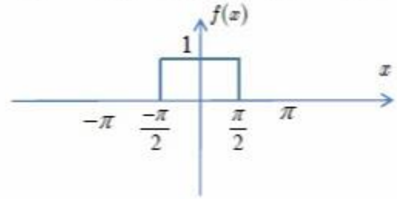
مثال: ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ را با دوره تناوب 2π محاسبه کنید



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2\pi}\left[x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{(-n\pi)}{2}\right)$$

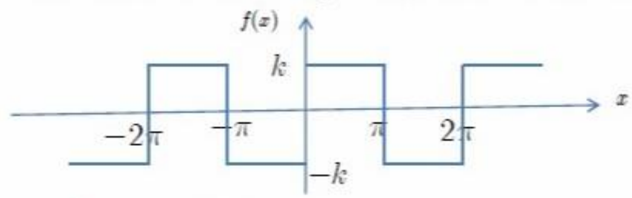
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \;\Rightarrow a_n = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{n\pi}\left[\cos nx\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{(-n\pi)}{2}\right)$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \Rightarrow b_n = \frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

مثال: ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ را با دوره تناوب 2π محاسبه کنید

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi \langle x \langle 0 \\ k & 0 \langle x \langle \pi \end{cases}$$



$$f(-x) = \begin{cases} -k & -\pi \langle -x \langle 0 \\ k & 0 \langle -x \langle \pi \end{cases} \;\Rightarrow\; f(-x) = \begin{cases} k & -\pi \langle x \langle 0 \\ -k & 0 \langle x \langle \pi \end{cases} \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$$

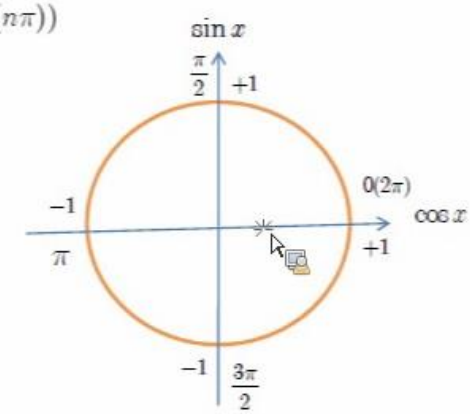
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(\left[-k\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[k\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-k\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[k\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{k}{n\pi}\left(-\sin 0 + \sin(-n\pi) + \sin(n\pi) - \sin 0\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(\left[k\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-k\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\left[\cos(0) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos 0\right] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$



$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{فرد} \\ 1 & \text{زوج} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4k}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4k}{5\pi}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4k}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots)$$

در صورتی که تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ باشد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

تمرین: در صورتیکه $f(x) = x$ و $-1 \le x \le 1$ با دوره تناوب $2L = 2$ باشد، سری فوریه متناظر با $f(x)$ را محاسبه کنید.

سری فوریه توابع زوج و فرد (بسطهای نیمدامنه ای)

اگر $f(x)$ تابعی زوج با دوره تناوب $2L$ باشد، در محاسبه سری فوریه $b_n = 0$ بوده و فرم سری فوریه آن بصورت زیر میباشد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx \qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

دراین صورت سری فوریه تابع زوج را سری کسینوسی فوریه مینامند.

اگر $f(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $2L$ در محاسبه سری فوریه $a_n=0$ بوده و فرم سری فوریه آن بصورت زیر میباشد:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

دراین صورت سری فوریه تابع فرد را سری سینوسی فوریه مینامند.

ب) بسط نیم دامنه ای فرد:

$$formula: b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n=\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{-2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=\frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi-1) \quad \cos n\pi=\begin{cases}-1 & \text{فرد } n\\ 1 & \text{زوج } n\end{cases}$$

$$n=1\Rightarrow b_1=\frac{4}{\pi} \qquad n=3\Rightarrow b_3=\frac{4}{3\pi} \qquad n=5\Rightarrow b_5=\frac{4}{5\pi}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{2}x=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right) \qquad (*)$$

مطلوب است محاسبه سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

$$(*): x=1\Rightarrow 1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right)\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

دراین صورت سری فوریه تابع زوج را سری کسینوسی فوریه مینامند.

اگر $f(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $2L$ در محاسبه سری فوریه $a_n = 0$ بوده و فرم سری فوریه آن بصورت زیر میباشد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

دراین صورت سری فوریه تابع فرد را سری سینوسی فوریه مینامند.

