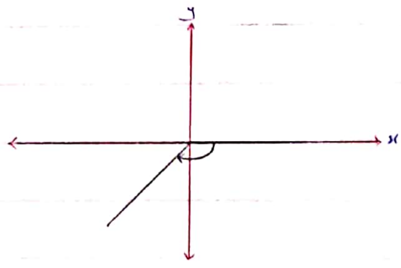
نام مبحث : مثلثات

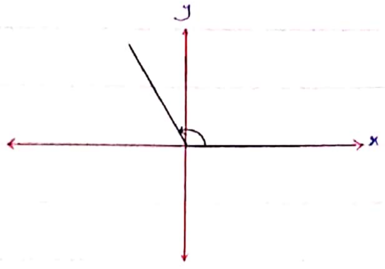
زاویه و نسبت های مثلثاتی :

زاویه دو ضلع و یک رأس دارد که در مثلثات ، رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد و یکی از دو ضلع آن در سمت مثبت محور x ها قرار دارد و اگر زاویه مثبت باشد در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت می‌کنیم تا به ضلع بعدی برسیم و اگر زاویه منفی باشد در جهت عقربه های ساعت حرکت می‌کنیم تا به ضلع بعدی برسیم.

به شکل زیر توجه کنید :



زاویه منفی



زاویه مثبت

تعریف موقعیت استاندارد :

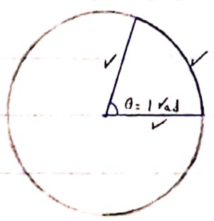
به حالتی گفته میشود که در آن رأس زاویه روی مبدأ مختصات و یکی از دو ضلع زاویه در سمت مثبت محور x ها قرار دارد.

واحد های اندازه گیری زاویه :

به دو نوع تقسیم بندی میشود : ۱- درجه (D)   ۲- رادیان (R)

تعریف درجه : اگر کل محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم بندی کنیم ، آنگاه زاویه مرکزی روبه رو به هرکمان برابر یک درجه است.

تعریف رادیان : یک رادیان زاویه مرکزی روبرو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است.



تذکر : اگر به شکل روبرو توجه کنید ، مفهوم رادیان را کاملا درک میکنید.

رابطه بین درجه و رادیان:

۱- به روش کتاب درسی:

تذکر: فقط حواستون باشه که π همان ...۳٫۱۴ حساب میشه ولی π رادیان برابر ۱۸۰ درجه است! $\qquad \dfrac{D}{180^\circ} = \dfrac{R}{\pi}$

مثال: ۳۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{\cancel{30^\circ}^{1}}{\cancel{180^\circ}_{6}} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 6R = \pi \Rightarrow \underline{R = \frac{\pi}{6}}$$

مثال: $\frac{\pi}{8}$ رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\cancel{\pi}}{8}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow D = 180^\circ \times \frac{1}{8} = \underline{22.5^\circ}$$

۲- به روش تکنیکی:

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad$ ← فرمول

مثال:

1) $10^\circ = \cancel{10} \times \frac{\pi}{\cancel{180}_{18}} = \frac{\pi}{18}\ rad$

2) $20^\circ = 20 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}\ rad$

3) $60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}\ rad$

⋮

تناسب:

درجه	رادیان
1	$\frac{\pi}{180}$
?	1

$$\Rightarrow ? \times \frac{\pi}{180} = 1 \Rightarrow ? = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.14} = 57.3$$ درجه

حدود تغییرات عبارت های مثلثاتی:

1. $-1 \leq \sin\alpha \leq +1$

2. $-1 \leq \cos\alpha \leq +1$

3. $\tan\alpha \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \tan\alpha = 200\ ✓$

4. $\cot\alpha \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \cot\alpha = 5000\ ✓$

مثال: حدود تغییرات عبارت $y = 5\sin x + 2$ کدام است؟

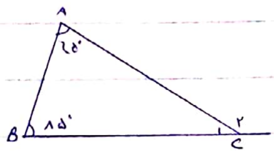
حل:

$-1 \le \sin x \le +1 \xrightarrow{\times 5} -5 \le 5\sin x \le +5 \xrightarrow{+2} -3 \le 5\sin x + 2 \le 7 \Rightarrow -3 \le y \le +7$

جواب

تست) در شکل روبرو زاویه C_2 برابر چند رادیان است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{6}$ ✓ ۳) $\frac{7\pi}{9}$ ۴) $\frac{8\pi}{9}$



حل:

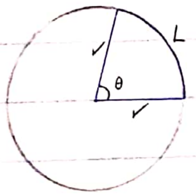
$C_1 + 85 + 65 = 180^\circ \Rightarrow C_1 = 30^\circ$

$\Rightarrow C_1 + C_2 = 180^\circ \Rightarrow C_2 = 150^\circ$

$150^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6}$ = جواب

محاسبهٔ طول کمان:

اگر ما یک دایره‌ای به شعاع r و طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ داشته باشیم مانند شکل زیر:



(طول کمان) محیط دایره	زاویه (رادیان)
$2\pi r$	2π
L	θ

$\Rightarrow L = r\theta$

۱- $\underbrace{L}_{\text{طول کمان}} = \underbrace{r}_{\text{شعاع}}\ \overbrace{\theta}^{\text{زاویهٔ مرکزی}}$

تست) در دایره‌ای به شعاع 18cm، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی 160° چند سانتی‌متر است؟

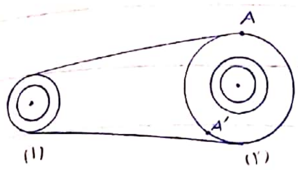
۱) 8π ۲) 16π ✓ ۳) 9π ۴) 18π

حل: $r = 18\ cm$ $\theta = 160^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{16\pi}{18} = \frac{8\pi}{9}$

$L = r\theta \Rightarrow L = 18 \times \frac{8\pi}{9} = \underbrace{16\pi}_{\text{جواب}}$

تست) در شکل زیر، یک تسمه، دو قرقره به شعاع های 9cm و 12cm را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره بزرگتر $\frac{5\pi}{6}$ رادیان می‌چرخد (یعنی از نقطهٔ A به نقطه A' میرود.) آنگاه قرقره کوچکتر چند درجه می‌چرخد؟

(تمرین کتاب درسی)



۱) 160° ۲) 180°

۳) 200° ✓ ۴) 225°

حل:

$r_2 = 12\ cm \qquad \theta_2 = \frac{5\pi}{6} \qquad L_2 = ?$

$$L_2 = r_2\,\theta_2 \Rightarrow L_2 = \cancel{12}^{\,2} \times \frac{5\pi}{\cancel{6}_{\,1}} = 10\pi$$

$r_1 = 9\ cm \qquad \theta_1 = ? \qquad L_1 = L_2 = 10\pi$

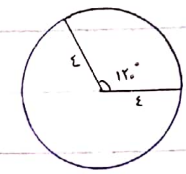
$$L_1 = r_1\,\theta_1 \Rightarrow 10\pi = 9 \times \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{10\pi}{9} = \frac{10 \times \cancel{180}^{\,20}}{\cancel{9}_{\,1}} = 200^\circ$$

جواب

قطاع:

به قسمتی از سطح یک دایره که بین دو شعاع آن قرار دارد قطاع گفته میشود. هر قطاعی یک زاویه مرکزی دارد.

درشکل روبرو یک قطاع به شعاع 4cm و یک زاویه مرکزی 120° می‌بینید:



حالا میخواهیم مساحت و محیط یک قطاع به شعاع r و زاویه مرکزی θ را باهم بررسی کنیم.

۱- مساحت قطاع:

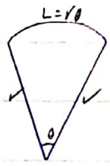
زاویه مرکزی	مساحت
2π	πr^2
θ	$S=?$

$$\Rightarrow 2\pi S = \theta \pi r^2 \Rightarrow S = \frac{\theta \cancel{\pi} r^2}{2\cancel{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{2}\theta r^2$$

$$S_{ق} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

۲- محیط قطاع:

یک قطاع از سه قسمت تشکیل شده است که عبارت اند از: ۱- دوتا شعاع ۲- یک کمان



مجموع سه قسمت = محیط قطاع

$$P_{ق} = 2r + r\underbrace{\theta}_{\text{(برحسب رادیان)}}$$

تست) مساحت قطاعی از دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{5}$ cm و زاویهٔ مرکزی $120°$ با مساحت قطاعی از دایره‌ای به شعاع r و زاویهٔ مرکزی $\frac{5\pi}{6}$ رادیان برابر است. r چند سانتی متر است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{6}$

حل:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

$$\text{زاویه مرکزی} = 120° \times \frac{\pi}{180} = \frac{\cancel{120}^{2}\pi}{\cancel{180}_{3}} = \frac{2\pi}{3}$$

$$S_1 = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\pi}{3} \times \cancel{20}^{10} = \frac{20\pi}{3}$$

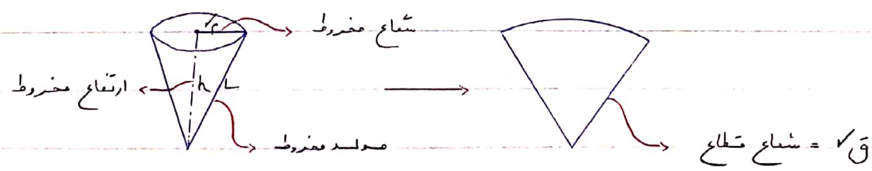
$$\overbrace{S_2}^{\frac{20\pi}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\frac{20\pi}{3}}{\frac{5\pi}{12}} \Rightarrow r^2 = \frac{\cancel{20}^{4}\cancel{\pi} \times \cancel{12}^{4}}{\cancel{3} \times \cancel{5}\cancel{\pi}} = 16 \Rightarrow r = \pm 4$$

که شعاع منفی نمی‌شود.

$$r = 4\,cm \Rightarrow \text{دیدن}$$

گستردهٔ یک مخروط:

اجزای کلی یک مخروط بصورت روبرو است:



نکته ها:

۱- اگر ما یک مخروط بشکافیم و گسترش دهیم به گستردهٔ یک قطاع میرسیم.

۲- شعاع قطاع با مولد مخروط برابر است یعنی $r_{ق} = L$

۳- محیط قاعدهٔ مخروط با طول کمان قطاع برابر است یعنی $2\pi r_م = r_ق \theta$

۴- مولد مخروط با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به شیوهٔ زیر بدست می‌آید:

$$L=\sqrt{r_م^2+h^2}$$

۵- مساحت های جانبی مخروط از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$S=\pi r L$$

تست) گستردهٔ مخروطی به شعاع ۳cm و ارتفاع ۴cm، یک قطاع به شعاع ۲cm و زاویهٔ مرکزی θ رادیان است. θ کدام است؟

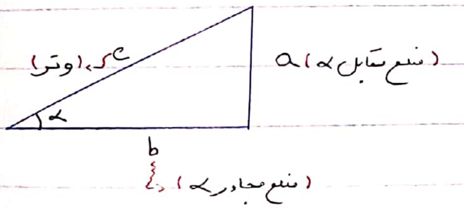
۱) $\frac{4\pi}{5}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{6}$ ۴) $\frac{6\pi}{5}$ ✓

حل: $r_م = 3cm$ $h_م = 4cm$ $r_ق = 2cm$ $\theta_ق = ?$

شعاع قطاع $= 5cm = \sqrt{25} = \sqrt{3^2+4^2} = L = \sqrt{r_م^2+h^2} = L =$ مولد مخروط

$2\pi r_م = \theta r_ق \Rightarrow 2\pi \times 3 = 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5} =$ جواب

نسبت های مثلثاتی:



1- $\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$

2- $\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$

3- $\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4- $\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

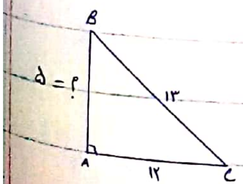
نکته: $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ عکس یکدیگرند و حاصلضربشان برابر یک میباشد.

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

مثال:

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{2}$$

تست) با توجه به شکل رو برو، مقدار $\sin\hat{B} - \cot\hat{C}$ کدام است؟



۱) $-\frac{96}{65}$ ✓ ۲) $\frac{79}{156}$ ۳) $-\frac{5}{156}$ ۴) $-\frac{131}{65}$

$?^{۲} + (۱۲)^{۲} = (۱۳)^{۲} \Rightarrow ?^{۲} = ۱۶۹ - ۱۴۴ \Rightarrow ?^{۲} = ۲۵ \Rightarrow ? = ۵$

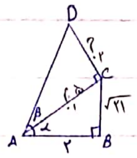
$\sin \hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۱۲}{۱۳}$ $\qquad$ $\cot \hat{C} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{۱۲}{۵}$

$$\sin \hat{B} - \cot \hat{C} = \frac{۱۲}{۱۳} - \frac{۱۲}{۵} = \frac{۶۰-۱۵۶}{۶۵} = \underbrace{-\frac{۹۶}{۶۵}}_{\text{ج}}$$

تست) با توجه به شکل مقابل، اگر $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$ و $\cos\beta = \frac{۵}{۱۳}$ باشد، اندازه DC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ $\qquad$ ۲) $۸\sqrt{۳}$

۳) ۱۰ $\qquad$ ۴) ۱۲ ✓



حل: $\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۲۱}$

$?_{۱}^{۲} = (۲)^{۲} + (\sqrt{۲۱})^{۲} \Rightarrow ?_{۱}^{۲} = ۲۵ \Rightarrow ?_{۱} = \sqrt{۲۵} = ۵$

$\cos\beta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow AD = ۱۳$

$(۱۳)^{۲} = (۵)^{۲} + (?_{۲})^{۲} \Rightarrow (?_{۲})^{۲} = ۱۶۹ - ۲۵ \Rightarrow ?_{۲} = \sqrt{۱۴۴} = \underbrace{۱۲}_{\text{جواب}} = DC$

نکته:

1. if $\alpha + \beta = ۹۰^{\circ}$ یا $\frac{\pi}{۲}$ $\Rightarrow$ یعنی α و β متمم یکدیگر باشند.

$\sin_{\text{یکی}} = \cos_{\text{دیگری}}$ $\qquad$ ۱. $\sin\alpha = \cos\beta$ $\qquad$ ۲. $\sin\beta = \cos\alpha$

آنگاه $\Rightarrow$ $\qquad$ $\Rightarrow$

$\tan_{\text{یکی}} = \cot_{\text{دیگری}}$ $\qquad$ ۳. $\tan\alpha = \cot\beta$ $\qquad$ ۴. $\tan\beta = \cot\alpha$

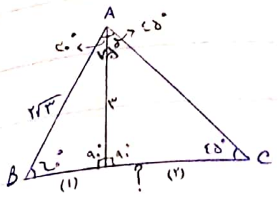
2. if $\alpha + \beta = ۱۸۰^{\circ}$ یا π $\Rightarrow$ یعنی α و β مکمل یکدیگر باشند.

۱. $\sin\alpha = \sin\beta$ $\qquad$ ۲. $\cos\alpha = -\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = ۰$

آنگاه $\Rightarrow$

$\tan\alpha + \tan\beta = ۰ \Leftarrow$ ۳. $\tan\alpha = -\tan\beta$ $\qquad$ $\cot\alpha + \cot\beta = ۰ \Leftarrow$ ۴. $\cot\alpha = -\cot\beta$

تست) در شکل روبرو، اندازهٔ ضلع BC تقریباً کدام است؟



۱) ۵٫۲ ۲) ۵٫۷

۳) ۴٫۲ ۴) ۴٫۷ ✓

حل:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{?}{2\sqrt{3}} \Rightarrow ? = 3$$

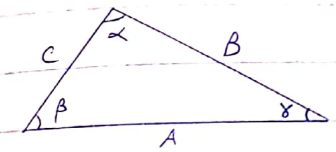
$$\cos 60^\circ = \frac{?}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ? = \sqrt{3} = (1)$$

$$\Rightarrow (1) + (2) = 3 + \sqrt{3} \simeq 4/7$$

$$\tan 45^\circ = \frac{3}{?} = 1 \Rightarrow ? = 3 = (2)$$

کاربرد مثلثات:

با توجه به شکل روبرو داریم:



۱- قضیهٔ سینوس ها: $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$

۲- قضیهٔ کسینوس ها:

الف) $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$

ب) $B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta$

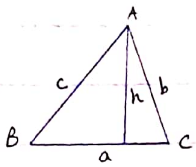
ج) $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$

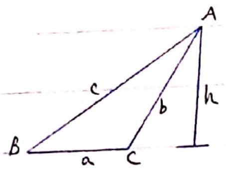
۳- مساحت:

$$S = \frac{1}{2} AB \sin\gamma = \frac{1}{2} BC \sin\alpha = \frac{1}{2} AC \sin\beta$$

اثبات قضیهٔ سینوس ها و کسینوس ها:

۱- اثبات قضیهٔ سینوس ها:





$\sin B = \dfrac{h}{c}$ ، $\sin C = \dfrac{h}{b}$ => زمانی که زاویه حاده (۰ < x < ۹۰) است.

