در شکل زیر، دو سطل یکسان با جرم (سطل + شکر) ویرایش هفتم 500gr وجود دارد. مرکز جرم‌ها 50 mm از هم فاصله دارند. فاصلهٔ افقی بین مرکز سطل ۱ و مرکز جرم سیستم در حالت‌های زیر چقدر است؟

(الف) در ابتدا

(ب) بعد از انتقال 20gr شکر از سطل ۱ به سطل ۲؟

بعد از انتقال شکر و رها کردن سطل‌ها،

(ج) جهت حرکت و (د) شتاب حرکت مرکز جرم سیستم را به دست آورید.



$d = 50\ mm$

(الف) مبدأ را روی (۱) قرار می‌دهیم.

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 25\,mm$$

(ب) در این حالت مبدأ را مرکز دو جرم در نظر بگیرید:

$$x_{com} = \frac{480 \times (-25) + 520(25)}{1000} = 1\,mm$$

فاصله از سطل (۱) $25 + 1 = 26\ mm$

۴۷

page: ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

ج) وقتی برخورد می‌شوند:

$$y_{com} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{480(y) + 520(-y)}{1000}$$

$$= \frac{y(-40)}{1000} = -\frac{y}{25}$$

در جهت $\hat{y}-$ یعنی به سمت جرم سنگین‌تر

د)

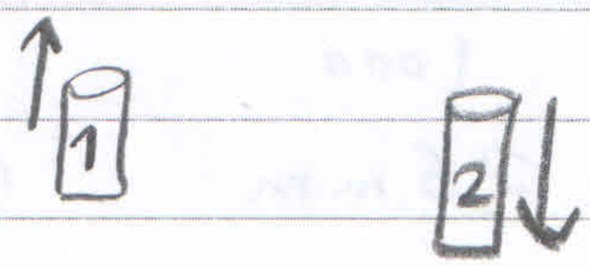
$$a_{com} = ?$$

$$a_{com} = \frac{1}{M_T}(m_1 a_1 + m_2 a_2) = \frac{a}{M}(m_1 - m_2) \quad (1)$$

$$a_1 = -a_2 = a$$

a چقدر است؟

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases} \Rightarrow a = \dots$$



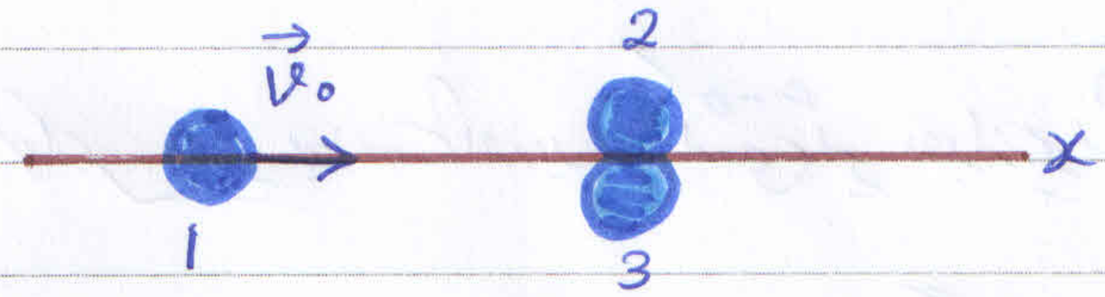
Soroush

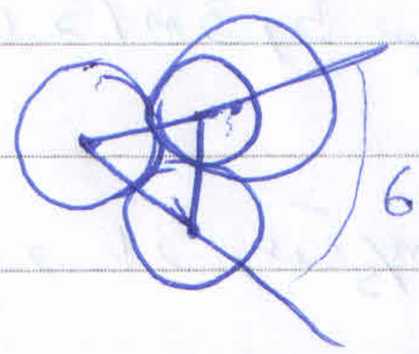
حین تدریس حل شد.

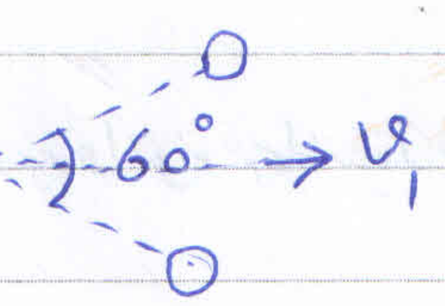
Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

۹- ۱۰۷ (۹ - ۹۷) سه گلوله یکسان در شکل زیر را در نظر بگیرید. سرعت گلوله ۱ ، $v_0 = 10\ m/s$ و بعد از برخورد (الف) مقدار سرعت و (ب) جهت سرعت گلوله ۱ ؟

، (ج) مقدار سرعت و (د) جهت سرعت گلوله ۳، و (ه) مقدار سرعت و (و) جهت سرعت گلوله ۱ را به دست آورید.