ب) بسط نیم دامنه ای فرد:

$$formula : b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \qquad \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$n = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{\pi} \qquad n = 3 \Rightarrow b_3 = \frac{4}{3\pi} \qquad n = 5 \Rightarrow b_5 = \frac{4}{5\pi}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{2}x = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{2} + \dots$$

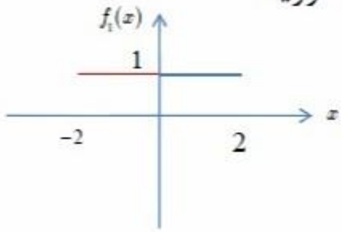
$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \dots) \qquad (*)$$

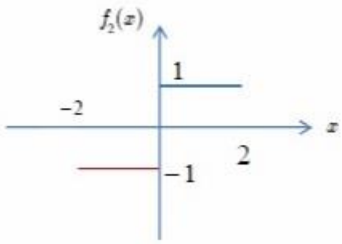
مطلوب است محاسبه سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

$$(*) : x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots) \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ در نیمی از دوره تناوب (دامنه) مشخص شده است بسط سری فوریه آن را در هر یک از دو حالت زوج یا فرد بودن، **بسط نیم دامنه ای** مینامند.

مثال: بسط نیم دامنه ای تابع $f(x)=1$ را برای $0 \le x \le 2$ بدست آورید؟





الف) بسط نیم دامنه ای زوج:

$$formula : a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_0^2 = 1$$

$$formula : a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$a_n = \int_{0}^{2} \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left[2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = 2(\sin n\pi - \sin 0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1$$

انتگرال فوریه

اگر تابع $f(x)$ در هر بازه خاصی مشتق پذیر و پیوسته باشد میتوان آن را بصورت انتگرال توابع مثلثاتی تعریف کرد. این نمایش تابع $f(x)$ بصورت زیر را انتگرال فوریه تابع $f(x)$ مینامند.

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\left[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right]dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos wv dv \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin wv dv$$

مثال: انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \cos wv dv = \frac{1}{\pi w}\left[\sin wv\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin wv dv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sin wv dv=0$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right]dw \Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$$

انتگرالهای کسینوسی و سینوسی فوریه

مشابه سری فوریه، اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، در رابطه مربوط به انتگرال فوریه $B(w)=0$ و فرم انتگرال فوریه بصورت زیر میباشد:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(w)\cos wx dw \qquad A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos wv dv$$

در اینصورت مشابه سری فوری انتگرال فوریه تابع زوج را انتگرال کسینوسی فوریه مینامند.

تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ ، این تابع را به تابع $F_c(w)$ تبدیل میکند:

$$F_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos wx dx \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(w)\cos wx dw$$

عکس تبدیل کسینوسی فوریه که در آن با استفاده از $F_c(w)$ مجددا $f(x)$ محاسبه میشود را تبدیل کسینوسی فوریه وارون (معکوس) مینامند.

تبدیل سینوسی فوریه تابع $f(x)$، این تابع را به تابع $F_s(w)$ تبدیل میکند:

$$F_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin wx dx \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_s(w)\sin wx dw$$

عکس تبدیل کسینوسی فوریه که در آن با استفاده از $F_s(w)$ مجددا $f(x)$ محاسبه میشود را تبدیل سینوسی فوریه وارون (معکوس) مینامند.

مثال: تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \langle x \langle a \\ 0 & x \rangle a \end{cases}$$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^{a} \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k (\frac{\sin aw}{w})$$

$$F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^{a} \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k (\frac{1-\cos aw}{w})$$

تبدیل فوریه

اگر $f(x)$در هر بازه متناهی پیوسته و انتگرال پذیر باشد، تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(w)$ مینامیم و بصورت زیر تعریف میشود: (در برخی منابع $1/\sqrt{2\pi}$ در نظر گرفته نمیشود)

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

مثال: تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \langle x \langle a \\ 0 & x \rangle a \end{cases}$$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^{a} \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k (\frac{\sin aw}{w})$$

$$F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^{a} \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k (\frac{1-\cos aw}{w})$$