$\sin(\pi - C) = \sin C = \dfrac{h}{b}$ => زمانیکه زاویه منفرجه (۹۰ < x < ۱۸۰) است.

$$h = b\sin C = c\sin B \xRightarrow{\times a} ah = ab\sin C = ac\sin B$$

$$\sin A = \sin(\pi - (B+C)) = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$$

طبق قضیه کسینوس ها داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$B^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-B^2}{2a\cancel{b}c}$$

حالا داریم:

$$\sin(A) = \left(\frac{h}{c}\right)\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + \left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cancel{b}c}\right) = \left(\frac{h}{2acb}\right)(a^2+\cancel{b^2}-\cancel{c^2}+a^2+\cancel{c^2}-\cancel{b^2}) =$$

$$\left(\frac{h}{\cancel{2}\cancel{a}bc}\right)(\cancel{2}\cancel{a^2}) \Rightarrow \underbrace{\sin A = \frac{ha}{bc}}$$

ادامه میدهیم!

$$ah = bc\sin A$$

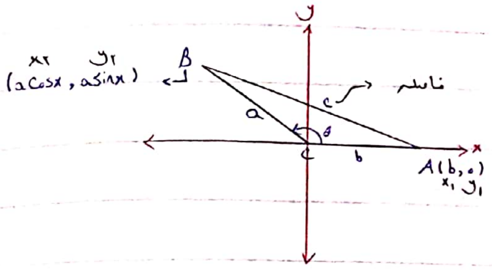
نتیجه گیری => $ah = ab\sin C = ac\sin B = bc\sin A$

کل عبارت ÷ abc $\quad \dfrac{\cancel{a}h}{\cancel{a}bc} = \dfrac{\cancel{a}\cancel{b}\sin C}{\cancel{a}\cancel{b}c} = \dfrac{\cancel{a}\cancel{c}\sin B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \dfrac{\cancel{b}\cancel{c}\sin A}{a\cancel{b}\cancel{c}} \Rightarrow \dfrac{h}{bc} = \dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin A}{a}$

=> قضیه سینوس ها: $\dfrac{bc}{h} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{a}{\sin \hat{A}}$

۳. اثبات قضیه کسینوس ها :

برابر مربع فاصله بین B , A



$$c^2 = (a\sin x - 0)^2 + (a\cos x - b)^2$$

$$c^2 = a^2\sin^2 x + a^2\cos^2 x - 2ab\cos x + b^2$$

$$c^2 = a^2\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} - 2ab\cos x + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \Rightarrow$$ اثبات شد.

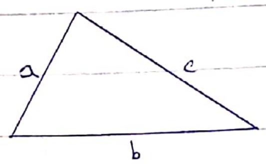
حالا می توانیم قضیه فیثاغورس را نیز اثبات کنیم.

if $x = \frac{\pi}{2}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{\text{صفر}} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

اثبات شد!

نکته هندسی :



$P =$ محیط مثلث $\div 2$

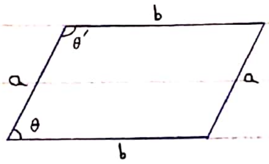
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

۴_ مساحت متوازی الاضلاع با داشتن دو ضلع و زاویه بین :

اگر یک قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث همنهشت تقسیم میشود، و کافی است فرمول مساحت مثلث را ضربدر ۲ کنیم تا مساحت متوازی الاضلاع به دست آید.

تذکر: دقت کنید به دلیل اینکه زوایای θ, θ' مکمل هستند، پس سینوس هایشان باهم برابرند!

به شکل زیر توجه کنید:



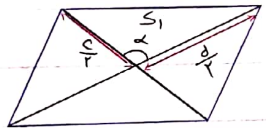
$$S = ab \sin\theta' = ab \sin\theta$$

۵ـ مساحت متوازی الاضلاع با داشتن دو قطر و زاویه بین دو قطر:

اگر دو قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، آنگاه با ۴ شکث هم مساحت روبرو میشویم و اگر مساحت یکی از شکث ها را پیدا کنیم و سپس در عدد ۴ ضرب کنیم آنگاه مساحت متوازی الاضلاع بدست می آید.

تذکر: فرمول زیر برای همه ی چهار ضلعی های محدب قابل استفاده است.

به شکل زیر توجه کنید:



$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\sin\alpha$$

$$S_{\text{کلی}} = S_1 \times 4 = \frac{1}{2} cd \cdot \sin\alpha$$

تست) در یک متوازی الاضلاع یکی از قطر ها دو برابر دیگری و زاویه بین دو قطر 30° است. اگر مساحت متوازی الاضلاع ۳۲ باشد، اندازه قطر کوچک آن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) $8\sqrt{2}$

حل: قطر $= 2a$ ، قطر $= a$

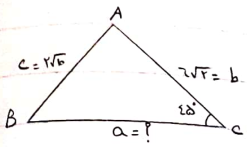
$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\alpha$$

$$S = 32 = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}a^2 \times \sin 30^\circ \Rightarrow a^2 \times \frac{1}{2} = 32 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8$$ گزینه ۳ جواب

۱۶ = قطر بزرگ ۸ = قطر کوچک

تست) اندازه دو ضلع مثلثی $6\sqrt{2}$ و $2\sqrt{10}$ و زاویه روبرو به ضلع $2\sqrt{10}$ برابر 45° است. ضلع سوم این مثلث کدام است؟

۱) ۸، ۶ ۲) ۸، ۴ ✓ ۳) $6\sqrt{2}$، $8\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$، $8\sqrt{2}$



حل: ابتدا یک مثلث میکشیم:

از قانون کسینوس ها بهره میجوییم!

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$40 = a^2 + 72 - 2a(6\sqrt{2})\underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$40 = a^2 - 2a(12 \div 2) + 72 \Rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0$$

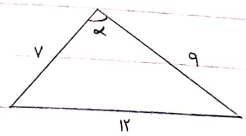
$$\Rightarrow (a-4)(a-8) = 0 \Rightarrow a = 4, \underset{\text{جواب}}{8}$$

تست) مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹، ۱۲ واحد را بیابید؟

حل:

راه حل ۱:

ابتدا یک مثلث میکشیم!



استفاده از قانون کسینوس ها:

$$(12)^2 = (7)^2 + (9)^2 - 2(7)(9)\cos\alpha \Rightarrow 144 = 49 + 81 - 126\cos\alpha \Rightarrow$$ ادامه

$$144 = 130 - 126\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{14}{-126} = -\frac{1}{9}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \frac{1}{81} = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{80}{81} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{\pm 4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow$$ چونکه زاویه حاده است.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$S = 7 \times \cancel{9} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{5}}{\cancel{9}} = 14\sqrt{5} =$$ جواب

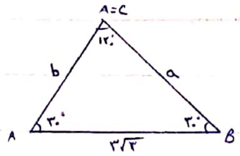
روش هندسی:

راه حل ۲:

$$P = 7 + 9 + 12 = 28 \div 2 = 14$$

$$S = \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} = S = \sqrt{14^2 \times 5} = 14\sqrt{5} =$$ جواب

تمرین) در مثلث زیر اگر $\hat{B} = 30°$ و $C = 120°$ و اندازه ضلع AB برابر $2\sqrt{3}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید؟



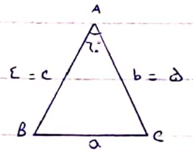
حل: مثلث روبرو مثلث متساوی الساقین است.

$a = b$

استفاده از قانون سینوس ها:

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120°} \Rightarrow 2a = \frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \underbrace{a = b = 3}_{\text{جواب}}$$

تمرین) اندازه ضلع a را بیابید؟



حل:

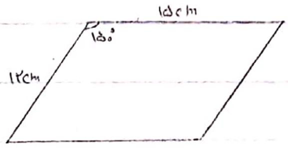
استفاده از قانون کسینوس ها:

$$a^2 = (5)^2 + (4)^2 - 2(5)(4)\cos 60°$$

$$a^2 = 41 - 40 \times \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt{21} = \text{جواب}$$

تمرین) اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع 12cm و 15cm میباشد و اندازه یک ضلع آن 150° میباشد. مساحت متوازی الاضلاع را بیابید؟

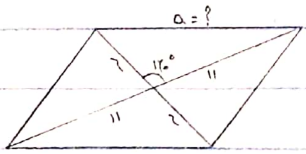
حل: ابتدا شکل آن را رسم میکنیم:



$$S = 12 \times 15 \times \sin 150° \Rightarrow S = 180 \times \frac{1}{2} = \underbrace{90\ cm}_{\text{جواب}}$$

تمرین) قطرهای یک متوازی الاضلاع 12 و 22 سانتی متر میباشد و تقاطع این دو قطر زاویه ای 120° میسازد. طول اضلاع بزرگتر متوازی الاضلاع را بدست آورید؟

حل: ابتدا شکل آنرا رسم میکنیم:



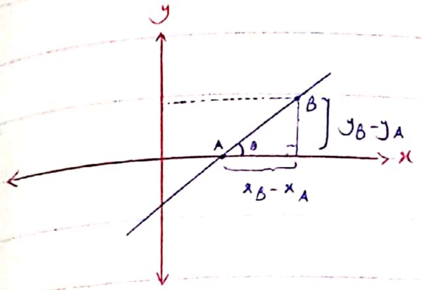
قانون کسینوس ها:

$$a^2 = (6)^2 + (11)^2 - 2(6)(11)\cos 120°$$

$$a^2 = 36 + 121 - 132 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 = 157 + 66 = 223 \Rightarrow \underbrace{a = \sqrt{223}}_{\text{جواب}}$$

رابطه‌ی شیب خط با مختصات:

اگر من دو نقطه با مختصات $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ داشته باشیم البته روی خط مانند شکل زیر:

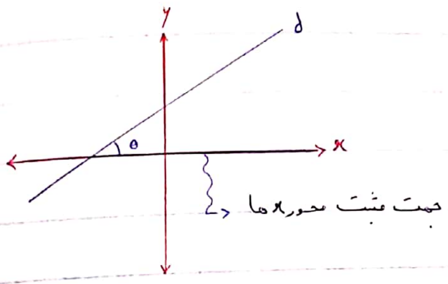


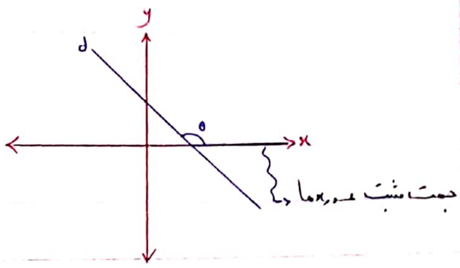
$\tan\theta = m = \frac{\text{تغییر عرض}}{\text{تغییر طول}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$\underbrace{}$ شیب = مشتق

پس متوجه می‌شویم که شیب خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه می‌سازد برابر است با $\tan$ آن زاویه است.

به شکل های زیر توجه کنید:

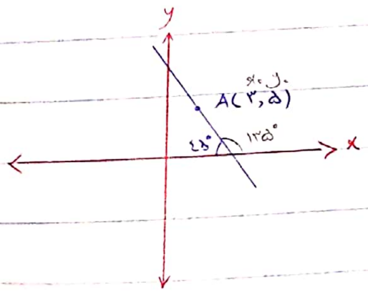




$m_d = \tan\theta$ $\qquad$ $m_d = \tan\theta$

تست) عرض از مبدأ خط مقابل کدام است؟

حل:



$\tan 135° = -\tan 45° = -1 = m =$ شیب

حالا فرمول معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 8$

جواب = عرض از مبدأ

دایره‌ی مثلثاتی:

کلاً دایره‌ی مثلثاتی ما چهار ناحیه یا ربع دارد که مختصات آنها به فرم زیر است:

تذکر: ناحیه = ربع

ربع یا ناحیه اوّل : $0^\circ < \theta < 90^\circ$ یا $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

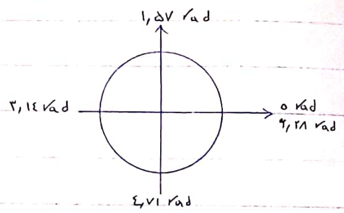
ربع یا ناحیه دوم : $90^\circ < \theta < 180^\circ$ یا $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ربع یا ناحیه سوم : $180^\circ < \theta < 270^\circ$ یا $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

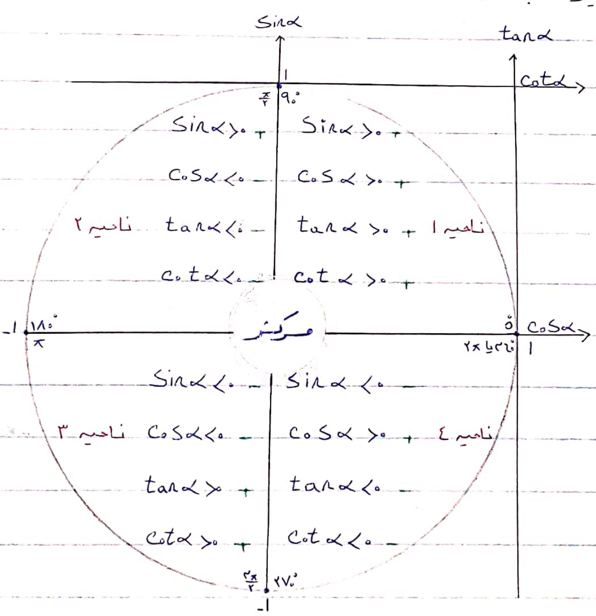
ربع یا ناحیه چهارم : $270^\circ < \theta < 360^\circ$ یا $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

نکته: یادمان باشد که هر ربع یا ناحیه دایرهٔ مثلثاتی تقریباً ۱/۵۷ رادیان میباشد. چرا؟

$\pi = 3,14 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} = 1,57\ rad$



به دایرهٔ زیر توجه کنید:



توجه: کسینوس با کتانژانت دوست میباشد!

مقادیر توابع مثلثاتی در زوایای مختلف :

درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

$\tan\alpha$: $0 \to \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\times\sqrt{3}} 1 \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \sqrt{3}$ → $q=\sqrt{3}$ دنبالهٔ هندسی

$\cot\alpha$: $\infty \to \sqrt{3} \xrightarrow{\times\frac{\sqrt{3}}{3}} 1 \xrightarrow{\times\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}$ → $q=\frac{\sqrt{3}}{3}$ دنبالهٔ هندسی

حفظ کردن ممنوع!

به مثلث قائم الزاویهٔ زیر توجه نمایید :

1- $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　2- $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　3- $\tan 45^\circ = 1$

4- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$　　5- $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　6- $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7- $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　8- $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$　　9- $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

علامت توابع مثلثاتی در نواحی مختلف :

	ناحیهٔ ۱	ناحیهٔ ۲	ناحیهٔ ۳	ناحیهٔ ۴
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

تکنیک : هستک (ن۱ ن۲ ن۳ ن۴)

- ه (ن۱) ← همه مثبت
- س (ن۲) ← سینوس مثبت
- ت (ن۳) ← تانژانت، کتانژانت مثبت
- ک (ن۴) ← کسینوس مثبت

نکات:

۱ـ $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در نواحی فرد مثبت هستند و در نواحی زوج منفی هستند، در همه‌ی نواحی هم علامت هستند یعنی هردو منفی هستند یا هر دو مثبت هستند.

۲ـ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در نواحی فرد هم علامت هستند و در نواحی زوج مختلف العلامت هستند!

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0 \Rightarrow$ نواحی ۱ و ۳

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0 \Rightarrow$ نواحی ۲ و ۴

۳ـ $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ ، $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

تمرین) اگر $\sin^2\alpha \cot\alpha < 0$ باشد، در اینصورت کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

حل:

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin^{\cancel{2}}\alpha \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$

ناحیه ۴ ، ناحیه ۲

جواب = نواحی ۲ و ۴

تست) در کدام گزینه عبارت داده شده منفی است؟

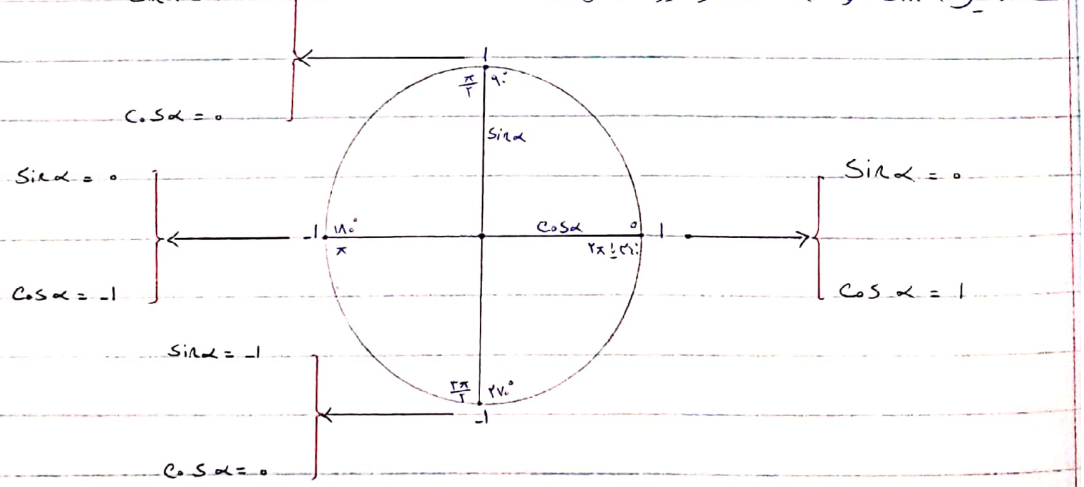
۱) $\underbrace{\cos 350^\circ}_{+} + \underbrace{\sin 119^\circ}_{+} \Rightarrow (+)$ مثبت

۲) ✓ $\underbrace{\tan 170^\circ}_{-} + \underbrace{\sin 190^\circ}_{-} \Rightarrow (-)$ منفی

۳) $\underbrace{\cot 300^\circ}_{-} - \underbrace{\tan 200^\circ}_{+} \Rightarrow (+)$ مثبت

۴) $\underbrace{\cot 80^\circ}_{+} + \underbrace{\cos 148^\circ}_{-} - \Rightarrow (+)$ مثبت

مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در مرز نواحی مختلف:



تست) انتهای کمان مربوط به زاویه ۸- رادیان در کدام ربع قرار دارد؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم ✓　　۴) چهارم

حل:

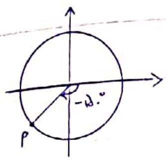
یک دور دایره = ۶,۲۸- ≈ ۲π- ⇐ در جهت ساعتگرد

۸- + ۶,۲۸ = ۱,۷۲-

|۱,۵۷-| < |۱,۷۲-| ⇐ در جهت عقربه ساعت ۱,۵۷- = یک ناحیه دایره

که پس انتهای کمان مربوطه در ربع سوم قرار دارد!