$$① \quad m v_0 = m v_2 \cos 30^\circ + m v_3 \cos 30^\circ + m v_1$$

$$② \quad 0 = m v_2 \sin 30^\circ - m v_3 \sin 30^\circ$$

$$② \Rightarrow v_2 = v_3$$

چون برخورد کشسان است

$$③ \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} m v_3^2$$

$v_3 = v_2$

$$v_1^2 + 8 v_1 - 20 = 0 \Rightarrow v = \begin{cases} -10 & \text{غیرقابل قبول} \\ +2 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$v_2 = 6,9\ m/s = v_3$$

۴۹

ویرایش دهم

page: ( )

Subject:

Year: Month: Day: ( )

۹-۱۱۸ (۹-۱۰۶) و.هـ.م

واگن مسطحی به جرم 2140kg را در نظر بگیرید که در تزدیکی سکوی راه‌آهنی به حال سکون قرار دارد و با اصطکاک ناچیزی می‌تواند به حرکت درآید. یک کشتی‌گیر سومو به جرم 242 kg که روی سکو با سرعت $5,3 \frac{m}{s}$ در امتداد موازی با ریل‌ها در حال دویدن است، به روی واگن می‌پرد. مقدار سرعت حرکت واگن را در حالهای زیر به دست آورید: کشتی‌گیر بعد از پرش (الف) روی واگن می‌ایستد،

(ب) با سرعت 5,3 m/s نسبت به واگن در همان جهت اولیه به دویدن خود ادامه می‌دهد

(ج) برمی‌گردد و با سرعت 5,3 m/s نسبت به واگن در خلاف جهت اولیه می‌دود.

دستگاه = شخص + واگن $\Leftarrow F_{ext}=0 \Leftarrow \Delta P=0$

تکانه خطی بعد از پرش و ورنشکار = تکانه خطی قبل از پرش و ورنشکار

(الف)

$$242 \times 5,3 + 2140 \times 0 = (242+2140)v$$

$$\Rightarrow v = +0,54 \text{ m/s}$$

(ب) $5,3 \frac{m}{s}$ نسبت به واگن یعنی چقدر نسبت به زمین؟

$$v_{SG} = v_{SW} + v_{Wg} \Rightarrow v_{SG} = 5,3 + v \quad (1)$$

(شخص نسبت به زمین، شخص نسبت به واگن)

$$242 \times 5,3 + 2140 \times 0 = 242(v_{SG}) + 2140v$$

$$\Rightarrow \boxed{v=0}$$

Soroush

۵۰

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

$$242 \times 5{,}3 + 0 = 242(-5{,}3 + v) + 2140v \quad (ج)$$

$$\Rightarrow v = 1{,}08 \ m/s$$

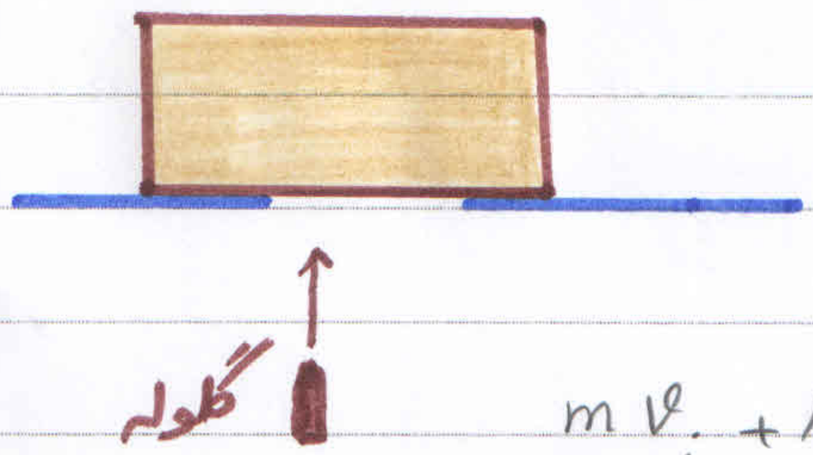
به سمت راست حرکت می‌کند.

۵۱ حین تدریس حل شد.

Subject:

Year : Month : Day : ( )

۹- ۵۴ ** (۹- ۵۲) دهم درشکل زیر گلوله‌ای به جرم 10gr و سرعت 1000 m/s به طرف بالا حرکت می‌کند و به قطعه‌ای به جرم 5kg که در حال سکون است برخورد می‌کند و بعد از عبور از مرکز جرم از آن خارج می‌شود. سرعت گلوله بعد از خروج است 400m/s. بیشینه ارتفاع جابه‌جایی قطعه را از مکان اولیه‌اش به دست آورید. هشتم



$v_f = 400 m/s$

$m = 10 gr$, $v_i = 1000 m/s$

$M = 5 kg$ $V_i = 0$

$$m v_i + M V_i = m v_f + M V_f$$

$$0/01 \times 1000 + 0 = 0/01 \times 400 + 5 \times V_f$$

$$\Rightarrow V_f = 1,2 \ m/s$$

$$V_f^2 - V_i^2 = +2 a \Delta y \Rightarrow \Delta y = \frac{(1,2)^2}{2 \times 9,8} = 0/07 \ m$$

$a = -g$

$= 7 cm$

۵۲

حین تدریس حل شد.