تبدیل فوریه

اگر $f(x)$در هر بازه متناهی پیوسته و انتگرال پذیر باشد، تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(w)$ مینامیم و بصورت زیر تعریف میشود: (در برخی منابع $1/\sqrt{2\pi}$ در نظر گرفته نمیشود)

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

26

اعداد مختلط:

$$a) x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$b) x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = ?$$

با فرض جواب داشتن معادله دوم :

$$x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3 \times \sqrt{-1} = 3i$$

در رابطه فوق $\sqrt{-1}$ را با i نمایش میدهیم. $i = \sqrt{-1}$

با در نظر گرفتن هر دو عدد حقیقی x و y عبارت $z = x + iy$ را یک عدد مختلط مینامیم. $2 - 5i, 3 + \sqrt{6}i, \sqrt{7} - \sqrt{2}i$

در عدد مختلط $z = x + iy$ ، x را بخش حقیقی و y را بخش موهومی (انگاری) مینامند. به عنوان مثال در $2 - 5i$ بخش حقیقی 2 و بخش موهومی 5 میباشد.

مثال: با در نظر گرفتن تعریف i مطلوب است محاسبه i^4 و i^5 ؟

$$i^4 = (i^2)^2 = (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = (i^2)^2 \times i = (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})^2 \times i = (-1)^2 \times i = 1 \times i = i$$

مثال: در صورتیکه $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 3 - i$ مطلوب است محاسبه $z_2 - 2z_1$ ، $z_1 z_2$ و z_1 / z_2

$$z_2 - 2z_1 = (3 - i) - 2(1 + 2i) = 3 - i - 2 - 4i = 1 - 5i$$

$$z_1 z_2 = (1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i - 2ii = 5 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + 7i - 2}{9 + 3i - 3i + 1} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} i$$

مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را با $\bar{z} = x - iy$ نمایش میدهند. در مثال قبل:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow z_1\bar{z}_1 = (1+2i)(1-2i) = 1 - 2i + 2i - 4ii = 1 + 4 = 5$$

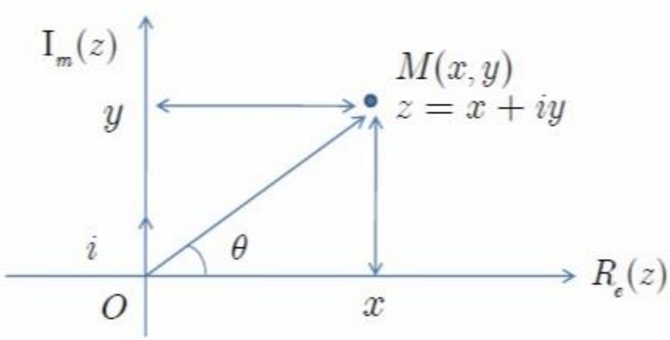
$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

مثال: عبارت $z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ را بصورت یک عدد مختلط بیان کنید؟

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i-2ii} = \frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{8+6i}{10} = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

صفحه مختلط:



در صفحه مختلط، عدد مختلط $z = x + iy$ را با بردار $\overrightarrow{OM}$ نمایش میدهند که x را بخش حقیقی $R_e(z)$ عدد مختلط z و y را بخش انگاری $I_m(z)$ عدد مختلط z مینامند. طول بردار $\overrightarrow{OM}$ را بصورت $|z|$ و زاویه θ را آرگومان عدد مختلط z مینامند.

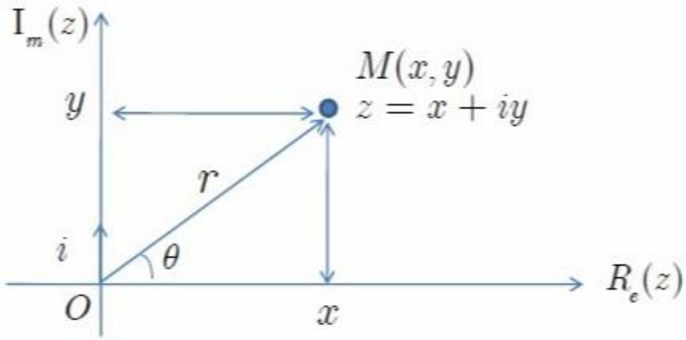
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = Arc\tan\frac{y}{x}$$

به عنوان مثال هر گاه $z = 1 + i$ داریم:

$$\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = Arc\tan\frac{y}{x} = Arc\tan 1 = \frac{\pi}{4}$$