تست) مختصات نقطه P واقع بر دایره مثلثاتی مقابل کدام است؟

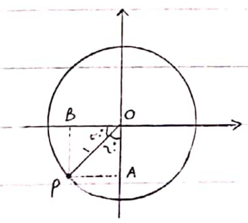


۱) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ✓　　۲) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

۳) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　۴) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

حل:

شعاع دایره برابر ۱ است.



$\cos 60^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{1} \Rightarrow \text{ضلع مجاور} = \frac{1}{2} = OA$

$\cos 30^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{1} \Rightarrow \text{ضلع مجاور} = \frac{\sqrt{3}}{2} = OB$

پس A نمایشگر $-\frac{1}{2}$ روی محور y ها و B نمایشگر $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ روی محور x ها است.

$y_P = -\frac{1}{2}$　　$x_P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ⇐ جواب

سوال بسیار زیبا و جذابی بود! ⇐ درسته؟ بله!

تست) اگر $\cot x < \cos x$ و $\sin x + \sqrt{1-\cos^2 x} = 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ربع قرار دارد؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

حل:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x}$

یعنی $|\sin x| \Rightarrow |\sin x| = -\sin x \Rightarrow \sin x \leq 0 \Rightarrow$ منفی

$\Rightarrow$ نواحی ۳ و ۴

$\cot x < \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x} < 0 \Rightarrow \frac{\cos x(1-\sin x)}{\sin x} < 0$

$\Rightarrow \cot x \underbrace{(1-\sin x)}_{\text{نامنفی}} < 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow$ ناحیه ۲ و ۴

$-1 \leq \sin x \leq 1 \xRightarrow{\times -} -1 \leq \sin x \leq 1 \xRightarrow{+1} 0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \Rightarrow$ همواره نامنفی

ناحیه ۴ = ناحیه ۳ و ۴ $\cap$ ناحیه ۲ و ۴

$\Rightarrow$ جواب

پیدا کردن توابع مثلثاتی کمان های معروف:

θ مادر $\longrightarrow \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta_{\text{ناحیه ۱}} = \frac{\pi}{n}$

$\theta_{\text{ناحیه ۲}} = \frac{(n-1)\pi}{n} \Rightarrow \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$

$\theta_{\text{ناحیه ۳}} = \frac{(n+1)\pi}{n} \Rightarrow \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$ $\longrightarrow$ θ های بچه

$\theta_{\text{ناحیه ۴}} = \frac{(2n-1)\pi}{n} \Rightarrow \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$

نکته: به ازای θ های و بچه های آن، $|\sin\theta|$، $|\cos\theta|$، $|\tan\theta|$، $|\cot\theta|$ باهم برابر هستند.

دسته ۱: خانواده $\frac{\pi}{6}$

۱_ $|\sin\theta| = \frac{1}{2}$　　۲_ $|\cos\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۳_ $|\tan\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$　　۴_ $|\cot\theta| = \sqrt{3}$

مثال: ۱) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　۲) $\tan\frac{7\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$　۳) $\cot\frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3}$

خانوادهٔ $\frac{\pi}{4}$: دستهٔ ۲

1) $|\sin\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $|\cos\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $|\tan\theta| = 1$

4) $|\cot\theta| = 1$

مثال:
1) $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sin\frac{3\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$

خانوادهٔ $\frac{\pi}{3}$: دستهٔ ۳

1) $|\sin\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $|\cos\theta| = \frac{1}{2}$

3) $|\tan\theta| = \sqrt{3}$

4) $|\cot\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال:
1) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 2) $\tan\frac{4\pi}{3} = +\sqrt{3}$ 3) $\cot\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست) اگر $\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{ناحیه ۱}} < x < \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\text{ناحیه ۲}}$ باشد و $\sin\alpha = \frac{1}{m-2}$، حدود m کدام است؟

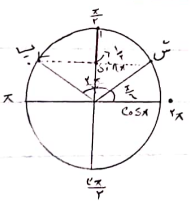
1) $m \geq 4$

2) $m > 2$

3) $3 \leq m < 4$ ✓

4) $m \geq 3$ یا $m \leq 1$

حل:

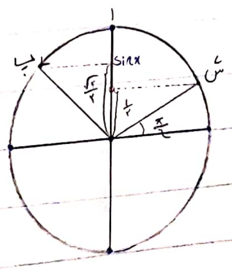


$$\frac{1}{2} < \sin\alpha \underbrace{\leq}_{\text{چون از روش رد میشه}} 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{m-2} \leq 1 \xRightarrow{\text{عکس}} 1 \leq m-2 < 2 \xRightarrow{\text{به علاوه ۲}}$$

$\Rightarrow 3 \leq m < 4$: جواب

تست) با فرض $\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{ناحیه ۱}} < x < \underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\text{ناحیه ۲}}$ حدود $\sin x$ را بیابید؟

حل:



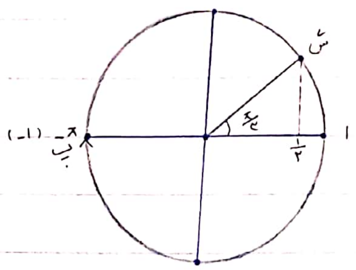
جواب = $\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$

تمرین) با فرض $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3\alpha = \frac{m-1}{2}$ حدود تغییرات m را بیابید؟

حل:

$\xRightarrow{\times 3} -\pi < 3\alpha < \frac{\pi}{3}$

مرز ناحیه ۲ و ۳ — ناحیه ۱

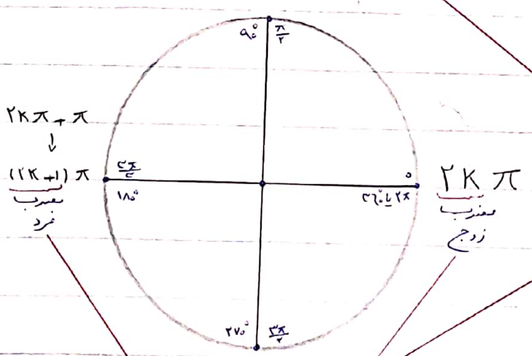


$-1 \leq \cos 3\alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \xRightarrow{\times 2} -2 \leq m-1 \leq 2 \xRightarrow{+1} -1 \leq m \leq 3$

جواب

نسبت های مثلثاتی کمان های مرکب:

$2k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{4k\pi + \pi}{2} = \frac{(4k+1)\pi}{2}$



$\frac{(4k+2)\pi}{2}$

تعویض گر ⟹
- $\sin\alpha \to \cos\alpha$
- $\cos\alpha \to \sin\alpha$
- $\tan\alpha \to \cot\alpha$
- $\cot\alpha \to \tan\alpha$
- یعنی تعویض میکند!

غیر تعویض گر ⟹
- $\sin\alpha \longrightarrow \sin\alpha$
- $\cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha$
- $\tan\alpha \longrightarrow \tan\alpha$
- $\cot\alpha \longrightarrow \cot\alpha$
- یعنی تعویض نمی‌کند!

نکته: اگر جنس کمان مرکب ما از $\frac{\pi}{2}$ بود، ضریب $\frac{\pi}{2}$ را بر عدد ۴ تقسیم میکنیم اگر باقیمانده ۱ بود بالاییم و اگر ۳ بود پاییینیم!

توابع دو نوع هستند: ۱- توابع زوج ۲- توابع فرد

۱- توابع زوج: $f(-x) = f(x)$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

به صورت عامیانه درسته هستند یعنی منفی را قورت میدهند.

۲- توابع فرد: $f(-x) = -f(x)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

اصطلاحاً منفی را به بیرون پس میدهند.

مثال:

۱- $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\cos\alpha$

۲- $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = +\sin\alpha$

۳- $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$

۴- $\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

۵- $\sin(\frac{397\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = +\cos\frac{\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶- $\tan(\frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷- $\cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

۹- $\cot(\frac{11\pi}{6}) = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

۱۰- $\sin(10\pi + \alpha) = +\sin\alpha$

۱۱- $\tan(9\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

۱۲- $\cot(10\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

مثال: عبارت های زیر برحسب کمان 20° درجه نوشته شود؟

۱- $\cos 200^\circ = \cos(180 + 20) = -\cos 20^\circ$

۲- $\tan 160^\circ = \tan(180 - 20) = -\tan 20^\circ$

۳- $\cot 340^\circ = \cot(360 - 20) = -\cot 20^\circ$

۴- $\cos 250^\circ = \cos(270 - 20) = -\sin 20^\circ$

۵- $\sin 290^\circ = \sin(270 + 20) = -\cos 20^\circ$

۶- $\cos 290^\circ = \cos(270 + 20) = +\sin 20^\circ$

تمرین) if $\tan x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sin x + \cos x}{3\sin x - 2\cos x} = ?$

حل: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

کل عبارت تقسیم بر $\cos x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{3\sin x}{\cos x} - \dfrac{2\cos x}{\cos x}} = \dfrac{\tan x + 1}{3\tan x - 2} = \dfrac{3}{4}$: جواب

تمرین) if $\tan x = 2 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{3\sin^2 x}^{a} + \overbrace{\cos^2 x}^{b}}{\underbrace{\cos^2 x}_{c}} = ?$

حل:

یادآوری: $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 3\tan^2 x + 1 = 13$ ، جواب

تمرین) if $\tan x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\sin x\cos x + 5\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos^2 x - 7\sin^2 x} = ?$

حل:

$\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ کل عبارت تقسیم بر $\cos^2 x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{5\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{7\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x + 5 - \tan^2 x}{4 - 7\tan^2 x} =$ | $\tan x = \frac{1}{2}$

$\dfrac{\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{4}}{4 - \frac{7}{4}} = \dfrac{\frac{21 \div 3}{4}}{\frac{9 \div 3}{4}} = \dfrac{7}{3}$ = جواب

تمرین) if $\cot x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\overbrace{\sin x}^{a} + \overbrace{\cos x}^{b}}{\underbrace{\sin x}_{c}} = ?$

حل:

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sin x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 1 + \cot x = \dfrac{3}{2}$ = جواب

تمرین) if $\tan 35^\circ = a \Rightarrow \dfrac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ} = ?$

برحسب $\tan 35^\circ$ درجه بنویسید!

حل:

$\sin 145^\circ = \sin(180 - 35) = +\sin 35^\circ$

$-\sin 235^\circ = -\sin(270 - 35) = +\cos 35^\circ$

$\cos 325^\circ = \cos(360 - 35) = +\cos 35^\circ$

حالا معادله‌هاشون را می‌نویسیم!

$\dfrac{\overbrace{\sin 35^\circ}^{a} + \overbrace{\cos 35^\circ}^{b}}{\underbrace{\cos 35^\circ}_{c}} = \tan 35^\circ + 1 = a + 1$ = جواب

تمرین) $\sin 20^\circ + \sin 200^\circ + \sin 340^\circ + \sin 160^\circ = ?$

برحسب کمان ۲۰° درجه بنویسید!

حل:

$\sin 200^\circ = \sin(180 + 20) = -\sin 20^\circ$

$\sin 340^\circ = \sin(360 - 20) = -\sin 20^\circ$

$\sin 160^\circ = \sin(180 - 20) = +\sin 20$

$\Rightarrow \sin 20^\circ - \sin 20^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ =$ صفر = جواب

تمرین) if $\tan 20^\circ = 0{,}36 \Rightarrow \dfrac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = ?$

برحسب کمان ۲۰° درجه بنویسید!

حل:

$\sin 160^\circ = \sin(180 - 20) = +\sin 20^\circ$

$-\cos 200^\circ = -\cos(180 + 20) = +\cos 20^\circ$

$\cos 110^\circ = \cos(90 + 20) = -\sin 20^\circ$

$\sin 70^\circ = \sin(90 - 20) = +\cos 20^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{1{,}36 \div 8}{0{,}64 \div 8} =$$

$\frac{17}{8} =$ جواب

تمرین) if $\tan\theta = 0{,}2 \Rightarrow A = \dfrac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = ?$

برحسب کمان θ بنویسید!

حل:

$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = +\sin\theta$

$-\cos(\pi + \theta) = +\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = +\sin\theta$

$-\sin(3\pi + \theta) = +\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{\sin\theta}^{a} + \overbrace{\cos\theta}^{b}}{\underbrace{2\sin\theta}_{c}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cot\theta}_{5} = 3 =$$ جواب

$\tan\theta \times \cot\theta = 1 \Rightarrow \frac{2}{10} \times ? = 1 \Rightarrow \cot\theta = 5$

تمرین) if $\tan\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{\sin(3\pi + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)} = ?$

برحسب کمان α بنویسید!

حل:

$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = +\sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{-\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} \xRightarrow[\cos\alpha]{\text{تقسیم بر}} \frac{\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{-\tan\alpha - 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{5}{1}$$

جواب

تمرین) if $\frac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=2 \Rightarrow \tan\alpha=?$

راه حل:

$2\sin(\alpha-3\pi)=2\sin(-(3\pi-\alpha))=-2\sin(3\pi-\alpha)=-2\sin\alpha$

$\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos(-(\frac{\pi}{2}-\alpha))=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+\sin\alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$

$\frac{+\sin\alpha}{+\cos\alpha}=2 \Rightarrow \tan\alpha=2 \Rightarrow$ جواب

تمرین) $\cos(-\frac{211\pi}{6})+\sin(-\frac{211\pi}{6})=?$

حل:

$\cos(-\frac{211\pi}{6})=\cos(\frac{211\pi}{6})=\cos(35\pi+\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(-\frac{211\pi}{6})=-\sin(\frac{211\pi}{6})=-\sin(35\pi+\frac{\pi}{6})=+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

جواب $=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

تمرین) $A=\frac{\sin(\frac{41\pi}{10})+\sin(\frac{29\pi}{10})-2\sin(\frac{11\pi}{10})}{\cos(-\frac{\pi}{10})\tan(\frac{21\pi}{10})+2\cos(\frac{2\pi}{5})}=?$

برحسب کمان $\frac{\pi}{10}$ بنویسید!

حل:

$\sin(\frac{41\pi}{10})=\sin(4\pi+\frac{\pi}{10})=+\sin\frac{\pi}{10}$

$\sin(\frac{29\pi}{10})=\sin(3\pi-\frac{\pi}{10})=+\sin\frac{\pi}{10}$

$-2\sin(\frac{11\pi}{10})=-2\sin(\pi+\frac{\pi}{10})=+2\sin\frac{\pi}{10}$

$\cos(-\frac{\pi}{10})=\cos\frac{\pi}{10}$

$\tan(\frac{21\pi}{10})=\tan(2\pi+\frac{\pi}{10})=+\tan\frac{\pi}{10}=\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}$

$2\cos(\frac{2\pi}{5})=2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10})=+2\sin\frac{\pi}{10}$

ادامه $\Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{10}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{10}}}+2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4\sin\frac{\pi}{10}}{3\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4}{3}$ = جواب

تمرین) if $x=10^\circ \Rightarrow \frac{\sin 2x\ \tan 4x}{\cot 5x\ \cos 7x}=?$

حل:

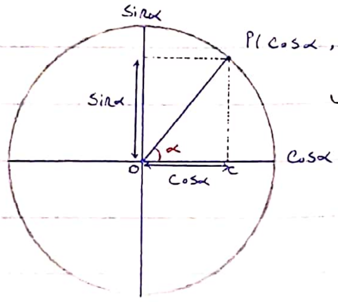
$\frac{\sin 20^\circ\times\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ\times\cos 70^\circ}=\frac{\cancel{\sin 20^\circ}\times\cancel{\tan 40^\circ}}{\cancel{\tan 40^\circ}\times\cancel{\sin 20^\circ}}=1=$ جواب

Scanned with CamScanner

$$\underbrace{\cos 120^\circ}_{-\cancel{\cos 60^\circ}} + \underbrace{\cos 130^\circ}_{-\cancel{\cos 50^\circ}} + \underbrace{\cos 140^\circ}_{-\cancel{\cos 40^\circ}} + \underbrace{\cos 150^\circ}_{-\cancel{\cos 30^\circ}} + \underbrace{\cos 160^\circ}_{-\cancel{\cos 20^\circ}} + \underbrace{\cos 170^\circ}_{-\cancel{\cos 10^\circ}} = \text{صفر} = \text{جواب}$$

اتحاد های مثلثاتی:

به دایره‌ی مثلثاتی زیر توجه کنید که ضلع دوم زاویه‌ی α دایره را در نقطه‌ی P قطع میکند و چون شعاع دایره‌ی ما برابر یک است یعنی $OP=1$ پس مختصات نقطه‌ی P بصورت $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ است. در دایره‌ی مثلثاتی به محور x ها محور کسینوس‌ها و به محور y ها محور سینوس گفته میشود. در واقع کسینوس زاویه‌ی α، طول نقطه‌ی P و سینوس زاویه‌ی α، عرض نقطه‌ی P گفته میشود.



