فصل اول - میدان

عمل دوتایی: فرض کنیم A مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $*: A\times A \to A$ را یک عمل دوتایی در A (یا روی A) می‌نامیم. به عبارت دیگر یک عمل دوتایی در مجموعه‌ی ناتهی A، به هر زوج مرتب از اعضای A، عضو منحصر به فردی از A را نسبت می‌دهد. اگر * یک عمل دوتایی در A باشد، به جای نوشتن $*(a,b)$ معمولاً از نماد $a*b$ استفاده می‌کنیم.

چند مثال: ۱) + و . (جمع و ضرب معمولی) دو عمل دوتایی در $\mathbb{N}$ می‌باشند.

۲) − (تفریق) یک عمل دوتایی در $\mathbb{N}$ نیست. زیرا مثلاً $1-2=-1\notin\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ تحت عمل تفریق بسته نیست).

۳) $*: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با ضابطه‌ی

$*(a,b)=$ یکی از مقسوم علیه‌های مشترک a و b

تعریف می‌کنیم. * یک عمل دوتایی در $\mathbb{N}$ نیست. زیرا:

$6*12=2 \quad , \quad 6*12=3$

تعریف: فرض کنیم A مجموعه‌ای ناتهی باشد. مجموعه‌ی A همراه با یک

با چند عمل دوتایی که در A تعریف شده‌اند یک ساختمان ریاضی نامیده می‌شود.

مثال: $(\mathbb{N},+)$ و $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ دو ساختمان ریاضی اند.

تعریف: ساختمان ریاضی $(G,*)$ را یک گروه نامیم هرگاه واجد شرایط زیر باشد:

(i) $*$ در G شرکت‌پذیر باشد، یعنی به ازای هر $a,b,c \in G$ داشته باشیم $a*(b*c)=(a*b)*c$

(ii) عضوی مانند $e \in G$ (موسوم به عضو خنثی یا عضو همانی) موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in G$، $x*e=e*x=x$

(iii) به ازای هر $x \in G$ عضوی مانند $x' \in G$ (موسوم به عضو وارون) موجود باشد بطوریکه $x*x'=x'*x=e$.

اگر عمل گروه، جمع باشد، عضو وارون را عضو قرینه نامیم.

ثابت می‌شود در هر گروه عضو همانی و وارون هر عضو منحصر به فردند. همچنین ثابت می‌شود در هر گروه قانون حذف از چپ و راست برقرارند

$\cancel{a}*b=\cancel{a}*c \Longrightarrow b=c$ حذف از چپ

$b*\cancel{a}=c*\cancel{a} \Longrightarrow b=c$ حذف از راست

تعریف: گروه $(G,*)$ را یک گروه جابجایی (آبلی) نامیم هرگاه
$*$ در G دارای خاصیت جابجایی باشد، یعنی به ازای هر $a,b \in G$
داشته باشیم $a*b=b*a$

مثال: $(\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Q}-\{0\},.)$ گروه جابجایی‌اند ولی
$(\mathbb{N},+)$ یک گروه نیست (نیم گروه است)

حلقه: فرض کنیم A مجموعه‌ای ناتهی و $+$ و $.$ (نه لزوماً جمع و ضرب
معمولی) دو عمل دوتایی در A باشند بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند:

(i) $(A,+)$ یک گروه آبلی باشد (عضو خنثی A نسبت به $+$ را
با 0 نمایش داده و آن را صفر حلقه می‌نامیم. قرینه هر عضو A مانند a را
با $-a$ نمایش می‌دهیم)

(ii) عمل ضرب $(.)$ در A شرکت‌پذیر باشد یعنی به ازای هر $a,b,c \in A$
داشته باشیم $a.(b.c)=(a.b).c$

(iii) ضرب . نسبت به + از چپ و راست توزیع پذیر باشد یعنی به ازای هر $a,b,c \in A$ داشته باشیم:

$$a\cdot(b+c)=a.b+a.c \quad , \quad (b+c).a=b.a+c.a$$

در این صورت $(A,+,.)$ یا "اختصاراً" A را یک حلقه می‌نامیم.