اعداد مختلط در مختصات قطبی



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + r\sin\theta \quad \Rightarrow z = re^{i\theta}$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - r\sin\theta$$

به عنوان مثال نمایش قطبی عدد مختلط $z = 1 + \sqrt{3}i$ بصورت زیر است:

$$z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \Rightarrow 1 = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \\ y &= r\sin\theta \Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال: عدد مختلط $(1-i)^8$ را بصورت یک عدد مختلط بنویسید؟

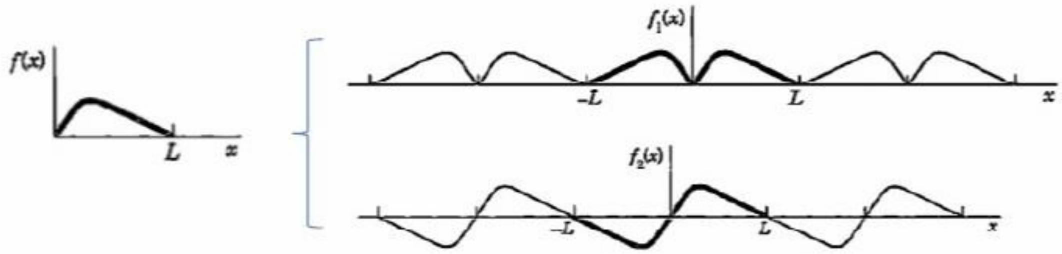
$$1 - i:\ \ r = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}, tg\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{8\pi}{4}} = 16e^{i2\pi}$$

$$16e^{2\pi i} = 16(\cos 2\pi + i\underbrace{\cancel{\sin 2\pi}}_{0}) = 16$$

بسط نیم دامنه ای

گاهی تابع f فقط در بازه $0 \le x \le L$ داده شده است برای محاسبه سری فوریه این گونه توابع میتوان مطابق شکل زیر آن را بصورت بخشی از یک تابع زوج $f_1(x)$ یا بخشی از یک تابع فرد $f_2(x)$ در نظر گرفت (دوره تناوب در هر دو تابع $2L$ میباشد):



با توجه به اینکه $f_1(x)$ زوج و $f_2(x)$ فرد است برای نمایش $f_1(x)$ از سری فوریه کسینوسی و برای نمایش $f_2(x)$ از سری فوریه سینوسی استفاده میشود.

تبدیل فوریه وارون تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف میشود:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dx$$

اگر تبدیل فوریه تابع $g(x)$، $G(w)$ باشد این تعاریف را بصورت زیر میتوان نشان کرد:

$$F(g(x)) = G(w) \qquad F^{-1}(G(w)) = G(x)$$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \langle x \langle a \\ 0 & x \rangle a \end{cases}$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-iwx} dx = \frac{-k}{iw\sqrt{2\pi}} \left[e^{-iw} \right]_0^a = \frac{k(1-e^{-iaw})}{iw\sqrt{2\pi}}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $f(t)=\exp(-k|t|), k\rangle 0$ را بدست آورید:

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{0} e^{kt}e^{-iwt}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-kt}e^{-iwt}dt)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{0} e^{(k-iw)t}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-(k+iw)t}dt)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\left[\frac{e^{(k-iw)t}}{k-iw}\right]_{-\infty}^{0}-\left[\frac{e^{-(k+iw)t}}{k+iw}\right]_{0}^{+\infty})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{k-iw}+\frac{1}{k+iw})=\frac{2k}{\sqrt{2\pi}(k^2+w^2)}$$
$$(k-iw)(k+iw)=k^2+ikw-ikw-iiw^2=k^2+w^2$$

تابع ضربه و پله :

تابع ضربه واحد $f(t)=\delta(t)$ و پله واحد $f(t)=u(t)$ بصورت زیر تعریف میشوند:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t\langle 0\end{cases}$$

28

تابع $f(t)=\delta(t)$ را میتوان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)f(t)dt=f(a)\end{cases}$$

به عبارتی میتوان گفت تابع $\delta(t)$ یک تابع مستطیل شکل است با مساحت واحد که با کاهش طول عرض آن افزایش میابد.