نکته: با توجه به اینکه شعاع دایره $OP=1$ است پس طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OPC داریم:

$$(1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

دسته ۱: معروف به روابط اولیه

$$1-\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$2-\ \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases} \quad (x = \frac{k\pi}{2})$$

$$3-\ 1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$4-\ 1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

دسته ۲: روابط جمع و تفاضل دو کمان:

$$5-\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

فردی عادل و غیرلجباز

۶- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

ضربی خودخواه ولجباز

۷- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \dfrac{\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta} \longrightarrow$ کل عبارت تقسیم بر $\cos\alpha \cos\beta$

$$\dfrac{\dfrac{\sin\alpha \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cancel{\cos\beta}} \pm \dfrac{\cancel{\cos\alpha} \sin\beta}{\cancel{\cos\alpha} \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha} \cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha} \cancel{\cos\beta}} \mp \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

نتیجه: $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \Rightarrow$ فرمول بسیار مهم

۸- $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \dfrac{1 \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\alpha}$

دسته ۳: معروف به روابط 2α

۹- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha \longrightarrow \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

مثال:

$$\sin \underbrace{15^\circ}_{\alpha} \cos \underbrace{15^\circ}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sin \underbrace{30^\circ}_{2\alpha} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۰- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

فرمول های $\cos 2\alpha$ بسیار کاربردی هستند!

نتیجه گیری:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \longrightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \longrightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \longrightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \longrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \longrightarrow$ این فرمول از کجا نشأت میگیرد؟

جواب: صفحه بعد

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \longrightarrow \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \tan^2\alpha = 1 - \tan^2\alpha \longrightarrow$ تانژانت ها یک طرف

$\cos 2\alpha \tan^2\alpha + \tan^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \longrightarrow \tan^2\alpha(\cos 2\alpha + 1) = 1 - \cos 2\alpha \longrightarrow$ ادامه

$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \Rightarrow$ حالا متوجه شدید از کجا آمده؟

$11-\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

⚠ این فرمول را با فرمول $\sin 2\alpha$ اشتباه نگیرید!

$12-\ \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$13-\ \cos^4\alpha - \sin^4\alpha \longrightarrow (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1} \longrightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \longrightarrow$

$\cos 2\alpha$

دسته ۴: فرمول های اتحاد های مثلثاتی

$14-\ \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \longrightarrow \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}_{1} - \underbrace{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}_{\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha} \longrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

$15-\ \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \longrightarrow \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3}_{1} - (3\sin^4\alpha\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha) \longrightarrow$

$1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1} \longrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

$16-\ (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \longrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \longrightarrow 1 + \sin 2\alpha$

$17-\ (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \longrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \longrightarrow 1 - \sin 2\alpha$

$18-\ \tan\alpha + \cot\alpha \longrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \longrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \longrightarrow \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

۱۹- $\tan\alpha - \cot\alpha \longrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \longrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \longrightarrow \dfrac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \longrightarrow$

$-2\cot 2\alpha$

۲۰- $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

۲۱- $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$

بسیار کاربردی

نکته:

$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

سوال های بین مربیان:

۱- $\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha\,(2 + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha) = ?$

۱) ۱ ✓

۲) ۲

۳) $\frac{3}{2} \leftarrow 1 + \cos^2\alpha$

۴) $\frac{5}{4} \leftarrow 1 + \sin^2\alpha$

حل:

راه حل ۱: $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,((1+\tan^2\alpha) + (1+\cot^2\alpha)) = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right) =$

$\dfrac{\sin^2\alpha\,\cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}} + \dfrac{\cancel{\sin^2\alpha}\cos^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \underset{\text{ج}}{1}$

راه حل ۲: عددگذاری هوشمندانه

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4}\,(2 + \tan^2\frac{\pi}{4} + \cot^2\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\,(2+1+1)$

$= \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4} = \underset{\text{ج}}{1}$

۲- $A = \dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha} = ?$

۱) $\sqrt{3} \leftarrow \tan\alpha$ ✓

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leftarrow \cot\alpha$

۳) ۱

۴) ۱-

راه حل ۱:

$A = \dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha\,.\,\cancel{\sin^2\alpha}}{\cos\alpha\,.\,\cancel{\sin^2\alpha}} = \underset{\text{ج}}{\tan\alpha}$

راه حل ۲: عددگذاری هوشمندانه

$\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = \dfrac{\sin^3\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} - \cos^3\frac{\pi}{3}} = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3} = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{\frac{3}{8}} = \sqrt{3}$

$$3-\ (\cos^4 x - \sin^4 x)(1+\tan^2 x) + \tan^2 x = ?$$

راه حل ۱ :

۱) صفر

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \tan^2 x = 1 - \tan^2 x + \tan^2 x = 1$$ ج

۲) 1 ✓

۳) $\frac{1}{\sin^2 x}$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

۴) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\longrightarrow 4$

راه حل ۲ : عددگذاری هوشمندانه

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\cos^4\frac{\pi}{3} - \sin^4\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\tan^2\frac{\pi}{3}\right) + \tan^2\frac{\pi}{3} = \overbrace{\left(\frac{1}{16} - \frac{9}{16}\right)}^{-\frac{1}{2}}\overbrace{\left(1 + \frac{3}{1}\right)}^{4} + 3 = 3-2 = 1$$ ج

$$4-\ \frac{\overbrace{\sin^4 x}^{a} + \overbrace{\cos^4 x}^{b}}{\underbrace{\sin^2 x \cos^2 x}_{c}} - (\tan x + \cot x)^2 = ?$$

راه حل ۱ :

۱) -2 ✓

۲) 2

$$\tan^2 x + \cancel{\cot^2 x} - \cancel{\tan^2 x} - \cancel{\cot^2 x} - 2\underbrace{\tan x \cot x}_{1} = -2$$ ج

۳) -1

۴) 1

راه حل ۲ : عددگذاری هوشمندانه

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sin^4\frac{\pi}{4} + \cos^4\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}\ \cos^2\frac{\pi}{4}} - \left(\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} - (1+1)^2 = 2-4 = -2$$ ج

۵- اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ی α در ناحیه دوم باشد، آنگاه حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}}$ کدام است؟

کمان حالا؟

یادآوری :

$$y = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad , \quad \sqrt[2n]{u^{2n}} = |u|$$

حل : در ناحیه ۲ ، تابع کسینوس منفی است.

$$\sqrt{\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}} = \sqrt[2]{\cos^2\alpha} = |\overbrace{\cos\alpha}^{-}| = \underbrace{-\cos\alpha}_{ج}$$

$$6-\ \text{if} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{5} \longrightarrow \tan^3 x + \cot^3 x = ?$$

یادآوری: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

حل:
$$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3\underbrace{\tan x \cot x}_{1}(\tan x + \cot x) = 5^3 - 3(5) = 110$$ ج

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

۷- if $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \longrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = ?$

حل:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x)$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x\cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 2\sin x\cos x = -\frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\sin x\cos x = -\frac{4}{9}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \cancel{3}\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) = \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \underbrace{\frac{13}{27}}_{ج}$$

۸- if $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \longrightarrow \tan^2 x = ?$

حل:

کل عبارت ÷ بر $\cos^2 x$ $\Rightarrow \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x + 2 = \frac{3}{2}(1 + \tan^2 x)$ = ادامه

$$\tan^2 x + 2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{\tan^2 x = 1}_{ج}$$

۹- if $\tan x = -\frac{1}{2}$, $\underset{(-)}{\cos x < 0} \longrightarrow \sin x = ?$

راه حل ۱:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos x| = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \underbrace{\sin x = +\frac{\sqrt{5}}{5}}_{ج}$$

$$\overset{(-)}{\tan x} = \frac{\overset{(+)}{\sin x}}{\underset{(-)}{\cos x}} \Rightarrow \sin x > 0$$

راه حل ۲:

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = +\frac{1}{5}$$

به دلیل عبارت بالا

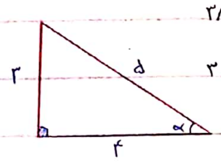
۵-۱ ست

نکته: اعداد معروف فیثاغورسی :

راه حل ۳ :

۳n - ۴n → ۵n

۳ - ۴ → ۵

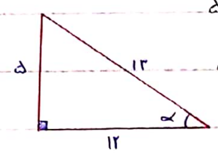


$1-\ \sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad$ $2-\ \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$3-\ \tan\alpha = \frac{3}{4}$ $\quad$ $4-\ \cot\alpha = \frac{4}{3}$

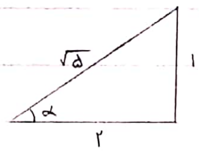
۵n - ۱۲n → ۱۳n

۵ - ۱۲ → ۱۳



$1-\ \sin\alpha = \frac{5}{13}$ $\quad$ $2-\ \cos\alpha = \frac{12}{13}$

$3-\ \tan\alpha = \frac{5}{12}$ $\quad$ $4-\ \cot\alpha = \frac{12}{5}$



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underbrace{+\frac{\sqrt{5}}{5}}_{ج}$$

$$\overset{(-)}{\tan\alpha} = \frac{\overset{(+)}{\sin\alpha}}{\underset{(-)}{\cos\alpha}}$$

$10-$ if $\frac{\sin x}{1-\cos x} = 2 \longrightarrow \cot x = ?$

راه حل ۱ :

عبارت را معکوس میکنیم $\Rightarrow \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \cot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} + \cot x \Rightarrow$

به توان ۲ میرسانیم $\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} + \cot x + \cot^2 x \Rightarrow 1 + \cancel{\cot^2 x} = \frac{1}{4} + \cot x + \cancel{\cot^2 x} \Rightarrow$

$$\cot x = \underbrace{\frac{3}{4}}_{ج}$$

راه حل ۲ : $\quad x = 2\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{x}{2}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\cancel{2\sin\alpha}\cos\alpha}{\cancel{2\sin\alpha}\sin\alpha} = \cot\alpha = 2 \Rightarrow \cot\underbrace{\frac{x}{2}}_{\alpha} = 2 \Rightarrow \tan\underbrace{\frac{x}{2}}_{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{1}{\underbrace{1-\frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot\underbrace{x}_{2\alpha} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{ج}$$

۱۱- if $\tan\beta = 2 \longrightarrow A = \dfrac{\cos\beta}{\sin^3\beta + \sin\beta} = ?$

حل: $A = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta(\sin^2\beta + 1)} \Rightarrow$ کل عبارت ÷ بر $\cos^3\beta \Rightarrow A = \dfrac{\dfrac{\cos\beta}{\cos^3\beta}}{\dfrac{\sin^3\beta}{\cos^3\beta} + \dfrac{\sin\beta}{\cos^3\beta}} = \dfrac{1+\tan^2\beta}{\tan^3\beta + \tan\beta(1+\tan^2\beta)} =$ ادامه

جواب: $\frac{5}{18}$

۱۲- if $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \longrightarrow (\tan x + \cot x)^2 = ?$

حل: بتوان ۲ طرفین: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}$

$$(\tan x + \cot x)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \underbrace{4}_{\text{ج}}$$

راه حل ۲: عدد گذاری هوشمندانه

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}\right)^2 = (1+1)^2 = \underbrace{4}_{\text{ج}}$$

۱۳- اگر $\cot\alpha = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ را بیابید؟

حل: $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \Rightarrow \tan\alpha \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{ج}}$$

۱۴- حاصل $y = \dfrac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$ را بیابید؟

حل:

$$\frac{1+\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{12} = \underbrace{\tan 75^\circ}_{\text{ج}}$$

۱۵- اگر $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ را بیابید؟

Scanned with CamScanner

ما به $\tan\alpha$ نیازمند هستیم!

راه حل ۱:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{25}{9} \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

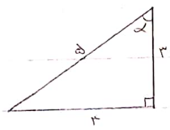
راه حل ۲:

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \Rightarrow \tan\alpha \cdot \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

راه حل ۳:

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{4}{3}$$



پس با ۳ راه حل به $\tan\alpha$ رسیدیم!

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{1}{7}$$

۱۶- به سؤال های زیر پاسخ دهید؟

1- $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{\text{ج}}$

2- $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}_{\text{ج}}$

3- $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \underbrace{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}_{\text{ج}}$

4- $\cot 75^\circ = \underbrace{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}_{\text{ج}}$

5- $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}_{\text{ج}}$

۱۴- $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{ج}$

۱۵- $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{ج}$

۱۶- $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}}_{ج}$

۱۷- $\frac{\sin 20^\circ \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \sin 30^\circ}{\cos 80^\circ \cos 40^\circ + \sin 80^\circ \sin 40^\circ} = ?$

حل:

$\sin 20^\circ \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \sin 30^\circ = \sin 50^\circ \Rightarrow$ برای صورت

$\cos 80^\circ \cos 40^\circ + \sin 80^\circ \sin 40^\circ = \cos 40^\circ \Rightarrow$ برای مخرج $\Rightarrow \frac{\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ} = 1$ ج

۱۸- $\frac{\sin^2 35^\circ \cos^2 10^\circ - \cos^2 35^\circ \sin^2 10^\circ}{\underbrace{\cos^2 35^\circ \cos^2 10^\circ}_{a} - \underbrace{\sin^2 35^\circ \sin^2 10^\circ}_{b}} = ?$

حل:

یادآوری: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow$ به اتحاد مزدوج مشهور است!

$A = \frac{\sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 10^\circ \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ} \times \frac{\sin 35^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ \cos 10^\circ + \sin 35^\circ \sin 10^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{\cancel{\cos 45^\circ}} \times \frac{\sin 45^\circ}{\cos 25^\circ}$

$= \tan 25^\circ =$ جواب

۱۹- $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = ?$

۱) $3\tan 3x \leftarrow$ صفر ✓

حل:

۲) $3\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leftarrow -3\sqrt{3}$

راه حل ۱: اگر از بسط $\tan(\alpha+\beta)$ استفاده کنید، پاشید برید کنکور تمام شد!

۳) $5\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow 5$

۴) $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$

راه حل ۲: عدد گذاری هوشمندانه:

$x =$ صفر $\Rightarrow \tan 0 + \tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{2\pi}{3} = 0 + \sqrt{3} - \sqrt{3} =$ صفر ج

۲۰- $\sin(x+\frac{\pi}{6}) + \cos(x+\frac{\pi}{3}) = ?$

حل:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \times \frac{1}{2}$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \underbrace{\cos x}_{\text{ج}}$$

۲۱- if $3\sqrt{3}\sin x + 9\cos x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3}) = ?$

حل:

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{9}}_{\text{ج}}$$

$$3\sqrt{3} \times ? = \frac{1}{2} \Rightarrow ? = \frac{\frac{1}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \Rightarrow 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2\times 9} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

۲۲- if α یک زاویه منفرجه در ناحیه ۲ و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\longrightarrow$ $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha) = ?$

حل:

روش ۱: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\tan^2\alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \tan\alpha = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$$

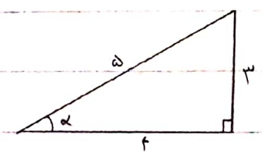
روش ۲:

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1+\cot^2\alpha = \frac{25}{9} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow \cot\alpha = \pm\frac{4}{3} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \Rightarrow \tan\alpha \cdot -\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$$

روش ۳:

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$$



$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \underbrace{\frac{1}{7}}_{\text{ج}}$$

۲ فرمول مشابهانه از اتحادهای شناسی:

1. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

23- if $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = ?$

حل:

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha = \frac{2}{3}$, $\tan\alpha \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2}$

$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$ ج

24- if $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ و $\tan\beta = \frac{3}{4}$ و β, α زوایای حاده باشند. $\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = ?$

$0 < x < 90^\circ \Rightarrow$ ناحیه ۱

حل:

راه‌حل ۱: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\beta = +\frac{4}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{25}{169} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{12}{13} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13}$

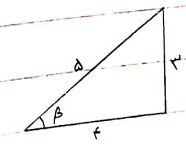
$\tan\beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \cot^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$\sin\beta = +\frac{3}{5}$

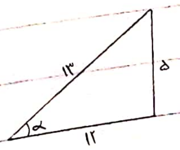
حالا داخل فرمول جایگذاری می‌کنیم!

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$ ج

راه‌حل ۲:



$\sin\beta = +\frac{3}{5}$, $\cos\beta = +\frac{4}{5}$



$\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{۵}{۱۳}\times\frac{۴}{۵} + \frac{۱۲}{۱۳}\times\frac{۳}{۵} = \frac{۲۰}{۶۵} + \frac{۳۶}{۶۵} = \frac{۵۶}{۶۵}$ ج

و در ضمن درناحیه ۱ همه‌ی عبارت های مثلثاتی مثبت هستند!