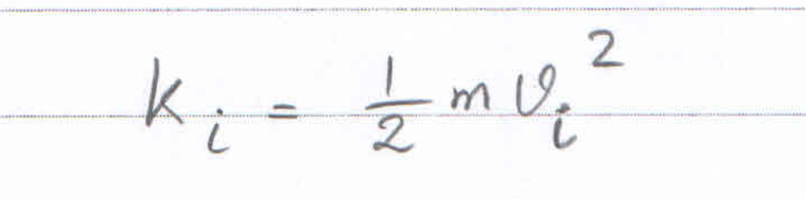
Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

۹-۵۵ (۵۷-۹) گلوله‌ای به جرم $m = 60\,gr$ با سرعت $v_i = 22\,\frac{m}{s}$ به درون لوله تفنگ فنری به جرم $M = 240\,g$ که در ابتدا روی سطحی بدون اصطکاک در حال سکون است، پرتاب کرده‌ایم. این گلوله درست در زمانی که فنر به max فشردگی اش رسیده است به لوله تفنگ می‌چسبد. افزایش انرژی گرمایی را، بر اثر اصطکاک بین گلوله و لوله، نادیده بگیرید. (الف) سرعت حرکت تفنگ فنری، بعد از گیر کردن گلوله در لوله، چقدر است؟

(ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟



(الف)

$$P_i = P_f$$

$$m v_i = (m+M) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m v_i}{m+M}$$

$$v_f = \frac{0.06 \times 22}{0.06 + 0.24} = 4,4\ m/s$$

(ب)

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M} v_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 \left(\frac{1}{m+M}\right)$$

Soroush

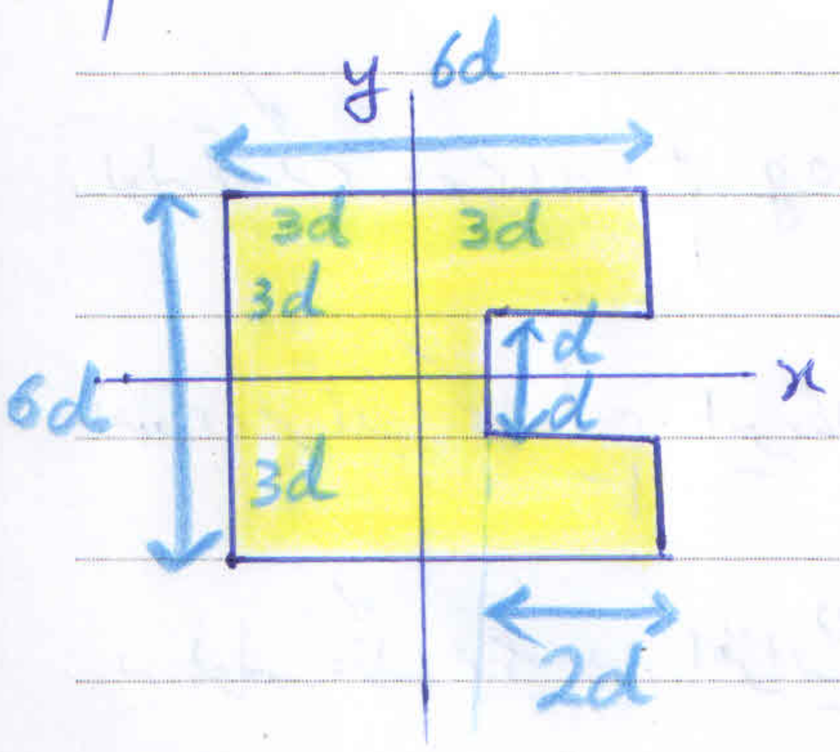
$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \left(\frac{1}{M+m} - 1\right) < 0 = U_s \Rightarrow \frac{U_s}{K_i} = 0.8$$

جعبه دانشجویان

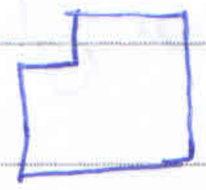
Subject:

Year : Month : Day : ( )

۹-۸۸ در تیغه مربعی شکل زیر $6d = 6m$. مختصات x و y مرکز جرم را به دست آورید.