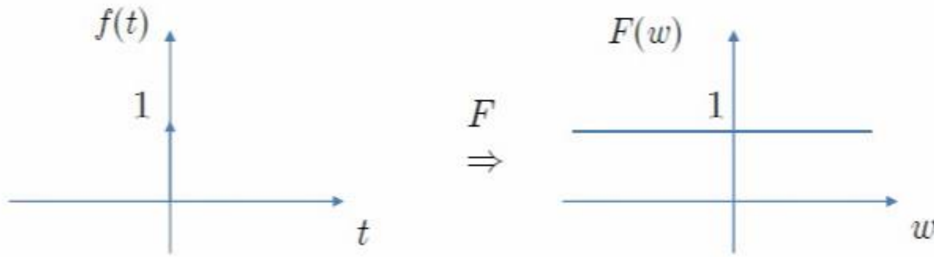
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}\qquad\qquad \delta(t-a)=\begin{cases}0 & t\neq a\\ 1 & t=a\end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\delta(t)$ و $\delta(t-t_0)$ را محاسبه کنید؟

$$f(t) = \delta(t) \Rightarrow F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$f(t) = e^{-iwt} \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt = f(0) = 1$$



$$f(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-iwt} dt = e^{-iwt_0}$$

تبدیل فوریه توابع مثلثاتی:

به منظور محاسبه تبدیل فوریه توابع $f(t) = \sin at$ و $f(t) = \cos at$ فرم مختلط اعداد نمایی در مختصات قطبی را در نظر میگیریم:

$$\begin{aligned} e^{iat} &= \cos at + i \sin at \\ e^{-iat} &= \cos at - i \sin at \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} ; \sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$f(t) = \cos w_0 t \Rightarrow F(w) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}) e^{-iwt} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i(w-w_0)t} + e^{-i(w+w_0)t}) dt \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(w-w_0)t} dt = 2\pi \delta(w - w_0) \Rightarrow F(w) = \pi \delta(w - w_0) + \pi \delta(w + w_0)$$

تمرین: بصورت مشابه تبدیل فوریه $f(t) = \sin w_0 t$ را بدست آورید؟

خواص تبدیل فوریه:

در صورتیکه تبدیل فوریه توابع $f(x)$ و $g(x)$ بترتیب $F(w)$ و $G(w)$ باشد:

$$a)F(af(t)+bg(t))=aF(w)+bG(w)$$
$$b)F(f(t-t_0))=e^{-iwt_0}F(w)$$
$$c)F(f(t)e^{iw_0t})=F(w-w_0)$$
$$d)F(f(at))=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$$
$$e)F(F(x))=2\pi f(-w)$$
$$f)F(\frac{d}{dt}f(t))=iwF(w)\Rightarrow F(\frac{d^n}{dt^n}f(t))=(iw)^nF(w)$$

مثال: با در نظر گرفتن خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه عبارتهای یر را بدست آورید؟

مثال: با در نظر گرفتن خواص تبدیل فوریه، و تبدیل فوریه داده شده، تبدیل فوریه عبارتهای عبارتهای خواسته شده را بدیت آورید؟

$$F(e^{-k|x|})=\frac{2k}{k^2+w^2}$$

$$a)f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$$

$$F(e^{-a|x|})=\frac{2a}{a^2+w^2}$$
$$F(F(x))=2\pi f(-w) \qquad \Rightarrow F(\frac{2a}{a^2+x^2})=2\pi e^{-a|w|}$$
$$F(f(ax))=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$$

$$\Rightarrow F(\frac{1}{a^2+x^2})=\frac{1}{2a}(2\pi e^{-a|w|})=\frac{\pi}{a}e^{-a|w|}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{x^2+4} \Rightarrow F(\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}) = \frac{1}{3}F(\frac{1}{x^2+1}) - \frac{1}{3}F(\frac{1}{x^2+4})$$

$$F(\frac{1}{a^2+x^2}) = \frac{\pi}{a}e^{-a|w|} \quad \Rightarrow F(f(x)) = \frac{1}{3}\pi e^{-|w|} - \frac{1}{6}\pi e^{-2|w|}$$

مثال: اگر، $F(f(x)) = F(w)$ باشد، $F(f(x)\cos ax)$ را بدست آورید؟

$$F(f(x)\cos ax) = F\left[\frac{1}{2}f(x)e^{iax} + \frac{1}{2}f(x)e^{-iax}\right] = \frac{1}{2}F\left[f(x)e^{iax}\right] + \frac{1}{2}F\left[f(x)e^{-iax}\right]$$

$$F(f(t)e^{iw_0t}) = F(w-w_0) \Rightarrow F(f(t)\cos ax) = \frac{1}{2}F(w-a) + \frac{1}{2}F(w+a)$$

تمرین: اگر $F(f(x)) = F(w)$ باشد، $F(f(x)\sin ax)$ را بدست آورید؟

معادلات با مشتقات جزیی:

- بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادلات را مرتبه معادله مینامند.