۲۵_ if $\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x + \cos x = ?$

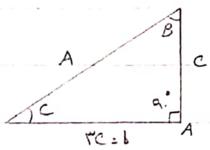
حل:

$\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \sin x\cos\frac{\pi}{۴} + \cos x\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x + \cos x) = \frac{۱}{۴}$

$\sin x + \cos x = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲}{۴\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۸} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ج

۲۶_ if $A = ۹۰^\circ$, $b = ۳c \Rightarrow \tan(B-C) = ?$

حل:



$\tan B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۳\cancel{c}}{\cancel{c}} = ۳$

$\tan C = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{c}{۳c} = \frac{۱}{۳}$

$\tan(B-C) = \frac{\tan B - \tan C}{۱+\tan B\tan C} = \frac{۳-\frac{۱}{۳}}{۱+۱} = \frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$ ج

۲۷_ if $\cos x + \tan ۲x \sin x = \frac{\cos mx}{\cos nx} \Rightarrow \frac{n}{m} = ?$

حل:

$\cos x + \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}\sin x = \cos x + \frac{\sin ۲x \sin x}{\cos ۲x} = \frac{\cos x\cos ۲x + \sin ۲x\sin x}{\cos ۲x} = \frac{\cos x}{\cos ۲x} \Rightarrow n = ۲ , m = ۱$

$\frac{n}{m} = ۲$ ج

نکته بین سوالی:

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \tan(\alpha+\beta) - \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta = \tan\alpha + \tan\beta \longrightarrow$

$\tan(\alpha+\beta) = \tan\alpha + \tan\beta + \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta \longrightarrow \text{عدد ثابت} = \tan\alpha + \tan\beta + \text{عدد ثابت}\tan\alpha\tan\beta$

مثال: $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ = ?$ جواب $= \sqrt{3}$

۲۸- if $\begin{cases} \tan(\underbrace{\alpha+\beta}_{A}) = 2 \\ \tan(\underbrace{\alpha-\beta}_{B}) = 3 \end{cases} \longrightarrow \tan \underbrace{2\alpha}_{(A+B)} = ?$

حل: $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{2+3}{1-6} = \dfrac{5}{-5} = \underbrace{-1}_{ج}$

۲۹- $\dfrac{\tan^2 52{,}5^\circ - \tan^2 7{,}5^\circ}{1 + (-\tan^2 52{,}5^\circ \tan^2 7{,}5^\circ)} = ?$

حل: $\boxed{\dfrac{\tan 52{,}5^\circ - \tan 7{,}5^\circ}{1 + \tan 52{,}5^\circ \tan 7{,}5^\circ}} \times \boxed{\dfrac{\tan 52{,}5^\circ + \tan 7{,}5^\circ}{1 - \tan 52{,}5^\circ \tan 7{,}5^\circ}}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\tan 45^\circ \times \tan 60^\circ = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

۳۰- $\dfrac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1 - \sin^2\theta - \cos^4\theta} = ?$

حل: $\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta} \times \dfrac{1}{\sin^2\theta}}{1 - \sin^2\theta - \cos^4\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}}{\cos^2\theta - \cos^4\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}}{\cos^2\theta \sin^2\theta} =$ ادامه

$\dfrac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta \times \frac{1}{4}\sin^2 2\theta} = \underbrace{16 \sin^{-4} 2\theta}_{ج}$

۳۱- $\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ = ?$

حل:

$\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ صورت و مخرج ضرب => $\dfrac{\overbrace{\sin 20^\circ \times \cos 20^\circ}^{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}}{\sin 20^\circ} \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ = \dfrac{\overbrace{\sin 40^\circ \times \cos 40^\circ}^{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}}{2\sin 20^\circ} \times \cos 80^\circ$

$= \dfrac{\sin 80^\circ}{4\sin 20^\circ} \times \cos 80^\circ = \dfrac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \underbrace{\dfrac{1}{8}}_{ج}$

۳۱- $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x + \cos x \Rightarrow \tan x = ?$

حل:

$$\frac{1}{2}\sin x = \sin x + \cos x \Rightarrow -\frac{1}{2}\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x \cdot \frac{-1}{2} = 1 \Rightarrow \underbrace{\tan x = -2}_{\text{ج}}$$

۳۲- $\cos x + 2\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = ?$

حل:

ناحیه ۴

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = +\sin x \Rightarrow \cos x + 2\sin x = 0 \Rightarrow \cos x \div \text{کل عبارت} \Rightarrow$$

$$1 + 2\tan x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = \underbrace{-\frac{4}{5}}_{\text{ج}}$$

۳۳- $\sin 195^\circ \times \sin 105^\circ = ?$

حل:

ناحیه ۳

$$\sin 195^\circ = \sin(180^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

ناحیه ۲

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = +\cos 15^\circ$$

$$\Rightarrow -\sin \underbrace{15^\circ}_{\alpha} \times \cos \underbrace{15^\circ}_{\alpha} = -\frac{1}{2}\sin 30^\circ = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\text{ج}}$$

نکته بین درسی:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۳۵- $(\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8})^2 - (\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8})^2 = ?$

راه حل ۱:

$$\cancel{\sin^2\frac{\pi}{8}} - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \cancel{\cos^2\frac{\pi}{8}} - \cancel{\sin^2\frac{\pi}{8}} - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \cancel{\cos^2\frac{\pi}{8}} = -4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow -4 \times \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underbrace{-\sqrt{2}}_{\text{ج}}$$

راه حل ۱: $-2ab = -4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = -4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{4} = \underbrace{-\sqrt{2}}_{ج}$

36- if $\sin x + \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2x = ?$

حل: $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x = \frac{9}{25} \Rightarrow \underbrace{\sin 2x = -\frac{16}{25}}_{ج}$

37- $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 4x = ?$

حل: $(\sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 4x = -\frac{3}{4}$

$1 + \cot^2 4x = \frac{1}{\sin^2 4x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{16}{9} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow \cot x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\tan x = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow$ جواب ب

38- $A = \cos 2x - \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{2}{1+\cot^2 x} = ?$

حل: $A = \cos 2x - \cos^2 x + 2\sin^2 x = \cancel{\cos^2 x} - \sin^2 x - \cancel{\cos^2 x} + 2\sin^2 x = \underbrace{\sin^2 x}_{ج}$

39- if $x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = ?$

راه حل ۱:

$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \times \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{1 - \sin 2x}\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \underbrace{-\sqrt{3}}_{ج}$

راه حل ۲:

$\frac{\cancel{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{3})}{\cancel{\sqrt{2}}\sin(-\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \underbrace{-\sqrt{3}}_{ج}$

راه حل ۳:

کل عبارت تقسیم بر $\cos x$ $\Rightarrow \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = -\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = -\tan(\frac{\pi}{4} + x)\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} =$

$-\tan(\frac{\pi}{3}) = \underbrace{-\sqrt{3}}_{ج}$

Scanned with CamScanner

$40-$ if $\cos(x+\frac{\pi}{3}) + \cos(x-\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2x = ?$

حل:

$$\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\Sigma = \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 2x = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \underbrace{-\frac{1}{9}}_{\text{ج}}$$

$41-$ $A = \dfrac{\cos 2x + 3\cos x + 1}{3\sin x + \sin 2x} = ?$

حل:

راه حل ۱: $A = \dfrac{2\cos^2 x \cancel{-1} + 3\cos x \cancel{+1}}{3\sin x + 2\sin x \cos x} = \dfrac{\cos x\,\cancel{(2\cos x + 3)}}{\sin x\,\cancel{(2\cos x + 3)}} = \underbrace{\cot x}_{\text{ج}}$

راه حل ۲: عددگذاری هوشمندانه: x را انتخاب می‌کنیم که بین گزینه ها تمایز ایجاد کند!

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1}{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1) $\frac{1}{2}\cos x \rightarrow \frac{1}{4}$

2) $\cot x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ ✓

3) $\frac{\cos 2x}{\sin x} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\cot^2\frac{x}{2} \rightarrow 3$

$42-$ if $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = ?$

حل: $\alpha = \frac{x}{2}$ $\quad x = 2\alpha$ $\quad \tan^2\frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = \underbrace{2}_{\text{ج}}$

$43-$ $A = \dfrac{2\sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{2\sin 20^\circ + \sin 40^\circ} = ?$

حل:

$$A = \frac{2\sin 20^\circ - 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cancel{2\sin 20^\circ}(1-\cos 20^\circ)}{\cancel{2\sin 20^\circ}(1+\cos 20^\circ)} = \underbrace{\tan^2 10^\circ}_{\text{ج}}$$

$44-$ $A = \dfrac{\tan x(1-\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)^2} = ?$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$

حل:

$$A = \frac{2\tan x(1-\tan^2 x)}{2(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)} = \frac{1}{2}\underbrace{\boxed{\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}}_{\sin 2x}\;\underbrace{\boxed{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}}_{\cos 2x} = \frac{1}{2} \times \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{8}}_{\text{ج}}$$

۴۵- $A=\dfrac{2\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{2\sin 40^\circ - \sin 80^\circ}=?$

حل:

$$A=\frac{2\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ - 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cancel{2\sin 40^\circ}\,(1+\cos 40^\circ)}{\cancel{2\sin 40^\circ}\,(1-\cos 40^\circ)}=\cot^2(40_{-}20)^\circ=\underbrace{\cot^2 20^\circ}_{ج}$$

۴۶- به سوال های زیر پاسخ کامل دهید.

الف) $\sin^2 22{,}5^\circ=?$

حل:

$$\sin^2 22{,}5^\circ=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2}=\frac{\frac{2-\sqrt2}{2}}{2}=\underbrace{\frac{2-\sqrt2}{4}}_{ج}$$

ب) $\cos^2 22{,}5^\circ=?$

حل:

$$\cos^2 22{,}5^\circ=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}=\frac{\frac{2+\sqrt2}{2}}{2}=\underbrace{\frac{2+\sqrt2}{4}}_{ج}$$

پ) $\tan^2 22{,}5^\circ=?$

حل:

$$\tan^2 22{,}5^\circ=\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\frac{2-\sqrt2}{\cancel{2}}}{\frac{2+\sqrt2}{\cancel{2}}}=\underbrace{\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}}_{ج}$$

ت) $\cot^2 22{,}5^\circ=?$

ابتدا تانژانت مدنظر را بدست آورده و سپس جای صورت و مخرج را عوض می‌کنیم!

$$\tan^2 22{,}5^\circ=\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}\ \xRightarrow{\text{معکوس}}\ \cot^2 22{,}5^\circ=\underbrace{\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}}_{ج}$$

۴۷- if $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{5} \Rightarrow \tan 2\alpha=?$

حل:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\ \xRightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\ 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha=4 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{36}{15}=\underbrace{\frac{12}{5}}_{ج}$$

۴۸- if $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha=?$

حل:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\ \xRightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\ 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha=4 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}}=\frac{12}{13}$$ ج

۴۹- if $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha=?$

حل:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\ \xRightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\ 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha=4 \Rightarrow$$

$$\tan\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{13}{9}}=\frac{5}{13}$$ ج

۵۰- if $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5} \Rightarrow \cot 2\alpha=?$

حل:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\ \xRightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\ 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha=4 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{3}$$

ابتدا $\tan 2\alpha$ را پیدا می‌کنیم و سپس جای صورت و مخرج را عوض می‌کنیم.

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{12}{5} \Rightarrow \cot 2\alpha=\frac{5}{12}$$ ج

۵۱- if $\tan x-\cot x=6 \Rightarrow \tan 2x-\cot 2x=?$

حل:

$$\tan x-\cot x=-2\cot 2\alpha=-2\cot 2x=6 \Rightarrow \cot 2x=-3\ ,\ \tan 2x=-\frac{1}{3}$$

$$\tan 2x-\cot 2x=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}$$ ج

۵۲- if $\frac{\sin x}{1+\cos x}=2 \Rightarrow \tan 2x=?$

حل:

راه حل ۱: عکس طرفین ۲ $\Rightarrow \frac{\overbrace{1}^{a}+\overbrace{\cos x}^{b}}{\underbrace{\sin x}_{c}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x}+\cot x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}-\cot x \Rightarrow$ طرفین به توان ۲

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}-\cot x+\cot^2 x \Rightarrow 1+\cancel{\cot^2 x}=\frac{1}{4}-\cot x+\cancel{\cot^2 x} \Rightarrow \cot x=\frac{-3}{4} \Rightarrow \tan x=\frac{-4}{3}$$ ج

راه حل ۱:

$2\alpha = x \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\alpha} = \tan\frac{x}{2} = 2$

$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = -\underbrace{\frac{4}{3}}_{ج}$

۵۳_ if $\sin(\frac{3\pi}{2}+x) = 2\sin x \Rightarrow \tan 2x = ?$

حل:

$-\cos x = 2\sin x \Rightarrow -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\underbrace{\frac{4}{3}}_{ج}$

۵۴- if $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ زاویه α منفرجه و $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ $\Rightarrow \tan 2\alpha = ?$

حل:

راه حل ۱:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{25}{16} - 1 \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\underbrace{\frac{24}{7}}_{ج}$

راه حل ۲:

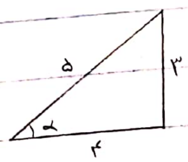
$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{25}{9} - 1 \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{-4}{3}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\underbrace{\frac{24}{7}}_{ج}$

راه حل ۳:

$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{-3}{4}$ درناحیه ۲ $tg\,\alpha$ منفی است!



$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\underbrace{\frac{24}{7}}_{ج}$

۵۵- if $\tan x = 3 \Rightarrow \tan(\underbrace{2x}_{\alpha} - \underbrace{\tfrac{\pi}{4}}_{\beta}) = ?$

به $\tan 2x$ نیاز دارم!

حل:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{6}{-8} = \underbrace{-\frac{3}{4}}$$

$$\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 2x - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 2x \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{7}{\cancel{4}}}{\frac{1}{\cancel{4}}} = \underbrace{-7}_{ج}$$

۵۶- if $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan \underbrace{3\alpha}_{(2\alpha+\alpha)} = ?$

حل:

$$\frac{\cancel{2}\sin\alpha \cancel{\cos\alpha}}{\cancel{2}\cos\alpha \cancel{\cos\alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{11}{\cancel{3}\times 2}}{\frac{1}{\cancel{3}_1}} = \frac{11}{2}$$

جواب = ۵/۵

۵۷- if $\dfrac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2 \Rightarrow \cot 2x = ?$

حل:

=> کل عبارت را عکس می‌کنیم! => $\dfrac{\overbrace{\sin x}^{a} + \overbrace{3\cos x}^{b}}{\underbrace{2\cos x}_{c}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\tan x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\tan x = -1 \Rightarrow$

$\tan x = -2$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{-2\times 2}{1-\frac{4}{1}} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot 2x = \underbrace{\frac{3}{4}}_{ج}$$

۵۸- $\dfrac{1}{\tan \underbrace{22.5^\circ}_{\alpha} - \cot \underbrace{22.5^\circ}_{\alpha}} = ?$

حل:

$$\tan 22.5^\circ - \cot 22.5^\circ = -2\cot 45^\circ = -2\times 1 = -2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{-2}}_{ج}$$

۵۹- $\tan \underbrace{15^\circ}_{\alpha} + \cot \underbrace{15^\circ}_{\alpha} = ?$

حل:

$$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \underbrace{4}_{ج}$$

۶۰- if $\tan 2x + \cot 2x = 4 \Rightarrow \sin 4x = ?$

حل:

$$\tan 2x + \cot 2x = \frac{2}{\sin 4x} = 4 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$ جواب

۶۱- $9\sin^2 x - 24\sin^4 x + 16\sin^6 x = ?$ به ازای $x = \frac{\pi}{18}$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

حل: استفاده از اتحاد مربع کامل =>

$$9\sin^2 x - 24\sin^4 x + 16\sin^6 x = (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = \sin^2 3x \Big|_{x=\frac{\pi}{18}} = \frac{1}{4}$$ جواب

۶۲- if $\sin x \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x = ?$

حل:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \quad , \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{5}{4}\sin^2 2x \Big|_{\sin 2x = \frac{2}{3}} = \frac{13}{9}$$ جواب

۶۳- if $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = ?$

حل:

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{5}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \left(\frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{5}\right) = \frac{2}{5}$$ جواب

۶۴- $A = \left[\tan \frac{\pi}{5}\right] + \left[\tan \frac{4\pi}{5}\right] = ?$

حل: $\tan \frac{4\pi}{5} = \tan\big(\overbrace{\pi - \frac{\pi}{5}}^{\text{ناحیه } 2}\big) = -\tan \frac{\pi}{5}$