اگر عمل . در A دارای خاصیت جابجایی باشد یعنی به ازای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $a.b=b.a$ ، A را حلقهٔ جابجایی می‌نامیم. اگر A نسبت به . دارای عضو خنثی باشد، A را یک حلقهٔ یکدار نامیده و عضو خنثی A نسبت به عمل . را عضو واحد حلقه نامیده و با نماد 1 نمایش می‌دهیم. همانگونه که بیان شد عضو خنثی جمعی (عضو خنثی نسبت به +) را صفر حلقه می‌نامیم.

در حلقه، گاهی اوقات به جای $a.b$ از نماد ab استفاده می‌کنیم.

چند مثال از حلقه‌ها:

1) $\mathbb{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح) همراه با جمع و ضرب معمولی یعنی $(\mathbb{Z},+,.)$ یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است.

۲) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ تشکیل یک حلقه جابجایی را میدهد ولی این حلقه یکدار نیست.

۳) مجموعه ماتریس های ۲×۲ با درایه حقیقی بگیرید:

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

با جمع و ضرب ماتریسی تشکیل یک حلقه یکدار را میدهد. عضو واحد این حلقه ماتریس همانی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ میباشد. این حلقه جابجایی نیست زیرا داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴) مجموعه $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (مجموعه باقیمانده های تقسیم بر n) همراه با اعمال $\oplus_n$ (جمع به هنگ n) و $\odot_n$ (ضرب به هنگ n) که به صورت زیر تعریف میشوند یک حلقه جابجایی و یکدار است که به حلقه باقیمانده ها به هنگ n موسوم است.

$a, b \in \mathbb{Z}_n$ ، $a \oplus_n b =$ باقیمانده جمع معمولی a و b بر n

باقیمانده‌ی ضرب معمولی a و b بر n = $a \odot_n b$

مثلاً در $\mathbb{Z}_4$ داریم: $2 \oplus_4 3 = 1$, $2 \odot_4 3 = 2$

<u>تعریف</u>: فرض کنیم A حلقه‌ای یکدار باشد. عضو $x \in A$ را یکال نامیم هرگاه $y \in A$ ای موجود باشد که $xy = yx = 1$.

فرض کنیم $y' \in A$ چنان باشد که $xy' = y'x = 1$.

در این صورت $y = y \cdot 1 = y \cdot (xy') = (yx) \cdot y' = 1y' = y'$

عضو منحصر به فرد y را معکوس (وارون) x نامیده و به x^{-1} نمایش می‌دهیم.

<u>تعریف</u>: حلقه‌ی یکدار A را یک حلقه‌ی تقسیم نامیم هرگاه هر عضو غیر صفر A یکال باشد.

<u>تعریف</u>: یک حلقه‌ی تقسیم جابجایی یک میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولاً به حرف F (از Field) نشان می‌دهند. هر عضو میدان یک اسکالر نامیده می‌شود.

<u>مثال ۱</u>: هر یک از $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ یک میدان می‌باشند.

مثال ۲: $\mathbb{C}=\{x+yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2=-1\}$ با جمع و ضرب اعداد مختلط یک میدان است که به میدان اعداد مختلط موسوم است.

مثال ۳: $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ (p عدد اول) یک میدان است.

تعریف: میدانی که مجموعه آن نامتناهی باشد یک میدان نامتناهی و میدانی که مجموعه آن متناهی باشد یک میدان متناهی نامیده می‌شود. به عنوان مثال $\mathbb{C}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ میدان‌های نامتناهی و میدان‌های $\mathbb{Z}_p$ (p عدد اول) میدان‌های متناهی‌اند.

تعداد عضوهای هر میدان متناهی توانی از یک عدد اول می‌باشد.