اگر $u = u(x,y)$ رابطه زیر شکل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه ۲میباشد.

$$f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}) = 0$$

- اگر u و مشتقات آن از درجه یک باشند، معادله خطی و در غیر اینصورت غیرخطی میباشد.

مثال: با حذف توابع f و g از $u(x,y)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بسازید؟

$$u(x,y) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$u_x = f'(x+ct) + g'(x-ct) \Rightarrow u_{xx} = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

$$u_t = cf'(x+ct) - cg'(x-ct) \Rightarrow u_{tt} = c^2f''(x+ct) + c^2g''(x-ct)$$

$$\Rightarrow u_{tt} = c^2u_{xx}$$

حل معادلات دیفرانسیل خطی:

$$L(y) = A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0$$

$$L(y) = 0, L = A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_n, \qquad A_i = cte$$

$$\Rightarrow (D - a_1)(D - a_2)(D - a_3)\dots(D - a_n)y = 0 \Rightarrow (D - a_i)y = 0, i = 1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow (D - a_i)y = 0 \Rightarrow y' - a_i y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a_i y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a_i dx \Rightarrow \ln y = a_i x + b_i$$

$$y = c_i e^{a_i x}, e^{a_i x} \qquad linear - independent \Rightarrow ans : y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{a_i x}$$

اگر $y = ce^x$ جواب $A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0$ باشد $A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \dots + A_n = 0$ معادله مشخصه معادله اصلی میباشد.

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

$a) y'' + y' - 6y = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3, 2 \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

$b) y'' + 2y' + 5y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$$

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b) \Rightarrow y = c_1 e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x) + c_2 e^{-x}(\cos 2x - i \sin 2x)$$

$$\Rightarrow y = e^{-x}((c_1 + c_2)\cos 2x + (c_1 - c_2) i \sin 2x) \Rightarrow y = e^{-x}(A \cos 2x + Bi \sin 2x)$$

اگرفاکتور $D - a$ ، p دفعه تکرار شود:

$$(D - a)^p y = 0 \Rightarrow ans : y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_p x^{p-1}) e^{ax}$$

$c)y''' - 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1(multiple - 2)$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x}$$

$d)y^{(7)} + 8y^{(6)} + 26y^{(5)} - 40y^{(4)} + 25y^{(3)} = 0$

$$\lambda^7 + 8\lambda^6 + 26\lambda^5 - 40\lambda^4 + 25\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0(multiple - 3) \quad \lambda = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{0x} + e^{2x}((c_4 + c_5 x)\cos x) + (c_6 + c_7 x)\sin x)$$

معادلات با مشتقات جزیی:

- بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادلات را مرتبه معادله مینامند.

اگر $u = u(x,y)$ رابطه زیر شکل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه ۲میباشد.

$$f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

- اگر u و مشتقات آن از درجه یک باشند، معادله خطی و در غیر اینصورت غیرخطی میباشد.

- بیان اکثر پدیده های فیزیکی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 1D - wave - equation$$
$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad 1D - heat - equation$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad laplace - equation$$

مثال: با حذف توابع f و g از $u(x,y)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بسازید؟

$$u(x,y) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$u_x = f'(x+ct) + g'(x-ct) \Rightarrow u_{xx} = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

$$u_t = cf'(x+ct) - cg'(x-ct) \Rightarrow u_{tt} = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)$$

$$\Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید؟

$a) u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$

$assume \quad u = e^{mx+ny} \Rightarrow u_{xy} = mne^{mx+ny}, u_{yy} = n^2 e^{mx+ny}, u_{xx} = m^2 e^{mx+ny}$

$\Rightarrow (m^2 - 6mn + 5n^2)e^{mx+ny} = 0 \Rightarrow m^2 - 6mn + 5n^2 \Rightarrow m = n, m = 5n$

$\Rightarrow u_1 = e^{n(x+y)}, u_2 = e^{n(5x+y)} \Rightarrow ans : u = F(x+y) + G(5x+y)$

مروری بر معادلات دیفرانسیل:

- معادله شامل مشتقات درجه اول و بالاتر را معادله دیفرانسیل مینامند.

- مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله را مرتبه معادله مینامند.

- توان بالاترین مشتق موجود را درجه معادله مینامند.

- در معادلات دیفرانسیل xرا متغیر مستقل و y و مشتقات آن را متغیر وابسته مینامند.

- اگر معادلات بر حسب متغیر وابسته و مشتقات آن خطی باشد، معادله را خطی و در غیر اینصورت غیر خطی مینامند. فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی بصورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = g(x)$$

- در معادله فوق اگر $g(x) = 0$ ، معادله را همگن و در غیر این صورت غیر همگن مینامند.

در صورت داشتن یک معادله با مقادیر ثابت (رابطه ای بین x و y)، با حذف این مقادیر از طریق مشتقگیری معادله دیفرانسیل متناظر با معادله اولیه بدست میاید.

مثال: معادله دیفرانسیل متناظر با هر یک از روابط زیر را بدست آورید:

$a)y = A\cos(wx + B)$

$y' = -Aw\sin(wx + B), \quad y'' = -Aw^2\cos(wx + B)$

$\Rightarrow y'' = -w^2y \Rightarrow y'' + w^2y = 0$

$b)y = \dfrac{c_1}{x} + c_2$

$y' = -\dfrac{c_1}{x^2} \Rightarrow c_1 = -x^2y' \qquad y'' = \dfrac{2c_1}{x^3} \Rightarrow 2c_1 = x^3y''$

$\Rightarrow -2x^2y' = x^3y'' \Rightarrow xy'' + 2y' = 0$

مرتبه۲، درجه۳، خطی، غیر همگن $(y'')^3 + (y')^5 + 5y = x^2$

مرتبه۲، درجه۱، غیرخطی، همگن $y'' + 4yy' + 2y = 0$

مرتبه۳، درجه۱، خطی، همگن $y''' + xy'' + 2y' + xy = 0$

- تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب معادله دیفرانسیل میباشد.

- جواب عمومی معادله دیفرانسیل دارای یک یا چند ثابت دلخواه است که بازا هر مقدار در معادله صادق است.

- هرگاه تحت شرایط مرزی یا شرایط اولیه ثابتهای جواب عمومی مشخص شوند، جواب حاصل را جواب خصوصی معادله مینامند.

در صورت داشتن یک معادله با مقادیر ثابت (رابطه ای بین x و y)، با حذف این مقادیر از طریق مشتقگیری معادله دیفرانسیل متناظر با معادله اولیه بدست میاید.

مثال: معادله دیفرانسیل متناظر با هر یک از روابط زیر را بدست آورید:

$$a) y = A\cos(wx + B)$$

$$y' = -Aw\sin(wx + B), \qquad y'' = -Aw^2\cos(wx + B)$$

$$\Rightarrow y'' = -w^2 y \Rightarrow y'' + w^2 y = 0$$

$$b) y = \frac{c_1}{x} + c_2$$

$$y' = -\frac{c_1}{x^2} \Rightarrow c_1 = -x^2 y' \qquad y'' = \frac{2c_1}{x^3} \Rightarrow 2c_1 = x^3 y''$$

$$\Rightarrow -2x^2 y' = x^3 y'' \Rightarrow xy'' + 2y' = 0$$

حل معادلات دیفرانسیل با انتگرالگیری:

- معادلات بفرم $y^{(n)} = f(x)$ یا $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ با n بار انتگرالگیری حل میشوند.

$$a) y'' = x^2$$

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c_1$$

$$y' = \frac{1}{3}x^3 + c_1 \Rightarrow y = \int (\frac{1}{3}x^3 + c_1) = \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2$$

$$b) y' = e^{3x} - \sin 2x$$

$$y' = e^{3x} - \sin 2x \Rightarrow y = \int (e^{3x} - \sin 2x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

- معادلات بفرم $M(x)dx + N(y)dy = 0$ نیزبا یک بار انتگرالگیری حل میشوند.