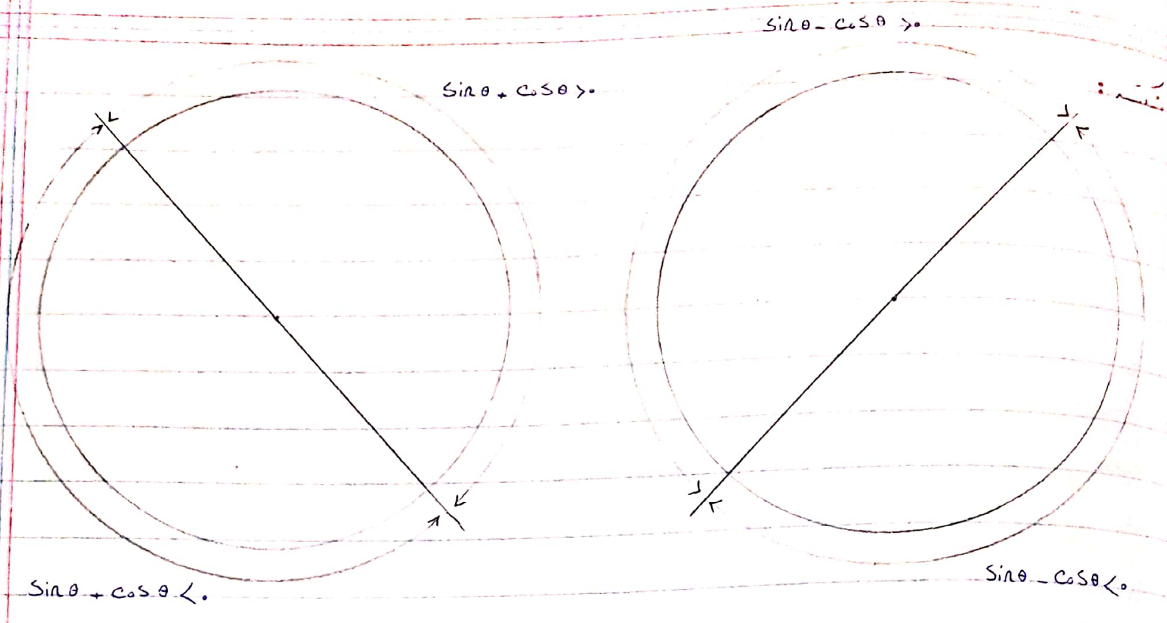
نکته:

$$[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$A = [\underbrace{\tan \frac{\pi}{5}}_{u}] + [\underbrace{-\tan \frac{\pi}{5}}_{u}] = -1$$ جواب

$u \notin \mathbb{Z}$ = اگر بود در جدول می‌آمد

نکته:



65- if $\underset{240^\circ}{\frac{4\pi}{3}} < x < \underset{270^\circ}{\frac{3\pi}{2}}$ ناحیه ۳ $\Rightarrow |\overbrace{\sin x - \cos x}^{-}| + |\overbrace{\sin x + \cos x}^{-}| = ?$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x - \cos x < 0\\ \sin x + \cos x < 0\end{array}\right\} \Rightarrow -\sin x + \cancel{\cos x} - \sin x - \cancel{\cos x} = \underbrace{-2\sin x}_{ج}$$

66- if $0 < x < \underset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}$ ناحیه ۱ $\Rightarrow \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}} = ?$

حل:

$$\sqrt{\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2} = \left|\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right| = \frac{|\overbrace{\sin x+\cos x}^{+}|}{|\underbrace{\sin x-\cos x}_{-}|} = \frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$ => کل عبارت ÷ $\cos x$ =>

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}_{ج}$$

67- if $\tan x = \frac{3}{4}$ و x حاده باشد ($0^\circ < x < 90^\circ$) $\Rightarrow \sin x + \cos x = ?$

حل:

راه‌حل ۱: $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$

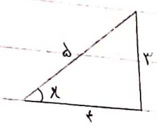
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$

$\sin x + \cos x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \underbrace{\frac{7}{5}}_{\text{ج}}$

راه حل ۱:

$\tan x = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{3}{4}$

+ cos x و sin x در ناحیه ۱ مثبت است. $\Rightarrow \sin x = \frac{3}{5} \quad \cos x = \frac{4}{5}$



$\sin x + \cos x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \underbrace{\frac{7}{5}}_{\text{ج}}$

۶۸- $A = \cos^2\theta\,(1 + 2\tan^2\theta) + (\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = ?$

حل:

$\cos^2\theta\left(1 + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) + \cos^2 - 1 = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta + \cos^2\theta - 1 = 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 1$

$\Rightarrow 2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) - 1 = 2 - 1 = \underbrace{1}_{\text{ج}}$

۶۹- if $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta} = ?$

حل:

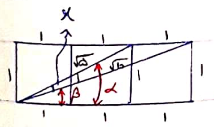
$A = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{-(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} \times \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \times \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = -\tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \times \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times -\sqrt{3} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{ج}}$

۷۰- در شکل مقابل سه مربع به ضلع واحد در کنار هم قرار دارند. cos x را بدست بیاورید.

1cm

حل:



$\alpha - \beta = x$

$\cos x = ?$

مشخصات مثلث با قاعده ۳: $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ، $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

مشخصات مثلث با قاعده ۲: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$
$\underbrace{\frac{7\sqrt{2}}{10}}_{\text{ج}}$

۷۱- $A = \frac{\sin 5^\circ - \sqrt{3}\cos 5^\circ}{\sin 10^\circ + \cos 10^\circ} = ?$

حل:

صورت => از ۲ فاکتور میگیریم => $2(\frac{1}{2}\sin 5^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5^\circ) = 2(\cos 60^\circ \sin 5^\circ - \cos 5^\circ \sin 60^\circ) =$

$2(\sin(-60^\circ + 5^\circ)) = -2(\sin 55^\circ)$

مخرج => از $\sqrt{2}$ فاکتور میگیریم => $\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 10^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10^\circ) = \sqrt{2}(\sin 10^\circ \cos 45^\circ + \cos 10^\circ \sin 45^\circ) =$

$\sqrt{2}(\sin 55^\circ)$

ادامه => $\frac{-2\,\cancel{\sin 55^\circ}}{\sqrt{2}\,\cancel{\sin 55^\circ}} = \underbrace{-\sqrt{2}}_{\text{ج}}$

۷۲- $A = \sin 40^\circ(\tan 50^\circ + \tan 20^\circ) = ?$

حل:

$A = \sin 40^\circ(\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}) \Rightarrow \sin 40^\circ(\frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}) = \sin 50^\circ + \frac{\sin 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$\Rightarrow \frac{\overbrace{\sin 50^\circ}^{\cos 40^\circ}\cos 20^\circ + \sin 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cancel{\cos 20^\circ}}{\cancel{\cos 20^\circ}} = \underbrace{1}_{\text{ج}}$

$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$

۷۳- if $\sin x = \cos x + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin 2x = ?$

حل:

$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2} \xRightarrow{\text{توان}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin 2x = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\text{ج}}$

۷۴- $A = \cos^5 x \sin x - \sin^5 x \cos x = ?$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$

حل:

$A = \sin x\cos x(\cos^4 x - \sin^4 x) = \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x}\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x}\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{ج}}$

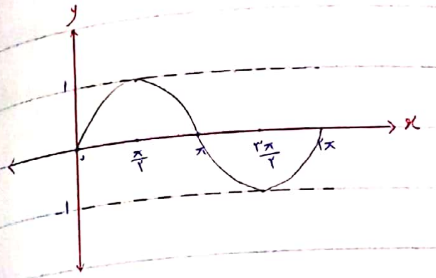
$\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x \times \cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 4x} = \frac{1}{4}\sin 4x \Big|_{x=\frac{\pi}{24}}$

توابع مثلثاتی :

ما در این بخش میخواهیم به ویژگی ها و نمودارهای ۴ تابع مثلثاتی به نام های $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ بپردازیم.

۱- شناسنامه آتای $\sin\alpha$:

نمودار تابع $f(x)= \sin x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ بصورت مقابل است :



نکات :

۱- در تابع $f(x)= \sin x$ واحد x برحسب رادیان است .

۲- دامنه تابع مذکور مجموعه اعداد حقیقی است . $(D_f = \mathbb{R})$

۳- برد تابع مذکور $[-1,1]$ می باشد . $(R_f = [-1,1])$

۴- نمودار این تابع محور x ها را در $x = k\pi$ که $k \in Z$ قطع می‌کند . $(\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi)$

۵- بیشترین مقدار این تابع برابر ۱ است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ میدهد . $(\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2})$

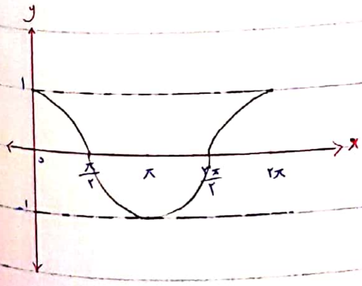
کمترین مقدار این تابع برابر ۱- است که $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ میدهد . $(\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2})$

۶- به این تابع ، موج سینوسی نیز گفته میشود .

۷- این تابع در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کاملاً شبیه در بازه‌ی $[-2\pi, 0]$ همین تابع است و می‌گوییم در اصطلاح دوره تناوب این تابع برابر 2π است . $(T_{\text{اصلی}} = 2\pi)$

۲- شناسنامه آتای $\cos\alpha$:

نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ بصورت مقابل است :



نکات:

۱. در تابع $f(x)=\cos x$ ، x برحسب رادیان است.

۲. دامنه تابع مذکور مجموعه اعداد حقیقی است. ($D_f=\mathbb{R}$)

۳. برد تابع مذکور بصورت مقابل است: ($R_f=[-1,1]$)

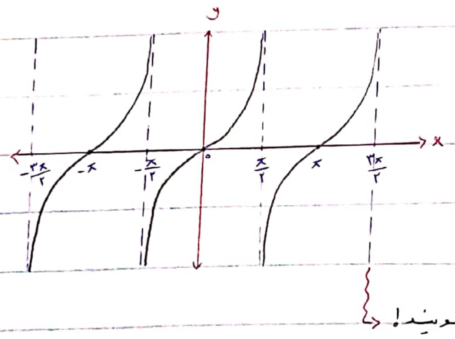
۴. نمودار تابع مذکور محور x ها را در نقاطی به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$) قطع میکند.
($\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$) ($k\in Z$)

۵. بیشترین مقدار این تابع برابر ۱ است و در $x=2k\pi$ (مضارب زوج π) رخ میدهد.
کمترین مقدار این تابع برابر ۱- است و در $x=(2k+1)\pi$ (مضارب فرد π) رخ میدهد.

۶. به این تابع، تابع کسینوسی نیز میگویند و دوره تناوب اصلی این تابع برابر 2π است. ($T_{اصلی}=2\pi$)

۳. شناسنامه آقای $\tan\alpha$:

نمودار تابع $f(x)=\tan x$ بصورت مقابل است:



در این خط چین ها تابع مذکور تعریف نمی‌شود. چرا؟

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

این صفر شده و کسر تعریف نمی‌شود.

مجانب قائم می‌گویند!

نکات:

۱. دامنه: $D_f=\{\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}\}$ (یعنی نقاط شامل مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نیست.)

۲. $R_f=(-\infty,+\infty)$

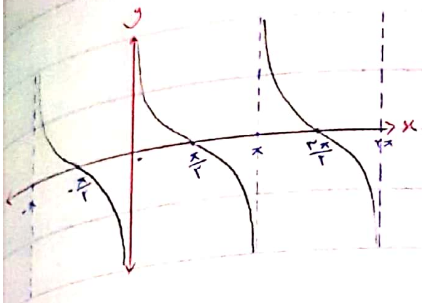
۳. نمودار تابع مذکور محور x ها را در $x=k\pi$ قطع میکند و ($x=k\pi$, $k\in Z$)

۴. تابع غیر یک به یک است و متناوب است و دوره تناوب اصلی آن $\frac{2\pi}{2}$ است. ($T_{اصلی}=2\frac{\pi}{2}$)

۵. تابع نه صعودی و نه نزولی است ولی در بازهٔ پیوستگی اکیداً صعودی است.

۴- شناسنامه ای $\cot x$:

نمودار تابع $f(x)=\cot x$ بصورت مقابل است:



نکات:

۱- دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (یعنی نقطه شامل مضارب صحیح π نیست.)

۲- برد $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع منیز یک‌بیک است.

۴- این تابع محور x ها را در نقاط $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ قطع میکند.

۵- تابع متناوب است و دوره تناوب اصلی آن برابر $\frac{\cancel{4}\pi}{\cancel{4}}$ است. $(T_{\text{اصلی}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\pi)$

۶- تابع نه صعودی و نه نزولی است ولی در بازه‌ی پیوستگی ابتدا نزولی است.

دورهٔ تناوب (T):

$$\text{if } T > 0 \quad , \quad f(\underbrace{x+T}_{x+T \text{ تابع برحسب}}) = \underbrace{f(x)}_{x \text{ تابع برحسب}}$$

مثال: $f(x) = \sin x \Rightarrow T = 2\pi$

$$\underbrace{f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)}_{f(x+T)} = \underbrace{\sin x}_{f(x)}$$

در مورد نمودارهای سینوسی و کسینوسی داریم:

۱- اندازهٔ ضریب $\sin x$ یا $\cos x$ = اندازهٔ عرض min = اندازهٔ عرض max

۲. در $y = a\sin bx$ داریم:

الف) اگر a و b هم علامت باشند => نمودار در ابتدا صعودی   ب) اگر a و b مختلف العلامت باشند => نمودار در ابتدا نزولی

۳. در $y = a\cos bx$ داریم:

الف) اگر $a>0$ باشد => نمودار از قله شروع میشود.   ب) اگر $a<0$ باشد => نمودار از دره شروع میشود.

$$1.\ y = K\sin(ax+b)+c \longrightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$2.\ y = K\cos(ax+b)+c \longrightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$3.\ y = K\tan(ax+b)+c \longrightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$4.\ y = K\cot(ax+b)+c \longrightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

نکته اساسی: تنها عامل موثر بر دوره تناوب توابع مثلثاتی، ضریب x موجود درکمان توابع مثلثاتی میباشد.

مثال:

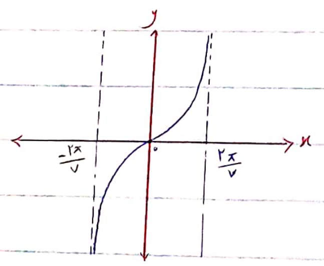
$$1.\ y = 8\sin(2x+5)$$

$$a = 2 \qquad T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \underbrace{\pi}_{ج}$$

$$2.\ y = 4\sin(2x+10)$$

$$a = 2 \qquad T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{1} = \underbrace{\pi}_{ج}$$

۳. قسمتی از شکل $y = \tan ax$ بصورت زیر میباشد، a را بیابید؟



حل:

$$T_{اصلی} = \frac{4\pi}{7} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a|\,4\cancel{\pi} = 7\cancel{\pi} \Rightarrow |a| = \frac{7}{4}$$

$$\underbrace{a = \pm\frac{7}{4}}_{ج}$$

$$4.\ y = -8\sin(6x+16)$$

$$a = 6 \qquad T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{2\pi}{6} = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{ج}$$

نکات بسیار مهم و (Important) :

۱- دورهٔ تناوب دو تابع باید هم جنس یا هم سنخ باشد تا مجموع یا تفاضل دو تابع متناوب باشد.

مثال: $y = \underbrace{\sin 4x}_{1} + \underbrace{\cos \pi x}_{2}$

$1) \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \underbrace{\frac{\pi}{2}}$

$2) \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = \underbrace{2}$

پس متناوب نیست. <= هم سنخ نیست!

۲- برای محاسبهٔ دورهٔ تناوب مجموع یا تفاضل چند تابع ابتدا، دورهٔ تناوب تک تک عبارت ها را بدست می آوریم سپس در صورت هم سنخ یا هم جنس بودن آنها داریم:

$T =$ ک.م.م T های بدست آمده

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع $y = \underbrace{\cos 3x}_{1} + \underbrace{\sin 4x}_{2} + \underbrace{\tan x}_{3}$ کدام است؟

$1) \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{6}$

$2) \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{6} \Rightarrow T_{\text{کلی}} = 12 \times \frac{\pi}{6} = \underbrace{2\pi}_{\text{ج}}$

$3) \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|1|} = \frac{\pi}{1} = \pi \Rightarrow T = \frac{6\pi}{6}$

۳- برای بدست آوردن دورهٔ تناوب توابع، باید تا جایی که امکان دارد عبارت داده شده را ساده کنیم و اگر این عمل را انجام ندهیم ممکن است دورهٔ تناوب بدست آمده اصلی نباشد.

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin \underbrace{2x}_{a} \cos \underbrace{2x}_{a}$ را بدست آورید؟

$f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

$a = 4 \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{ج}}$

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan \underbrace{3x}_{a} - \cot \underbrace{3x}_{a}$ را بدست آورید؟

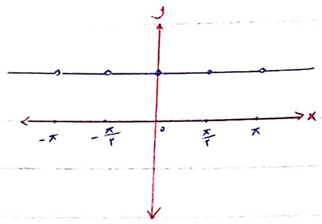
$f(x) = \tan 3x - \cot 3x = -2\cot 6x \Rightarrow a = 6$

$T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|6|} = \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{ج}}$

۴- توابع ثابت ($y = c$) متناوب می‌باشند ولی دورهٔ تناوب اصلی ندارند.

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan x . \cot x$ را بدست آورید؟

یادآوری: $f(x) = \tan x . \cot x = 1 \quad (x \neq \frac{k\pi}{2})$



$T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{2}$

۵- اثر قدرمطلق و توان روی دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی:

الف) توابع سینوس و کسینوس وقتی به توان فرد می‌رسند، دورهٔ تناوبشان تغییری نمیکند.