یا



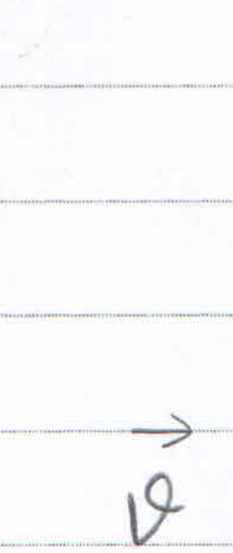
۵۴

حین تدریس حل شد.

Subject:

Year : Month : Day : ( ) page : ( )

۹-۱۲۰ (۹-۱۰۲) مردی به جرم 80kg روی نردبان آویخته شده از بالون به جرم 320kg (با در نظر گرفتن مسافر درون سبد) وجود دارد. بالن در ابتدا ساکن بر زمین ساکن است. اگر این شخص با سرعت 2/5 m/s نسبت به نردبان شروع به صعود کند، حرکت بالون (الف) در چه جهت و (ب) با چه سرعتی خواهد بود؟ (ج) در زمانی که بالا رفتن از نردبان متوقف می‌شود، سرعت بالن چقدر می‌شود؟



دستگاه مسأله حاضر = شخص + بالون + نردبان

(الف)

در غیاب نیروهای خارجی، مرکز جرم جایه جا نمی‌شود و ثابت باقی می‌ماند. چون بالون و متعلقات در ابتدا ساکن بوده است، پس $v_{com}=0$. اگر شخص به سمت بالا از نردبان بالا رود، بالون به سمت پایین حرکت می‌کند تا شرط $v_{com}=0$ حفظ شود.

$$\vec{v}_{SG} = \vec{v}_{SB} + \vec{v}_{BG}$$

$\vec{v}_{SG}$: شخص ← زمین

$\vec{v}_{SB}$: شخص ← بالن

$\vec{v}_{BG}$: بالن ← زمین

m: جرم شخص

M: جرم بالون

$$0 = v_{com} = \frac{m\vec{v}_{SG} + M\vec{v}_{BG}}{m+M} = \frac{m(\vec{v}_{SB} + \vec{v}_{BG}) + M\vec{v}_{BG}}{m+M}$$

۵۵

page : ( )

Subject:

Year : Month : Day : ( )

مجهول مسئله سرعت بالون نسبت به زمین است یعنی v_{BG}

$$\Rightarrow m v_{SB} + m v_{BG} + M v_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow v_{BG}(m+M) = -m v_{SB}$$

$$v_{BG} = -\frac{m}{m+M} v_{SB} = -\frac{80 \times 2{,}5}{80+320} = 0{,}5 \ m/s$$

(ج) اگر شخص بایستد بالون هم حرکتش متوقف می‌شود.

تعهده دانشجویان

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

۹-۷۲ (۹-[redacted]) برخورد دو جسم A و B هرکدام به جرم 2kg را در نظر بگیرید. سرعتهای قبل از برخورد عبارتند از $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})\ m/s$ و $\vec{v}_B = -10\hat{i} + 5\hat{j}$.

سرعت بعد از برخورد جسم A عبارتست از $\vec{v}'_A = -5\hat{i} + 20\hat{j}$. (الف) سرعت بعد از برخورد جسم B را به دست آورید. (ب) کل انرژی جنبشی چقدر تغییر می کند؟

بعضه دانشجویان

Subject:

Year: Month: Day: ( )

۹-۱۰۹ (۹-۱۱۷) دو ذره‌ی جرم‌دار با جرم‌های $m_1 = 2\,kg$ و $m_2 = 4\,kg$ با سرعت‌های اولیه‌ی $\vec{v}_1 = -4\,\hat{i} - 5\,\hat{j}$ و $\vec{v}_2 = 6\,\hat{i} - 2\,\hat{j}$ در نظر بگیرید. این دو ذره به هم می‌چسبند. سرعت بعد از الحاق ذرات را

(الف) با نمایش برداری بیابید و (ب) مقدار و (ج) زاویه‌ی آن را تعیین کنید.

Subject:

Year : Month : Day : ( )

page : ( )

تعهده دانشجویان

۱۳۶_۹ دو سورتمه یخی در فاصله‌ی کمی از یکدیگر و در امتدادی مستقیم قرار دارد. جرم هر سورتمه 22,7kg و گربه‌ای به جرم 3,63kg از سورتمه عقبی به سورتمه جلویی می‌جهد و با جهش دوم به سورتمه اول برمی‌گردد. هر دو جهش با سرعت $3,05 \frac{m}{s}$ نسبت به یخ انجام می‌شوند. (الف) مقدار سرعت‌های سورتمه اول، و (ب) مقدارهای سرعت سورتمه دوم را به دست آورید.