$$a)\, xy\frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow xydy - 5dx = 0 \Rightarrow ydy - \frac{5}{x}dx = 0 \Rightarrow \int ydy - \int \frac{5}{x}dx = c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - 5\ln x = c \qquad x = 0 \qquad not - ans$$

$$b)\, y' = ye^x, y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = ye^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} - ye^x = 0 \Rightarrow \times\frac{dx}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} - e^x dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int e^x dx = c$$

$$\boxed{\ln y = a \Rightarrow e^a = y}$$

$$\Rightarrow \ln y - e^x = c, y(0) = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \ln y = e^x - 1 \qquad y = 0 \qquad not - ans$$

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت:

معادلات دیفرانسیل بشکل $ay'' + by' + cy = 0$ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت میباشد. جواب معادله دیفرانسیل بصورت $y = e^{mx}$ میباشد، لذا

الف) دو ریشه متمایز و حقیقی (m_1, m_2) $\qquad y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$

ب)ریشه مضاعف و حقیقی $(m_1 = m_2 = m)$ $\qquad y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$

ج) دو ریشه مختلط $(m_1, m_2 = a \pm bi)$ $\qquad y = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$

$$2y'' - 3y' + y = 0$$

$$2m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = c_1e^x + c_2e^{\frac{x}{2}}$$

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

$$a)y'' + y' - 6y = 0$$

$$D^2 + D - 6 = 0 \Rightarrow (D+3)(D-2) = 0 \Rightarrow D_{1,2} = -3, 2 \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

$$b)y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$D^2 + 2D + 5 = 0 \Rightarrow D_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$$

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b) \Rightarrow y = c_1 e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x) + c_2 e^{-x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$

$$\Rightarrow y = e^{-x}((c_1 + c_2)\cos 2x + (c_1 - c_2)i\sin 2x) \Rightarrow y = e^{-x}(A\cos 2x + Bi\sin 2x)$$

اگرفاکتور $D - a$ ، p دفعه تکرار شود:

$$(D-a)^p y = 0 \Rightarrow ans: y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_p x^{p-1})e^{ax}$$

حل معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_0 y = 0$$

$$\frac{d}{dx} = D, \quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \ldots \quad \frac{d^n}{dx^n} = D^n \Rightarrow (A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \ldots + A_1 D + A_0)y = 0$$

$$\Rightarrow F(D)y = 0, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n : ans \quad F(D) = 0$$

$$\Rightarrow (D-a_1)(D-a_2)(D-a_3)\ldots(D-a_n)y = 0 \Rightarrow (D-a_i)y = 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow (D-a)y = 0 \Rightarrow y' - ay = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ay \Rightarrow \frac{dy}{y} = adx \Rightarrow \ln y = ax + b$$

$$y = c_i e^{a_i x}, \quad e^{a_i x} \quad linear - independent \Rightarrow ans: y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{a_i x}$$

اگر $y = ce^x$ جواب $A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_0 y = 0$ باشد $A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \ldots + A_0 = 0$

معادله مشخصه معادله اصلی میباشد.

$$c)y''' - 3y' + 2y = 0$$

$$D^3 - 3D + 2 = 0 \Rightarrow (D-1)^2(D+2) = 0 \Rightarrow D_1 = -2, \quad D_2 = 1(multiple-2)$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x}$$

$$d)y^{(7)} + 8y^{(6)} + 26y^{(5)} - 40y^{(4)} + 25y^{(3)} = 0$$

$$D^7 + 8D^6 + 26D^5 - 40D^4 + 25D^3 = 0 \Rightarrow D^3(D^2 - 4D + 5) = 0$$

$$\Rightarrow D = 0(multiple-3) \quad D = 2 \pm i(multiple-2)$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{0x} + e^{2x}((c_4 + c_5 x)\cos x) + (c_6 + c_7 x)\sin x)$$

معادلات با مشتقات جزیی:

- بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادلات را مرتبه معادله مینامند.

اگر $u = u(x,y)$ رابطه زیر شکل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه ۲میباشد.

$$f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}) = 0$$

- اگر u و مشتقات آن از درجه یک باشند، معادله خطی و در غیر اینصورت غیرخطی میباشد.

- بیان اکثر پدیده های فیزیکی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 1D - wave - equation$$

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad 1D - heat - equation$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad laplace - equation$$