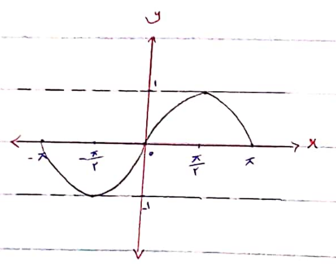
مثال:

$y = \sin x \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = 2\pi$

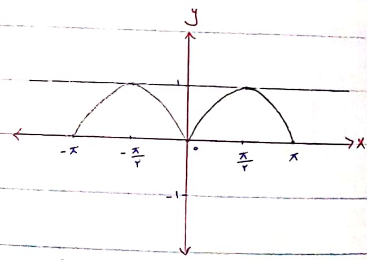
$y = \sin^{\overset{\text{فرد}}{5}} x \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = 2\pi$

ب) اگر توابع سینوس و کسینوس به توان زوج برسند ($\sin^{2n} ax$ یا $\cos^{2n} ax$) یا در داخل قدر مطلق قرار بگیرند ($|\sin ax|$ یا $|\cos ax|$) دورهٔ تناوب اصلی آنها نصف میشود. ($T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{|a|}$)

مثال:



$y = \sin x$
$T_{\text{اصلی}} = 2\pi$



$y = |\sin x|$ به نمودار دندانه ارّه‌ای مشهور است!
$T_{\text{اصلی}} = \pi$

ج) توابع تانژانت و کتانژانت به توان هر عددی برسند (چه زوج چه فرد) یا در داخل قدر مطلق قرار بگیرند دورهٔ تناوبشان دستخوش تغییر نمیشود.

۶- توابع غیر مثلثاتی نیز می‌توانند متناوب باشند.

معروف‌ها:

1- $y = ax - [ax] \longrightarrow T = \frac{1}{|a|}$

2- $y = [ax] + [-ax] \longrightarrow T = \frac{1}{|a|}$

3- $y = (-1)^{[ax]} \longrightarrow T = \frac{2}{|a|}$

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $y = \underbrace{|\cos 3x|}_{1} + \underbrace{\tan^2 \frac{x}{3}}_{2} + \underbrace{2\cos^3 x}_{3}$ را بدست آورید؟

1) $\Rightarrow T_{اصلی} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{1\pi}{3}$

2) $\Rightarrow T_{اصلی} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|\frac{1}{3}|} = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi \Rightarrow T = \frac{9\pi}{3}$ $\qquad T_{کل} = 18 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$ ج

3) $\Rightarrow T_{اصلی} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = \frac{6\pi}{3}$

مثال: دورهٔ تناوب اصلی تابع $y = \underbrace{3x - [3x]}_{1} + \underbrace{\cos^4 \pi x}_{2}$ را بدست آورید؟

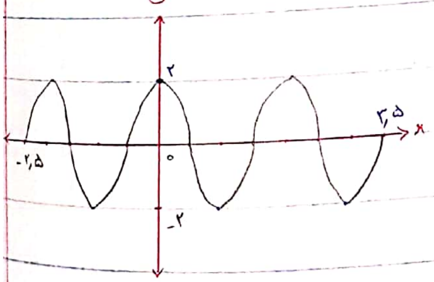
1) $\Rightarrow T_{اصلی} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$

$T_{کل} = 1$ ج

2) $\Rightarrow T_{اصلی} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|\pi|} = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 1$

مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $y = a\sin(\frac{1}{2} + bx)\pi$ است، ab را بیابید؟

حل: $y = a\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{b\pi x}{1}) = a\cos b\pi x$



$x = 0 \quad y = 2 \Rightarrow a \times 1 = 2 \Rightarrow a = 2$

$3T_{اصلی} = 6 \Rightarrow T_{اصلی} = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{1} \Rightarrow$

قدر مطلق حذف میشود.

$\Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$a.b = 2 \times 1 = 2$ ج

مثال: برد تابع $f(x) = 2 - 3\sin(x+\pi)$ را بدست آورید؟

حل: $-1 \le \sin(\alpha) \le 1 \Rightarrow -1 \le \sin(x+\pi) \le 1 \xrightarrow{\times -3} -3 \le -3\sin(x+\pi) \le 3 \xrightarrow{+2}$

$-1 \le 2 - 3\sin(x+\pi) \le 5 \Rightarrow -1 \le f(x) \le 5 \Rightarrow R_f = [-1, 5]$ ج

Scanned with CamScanner

تست: بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sin^2 x-\cos x$ کدام است؟

حل: یادآوری: $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x$

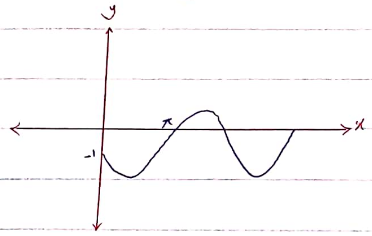
$f(x)=1-\cos^2 x-\cos x \Rightarrow -(\cos^2 x+\cos x)+1 \Rightarrow -((\cos x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})+1 \Rightarrow$

$-(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$

$-1\leq \cos x\leq 1 \xRightarrow{+\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}\leq \cos x+\frac{1}{2}\leq \frac{3}{2} \xRightarrow[2]{\text{به توان}} 0\leq (\cos x+\frac{1}{2})^2\leq \frac{9}{4} \xRightarrow{\times -}$

$-\frac{9}{4}\leq -(\cos x+\frac{1}{2})^2\leq 0 \xRightarrow{+\frac{5}{4}} -1\leq -(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}\leq \frac{5}{4} \Rightarrow -1\leq f(x)\leq \frac{5}{4}$ بیشترین

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x)=\cos(x+b\pi)+a$ بصورت روبرو باشد، بیشترین مقدار تابع f را بدست آورید؟



حل: $f(x)=\cos(x+b\pi)+a$

$(0,-1)\in f \Rightarrow \cos b\pi+a=-1$

به دستگاه داریم! $\Leftarrow$

$(\pi,0)\in f \Rightarrow -\cos b\pi+a=0$

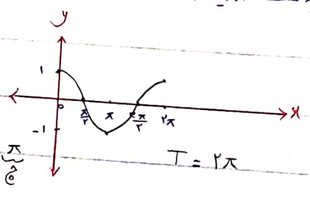
$$\begin{cases}\cancel{\cos} b\pi+a=-1\\ -\cancel{\cos} b\pi+a=0\end{cases} \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$\cos b\pi-\frac{1}{2}=-1 \Rightarrow \cos b\pi=-\frac{1}{2}$

$-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow -1\leq \cos(x+b\pi)\leq 1 \xRightarrow{-\frac{1}{2}} -\frac{3}{2}\leq \underbrace{\cos(x+b\pi)-\frac{1}{2}}_{f(x)}\leq \underset{max}{\frac{1}{2}}$ جواب

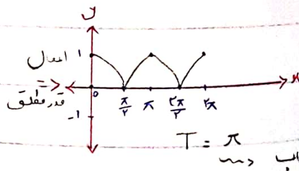
تمرین: دوره تناوب تابع $y=|\cos x|$ را بدست آورید؟

روش ۱: رسم می‌کنیم:



$T=2\pi$

$y=\cos x$



قدرمطلق

$T=\pi$ جواب

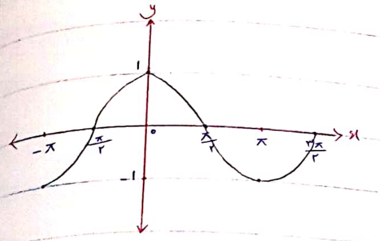
$y=|\cos x|$

روش ۲: $T_{\text{اصلی}}=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{|1|}=\frac{\pi}{1}=\pi$ جواب

تست : دوره تناوب کدام یک از توابع زیر با بقیه متفاوت است؟

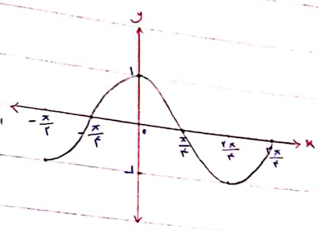
۱) $y = 1 + \cos 2x$ ۲) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ ۳) $y = |1 + \cos 2x|$ ۴) $y = 1 + |\sin 2x|$ ✓

حل : بررسی گزینه ۱ : روش ۱ : رسم می‌کنیم



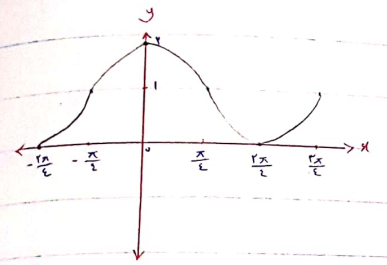
$y = \cos x$

انقباض => افقی با ضریب ۲



$y = \cos 2x$

انتقال ۱ واحد => رو به بالا

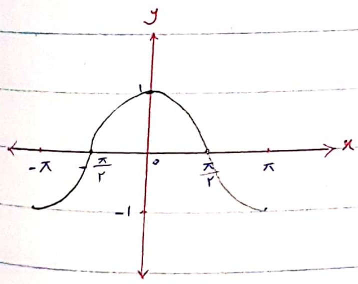


=> $T_{\text{اصلی}} = \pi$ همانطور که دارید می‌بینید.

روش ۲ :

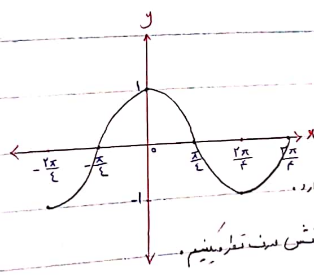
$$T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

بررسی گزینه ۲ : روش ۱ : رسم می‌کنیم



$y = \cos x$

انقباض افقی => با ضریب ۲



$y = \cos 2x$

انتقال $\frac{\pi}{8}$ واحد => به راست

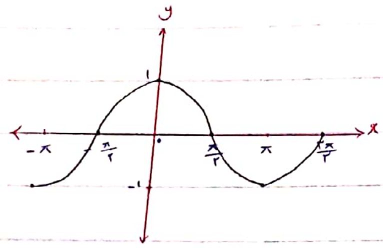
هیچ تغییری روی دامنه ندارد، پس از کشیدنش صرف نظر میکنیم.

=> $T_{\text{اصلی}} = \pi$ همانطور که دارید می‌بینید.

روش ۲ : $T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$

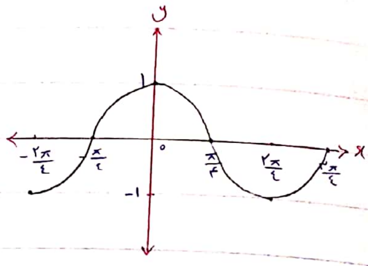
ما در درسنامه گفتیم که اگر سینوس و کسینوس همراه قدرمطلق باشد، دوره تناوب آن نصف می‌شود اما در گزینه ۳ یک نیز در داخل قدرمطلق آمده و با تابع جمع شده پس باید مراقب باشید و حتماً از روش رسم بهره بجویید.

بررسی گزینه ۳ : رسم می‌کنیم



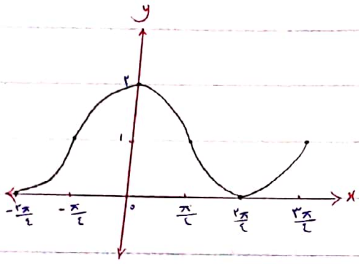
$y = \cos x$

انقباض افقی
=>
با ضریب ۲



$y = \cos 2x$

انتقال یک
=>
واحد رو به بالا

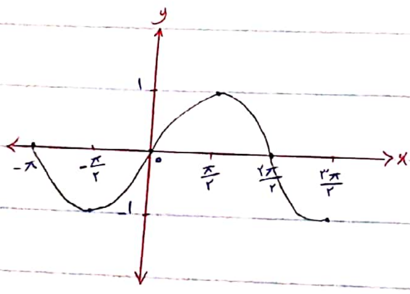


$y = 1 + \cos 2x$

قدرمطلق هیچ تأثیری ندارد و می‌توان آنرا => حذف کرد به خاطر اینکه مقدار نمودار بالای محور x ها است.

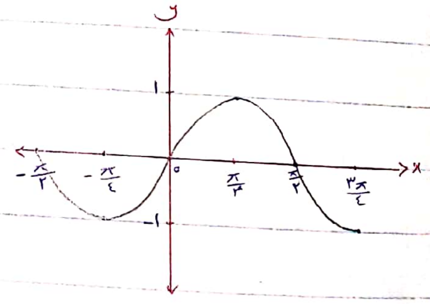
همانطور که در شکل می‌بینید، => $T_{\text{اصلی}} = \pi$

بررسی گزینه ۴ : روش ۱ : رسمش میکنیم



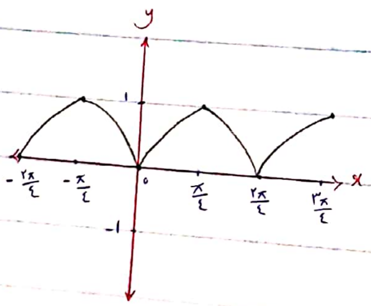
$y = \sin x$

انقباض افقی
=>
با ضریب ۲



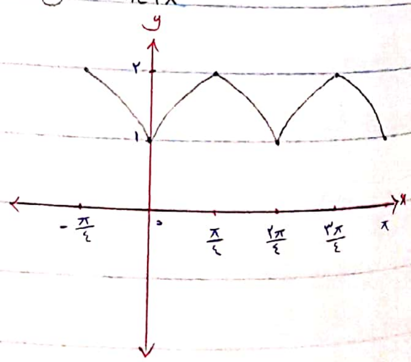
$y = \sin 2x$

اعمال اثر
=>
قدرمطلق



$y = |\sin 2x|$

انتقال ۱ واحد
=>
رو به بالا



$y = 1 + |\sin 2x|$

$T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{2}$

روش ۲ : $T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

تست: دورهٔ تناوب $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x}$ کدام است؟

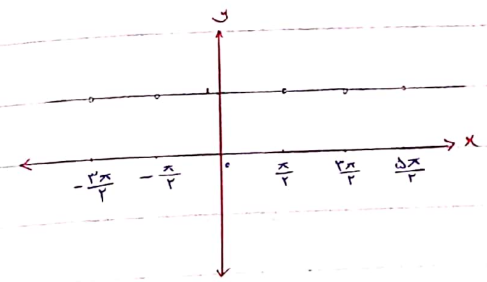
1) 2π 2) π ✓ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) متناوب نیست.

روش غلط: تابع ثابته پس متناوب هست ولی دورهٔ تناوب اصلی ندارد. $f(x)=1$

روش درست:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\cos x}=1 \quad (\text{if} \quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$$

ریشه مخرج میباشند.



$T_{\text{اصلی}}=\pi$ ج

تست: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ ✓ 4) $\frac{\pi}{4}$

حل:

$f(x)=\cos 4x$

$a=4 \Rightarrow T_{\text{اصلی}}=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ج

تست: توابع $f(x)=\cos^4 ax$ و $g(x)=\sin^4 ax$ معروفند. اگر دورهٔ تناوب تابع $y=|(f-g)(x)|$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، a کدام است؟

1) ±2 ✓ 2) ±1 3) فقط 1 4) فقط 2

حل:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow \cos^4 ax-\sin^4 ax=\cos 2ax$

$y=|\cos 2ax| \Rightarrow T_{\text{اصلی}}=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow 4\cancel{\pi}=\cancel{\pi}|2a| \Rightarrow 2a=\pm4 \Rightarrow$

هر دو مورد قابل قبول هستند. $\Rightarrow a=\pm2$ ج

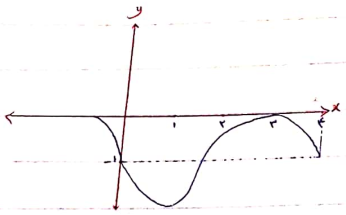
سوال ترکیبی از بحث تابع و مثلثات بود!

تست: اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(1 + bx)\pi$ بصورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:



ابتدا تابع را در صورت امکان ساده میکنیم.

$$f(x) = a + \sin\underbrace{(\pi + b\pi x)}_{\text{ناحیه ۳}} = a - \sin b\pi x$$

$$(0, -1) \Rightarrow -1 = a - \sin 0 \Rightarrow \underline{a = -1}$$

$$T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{2}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$$

$$\underbrace{b = +\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = -1 - \sin\frac{\pi x}{2} \rightarrow \text{قابل قبول ✓}$$

چونکه نمودار نسبت به محور x قرینه شده است. $\Leftarrow$

$$b = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -1 + \sin\frac{\pi x}{2} \rightarrow \text{غیر قابل قبول ✗}$$

$$a + b = -1 + \frac{1}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{ج}}$$

تست: نمودار تابع به معادله $y = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{2} - 4\pi x)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه کمترین مقدار را دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ✓ ۴) ۵ ۱۱

حل:

$$T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|-4\pi|} = \frac{2\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} = \frac{1}{2} \rightarrow$$ پس در بازه مذکور ۴ بار تکرار میشود.

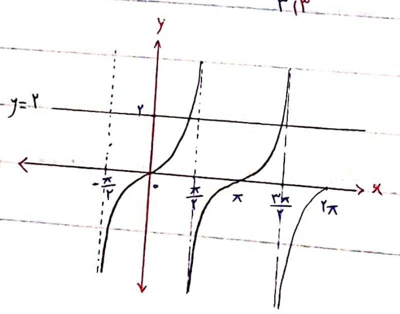
پس تابع مذکور در ۴ نقطه کمترین مقدار را دارد.

تست: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ در چند نقطه خط $y = 2$ را قطع میکند؟

۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴ ۱۱

حل:

نمودارش را رسم میکنیم!



۲ بار قطع میکند!
ج

تست: دامنه تابع $f(x)=1+\cot(\frac{\pi}{3}-x)$ کدام است؟ ($k\in Z$)

1) $\mathbb{R}-\{k\pi\}$
2) $\mathbb{R}-\{k\pi-\frac{\pi}{3}\}$
3) $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{3}\}$ ✓
4) $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{2\pi}{3}\}$

حل:

یادآوری: $y=\cot(f(x)) \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{f(x)=k\pi\}$

$\frac{\pi}{3}-x=k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}-k\pi$

از آنجا که $k\in Z$ ، $-k=k \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

$D_f=\underbrace{\mathbb{R}-\{x=\frac{\pi}{3}+k\pi\}}_{\text{جواب}}$

تست: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=\cot\frac{x}{a}-\tan\frac{x}{a}$ برابر 4π باشد، a کدام است؟

1) $\pm\frac{1}{8}$
2) $\pm\frac{1}{4}$
3) ± 4
4) ± 8 ✓

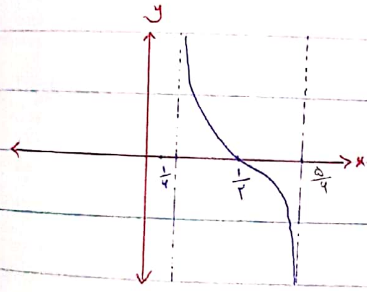
حل:

$f(x)=\cot\frac{x}{a}-\tan\frac{x}{a}=+2\cot\frac{2x}{a}$ $\qquad T_{\text{اصلی}}=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{|\frac{2}{a}|}=4\pi$

$\Rightarrow |\frac{2}{a}|\,4\cancel{\pi}=1\cancel{\pi} \Rightarrow |\frac{2}{a}|=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{a}=\pm\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{2}=\pm 4 \Rightarrow \underbrace{a=\pm 8}_{\text{ج}}$

تست: نمودار تابع $f(x)=\tan(a+bx)$ بصورت مقابل است. b کدام است؟

1) $-\frac{3\pi}{2}$ ✓
2) $\frac{3\pi}{2}$
3) $-\frac{\pi}{2}$
4) $\frac{\pi}{2}$



حل:

$T_{\text{اصلی}}=\frac{2}{3}$ $\qquad T_{\text{اصلی}}=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{|b|}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3\pi=2|b| \Rightarrow b=\pm\frac{3\pi}{2}$

چون نمودار نسبت به محورها نزولی شده است پس $\underbrace{b=-\frac{3\pi}{2}}_{\text{ج}}$

نکات تکمیلی دوره تناوب (Periodick)

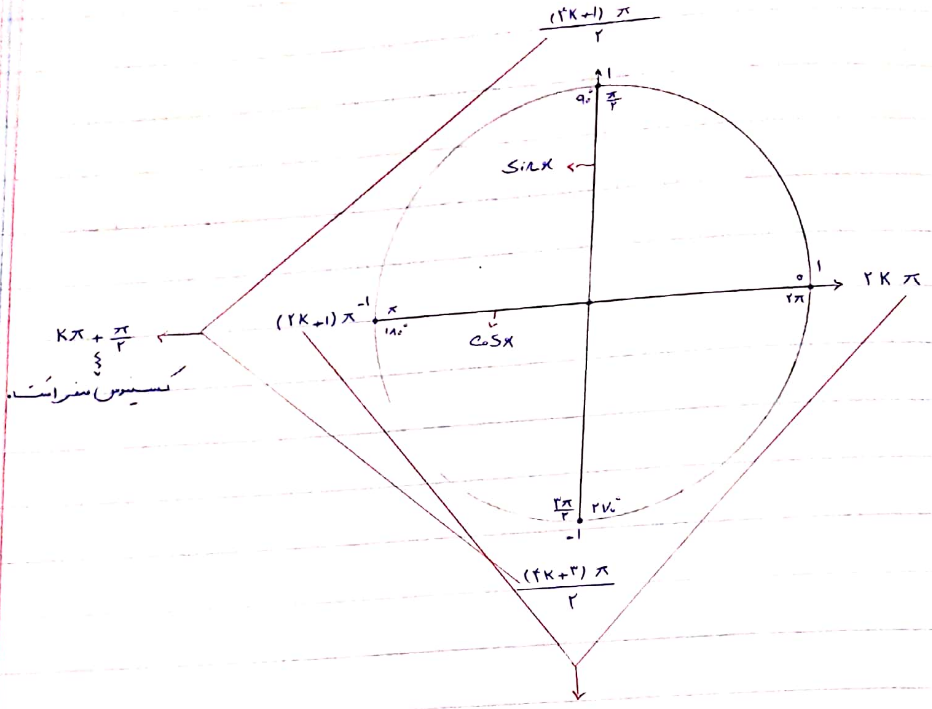
1- اگر توان x داخل کمان نسبت مثلثاتی، عددی غیر از یک باشد، تابع تناوب نیست.

مثال: $\cos x^2$ ← متناوب نیست. $\qquad \sin\sqrt{x}$ ← متناوب نیست.

2- ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=a+b\sin cx$ و $f(x)=a+b\cos cx$ به ترتیب $a+|b|$ و $a-|b|$ است.

معادلات مثلثاتی (یک سوال ، ۱۰۰٪)

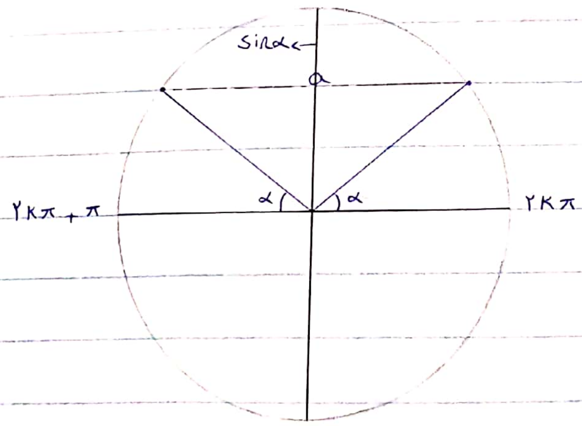
ابتدا دایره مثلثاتی را یادآوری کنم تا راه برایتان هموار شود.



$k\pi$ و سینوس صفر است.

حالا برویم سراغ درس اصلیمون :

1. $\sin x = a = \sin \alpha$



1. $x = 2k\pi + \alpha$

فقط به شکل توجه کنید!

2. $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

Scanned with CamScanner

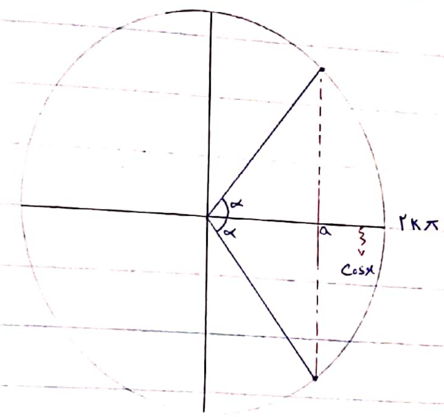
حالت های خاص:

$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ یا $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ فرقی ندارد!

$\cos x = a = \cos\alpha$



1- $x = 2k\pi + \alpha$

2- $x = 2k\pi - \alpha$

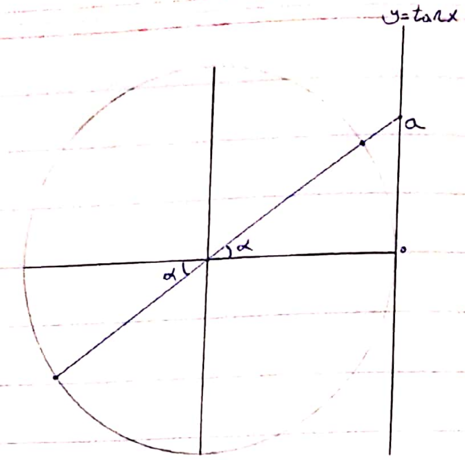
حالت های خاص:

1- $\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

2- $\cos x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi$

3- $\cos x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \pi$

3- $\tan x = a = \tan\alpha$

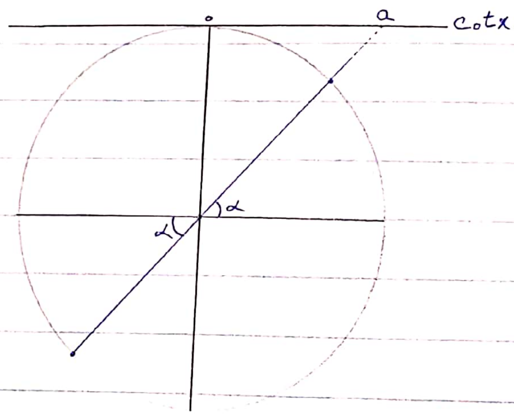


1- $x = k\pi + \alpha$

حالت خاص:

1- $\tan x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

۴- $\cot x = a = \cot\alpha$



1- $x = k\pi + \alpha$

حالت خاص:

1- $\cot x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

نکات تکمیلی معادله مثلثاتی:

۱- اگر علامت منفی پشت یکی از نسبت ها باشد، میتوانیم با استفاده از روش های زیر، منفی را حذف کنیم.

1- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

۲- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

۳- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۴- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۲- طرفین تساوی باید هم جنس و مثبت باشند.

۳- اگر طرفین تساوی یکسان شده ولی پتانسیل یکسان شدن را داشت، از تساوی های زیر استفاده میکنیم:

1. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ 2. $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ 3. $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$

۴- باید حواسمان به ریشه مخرج باشد و بعد از یافتن جواب معادله، ریشه های مخرج را از بین جواب ها حذف کنیم.

۵- به نکات زیر توجه کنید:

1. $-1\leq\sin(ax+b)\leq1$ 2. $-1\leq\cos(ax+b)\leq1$ 3. $-\sqrt{2}\leq\sin ax\pm\cos ax\leq\sqrt{2}$

۶- درصورتی که معادله مثلثاتی شما بصورت کسری باشد، حتماً پس از ساده سازی، اقدام به حل معادله کنید.

۷- در مبحث معادلات مثلثاتی ساده سازی ممنوع است.

تمرین: جواب معادله $\sin 3x=\sin x$ را بدست آورید؟

حل:

$3x=2k\pi+x \Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi$

$3x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow 4x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

تمرین: جواب های معادله $\sin 4x=\cos 2x$ را بدست بیاورید؟

حل:

$\sin 4x=\sin\underbrace{(\frac{\pi}{2}-2x)}_{\alpha}$

$4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow 6x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$

$4x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+2x \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

تمرین: معادله مثلثاتی $\sin x=-\frac{1}{2}$ را حل کنید؟

حل:

$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\alpha}$

$x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$

$x=2k\pi+\pi-\frac{7\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$

تمرین: معادله $2\cos 2x \cos x = 2\cos 2x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

حل: $2\cos 2x \cos x - 2\cos 2x = 0 \xRightarrow{\text{فاکتور}} 2\cos 2x(\cos x - 1) = 0$

$2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$ ٤ جواب

$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \Rightarrow$ ٢جواب

در مجموع ٦ جواب دارد.

تمرین: جواب معادله $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ را بدست آورید؟

حل: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\alpha}$

$3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$

تمرین: مجموع جواب معادله $\tan 4x \tan 3x = 1$ را بدست آورید؟

حل: $\tan 4x = \frac{1}{\tan 3x} \Rightarrow \tan 4x = \cot 3x \Rightarrow \tan 4x = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{2} - 3x}_{\alpha})$

$4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 7x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$

تمرین: جواب معادله $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ را بدست آورید؟

حل:

$\frac{(\cos x + \sin x)\cancel{(\cos x - \sin x)}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{(\cos x - \sin x)}} = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \xRightarrow{\div \cos x} 1 + \tan x = 0 \Rightarrow$

$\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan(\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\alpha})$

$x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

یا $\tan x = \tan(\underbrace{-\frac{\pi}{4}}_{\alpha}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

تمرین: جواب کلی معادله $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

حل:

$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos(\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\alpha}) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تمرین: جواب کلی معادله $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ را بدست آورید؟

حل:

$(\cos x + 1)(2\cos - 3) = 0$

$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \pi$

$2\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ x غیر قابل قبول $\xRightarrow{\text{چرا؟}}$ $-1 \le \cos x \le 1$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ را بدست آورید؟

حل:

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$

$-2\sin(\pi - x) = -2\sin x$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ را بدست آورید؟

حل:

$\tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\alpha})$

$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cot x + \tan x = 2$ را بدست آورید؟

حل:

$\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\times 2} \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 4x \sin x + \cos 4x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ به کدام صورت است؟

حل:

$\cos(3x) = \cos \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\alpha}$

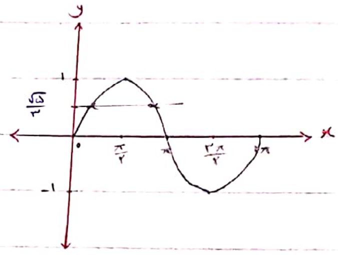
Scanned with CamScanner

$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$

تمرین: معادلهٔ مثلثاتی $(3\sin x - \sqrt{5})(2\cos x - \sqrt{7}) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

حل:

$3\sin x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow 3\sin x = \sqrt{5} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$



$2\cos x - \sqrt{7} = 0 \Rightarrow 2\cos x = \sqrt{7} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$ غیرقابل تبدل α

پس معادله کلاً ۲ جواب دارد.

تمرین: معادلهٔ $\tan 5x \tan 2x = 1$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

حل:

$\tan 5x = \cot 2x \Rightarrow \tan 5x = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{2} - 2x}_{\alpha})$

$5x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 7x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$

$x = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}, \frac{11\pi}{14}, \frac{13\pi}{14} \Rightarrow$ معادله ۶ جواب دارد!

$\frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$

تن $= \frac{1}{0} = \frac{1}{\tan\pi} = \frac{1}{\tan 2x}$

تست: جواب کلی معادلهٔ $\cos 4x = \cos \underbrace{2x}_{\alpha}$ کدام است؟

۱) $2k\pi$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $k\pi$ ۴) $\frac{k\pi}{3}$ ✓

حل:

$4x = 2k\pi \pm 2x$

$\Rightarrow 4x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$\Rightarrow 4x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

جواب کلی $\frac{k\pi}{3}$، جواب های کلی $k\pi$ را نیز تولید میکند، پس جواب کلی $x = \frac{k\pi}{3}$ است.

تست: مجموعه جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 2x + \sin x}{\sin x} = 1$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۲)

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۳) ✓ $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

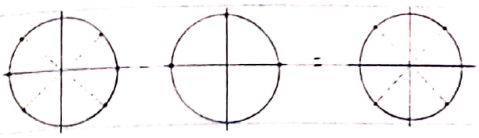
حل:

$\sin 2x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

اشتباهی مرسوم که بیشتر شاگردها انجام می‌دهند! ما هنوز مخرج را بررسی نکرده‌ایم!

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

$\frac{k\pi}{3} - k\pi = ?$



$\frac{k\pi}{3} - k\pi = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تست: معادلهٔ $\sin^3 x + \sin x = 2$ چند جواب متمایز در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارد؟

۱) صفر ۲) ✓ ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

روش ۱: حل

$t = \sin x \Rightarrow t^3 + t - 2 = 0 \Rightarrow$ جمع ضرایب صفر است، پس یکی از ریشه‌هایمان یک است.

پس عبارت $t^3 + t - 2 = 0$ را بر $(t-1)$ تقسیم می‌کنیم.

$t^3 + t - 2$	$t - 1$
$-t^3 + t^2$	$t^2 + t + 2$
$t^2 + t - 2$	
$-t^2 + t$	
$2t - 2$	
$-2t + 2$	
$0 \quad 0$	

پس $\Rightarrow t^3 + t - 2 = (t^2 + t + 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 1$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ پس ریشه ندارد.

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$

که معادلهٔ مذکور فقط یک جواب دارد!

روش ۲: دو طرف معادله زمانی باهم برابر هستند که $\sin x = 1$ باشد.

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

پس معادله فقط یک جواب دارد! حل

هر دو روش زیبا هستند. ولی روش ۱ مورد پسند امتحان‌های نهایی می‌باشد و روش ۲ مورد پسند کنکور!

خوشحالی‌ها! آره

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+5=0$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi+\frac{5\pi}{4}$ ۴) $2k\pi-\frac{3\pi}{4}$ ✓

حل:

$$(\sin x+\cos x)^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=1+\sin 2x$$

$$3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1+4=0 \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2+3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+4=0$$

$$t=\sin x+\cos x \Rightarrow t^2+3\sqrt{2}t+4=0 \Rightarrow a=1 \quad b=+3\sqrt{2} \quad c=4$$

$$\Delta=b^2-4ac=18-16=2=\Delta$$

$$t=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)=-\sqrt{2} \quad (1)$$

$$t=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)=-2\sqrt{2} \quad (2)$$

(1) $\sin x+\cos x=-\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

(2) $\sin x+\cos x=-2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-2\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-2$

که x غیرقابل قبول => چرا؟ زیرا $\underbrace{-1\le\sin\alpha\le 1}$

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x+\cot x=\frac{2}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

حل:

یادآوری: $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$

$$\frac{\cancel{2}}{\sin 2x}=\frac{\cancel{2}}{\cos 2x} \Rightarrow \sin 2x=\cos 2x \Rightarrow \sin 2x=\sin(\underbrace{\frac{\pi}{2}-2x}_{\alpha})$$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$