تعریف: عدد طبیعی n را مشخصه میدان F گوییم هرگاه n کوچکترین عدد طبیعی باشد که حاصل جمع ۱، n بار با خودش برابر صفر شود یعنی $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ بار}}=0$. اگر چنین عددی موجود نباشد F را یک میدان با مشخصه صفر نامیم.

به عنوان مثال میدان‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ از مشخصه صفر ولی میدان $\mathbb{Z}_5$ از مشخصه ۵ است زیرا: $\underbrace{1+1+1+1+1}_{۵ \text{ بار}}=0$

فصل دوم - آشنایی با ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی

تعریف: یک ماتریس $m\times n$ روی میدان F جدولی شامل m سطر و n ستون است که به طور

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نمایش داده شود و به ازای هر زوج که $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq n$ (

$a_{ij}\in F$.

a_{ij} را درایه واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A می‌نامند.

هر ماتریس $m\times 1$ یعنی هر ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$ یک ماتریس ستونی و هر ماتریس $1\times n$ یعنی هر ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}$ یک ماتریس سطری نامیده می‌شود.

اگر تعداد سطرهای یک ماتریس با تعداد ستون‌های آن برابر باشد، آن ماتریس یک ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

مثال: $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی ۳×۳ است.

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس صفر باشند، آن ماتریس را ماتریس صفر می‌نامند. ماتریس صفر m در n را با $O_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود.

مثلاً:

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس A و B را هم مرتبه نامند هرگاه تعداد سطرهای آنها با هم و تعداد ستون‌های آنها نیز با هم مساوی باشند. دو ماتریس هم مرتبه را اگر درایه‌های نظیر آنها با هم مساوی باشند، دو ماتریس مساوی نامیده می‌شوند.

قرینه‌ی یک ماتریس: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ روی میدان F باشد. قرینه‌ی ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

جمع و تفریق دو ماتریس: ابتدا متذکر می‌شویم فقط دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان با هم جمع نمود یا از هم تفریق نمود. اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند،

جمع و تفریق A و B را به ترتیب با نمادهای A+B و A−B نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

$$A-B=A+(-B)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

ضرب عدد اسکالر در یک ماتریس : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس روی میدان F و λ اسکالری دلخواه باشد $(\lambda\in F)$. λA را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\lambda A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

قضیه: فرض کنیم A و B و C ماتریس‌هایی m×n روی میدان F و λ و λ_1 و λ_2 اسکالرهایی دلخواه باشند. در این صورت :

(i) $A+B=B+A$

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(iii) $A_{m\times n}+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A_{m\times n}=A_{m\times n}$

$A+(-A)=(-A)+A=0_{m \times n}$ (iv)

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (v)

$(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$ (vi)

$(\lambda_1 \lambda_2)A=\lambda_1(\lambda_2 A)$ (vii)

ضرب ماتریس‌ها و خواص آن: ماتریس سطری $A=[a_{۱۱}\ \ a_{۱۲}\cdots a_{۱n}]_{۱\times n}$

و ماتریس ستونی $B=\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ b_{۲۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times ۱}$ را در نظر بگیریم. حاصل ضرب A در B

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AB=[a_{۱۱}\ \ a_{۱۲}\cdots a_{۱n}]\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ b_{۲۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}=\sum_{k=۱}^{n}a_{۱k}b_{k۱}$$

مثال: $\begin{bmatrix}-۲ & ٤ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۲\\ ۶\end{bmatrix}=(-۲)(۵)+(٤)(۲)+(-۳)(۶)=-۲۰$

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس مفروض باشند،

حاصل ضرب AB ماتریسی است $m\times p$ که اگر آن را با C نشان

دهیم، داریم $AB=C=[c_{ij}]_{m\times p}$ که در آن:

$c_{ij}=$ سطر iام $A\times$ ستون jام B درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام C

$$=\underbrace{[a_{i۱}\ \ a_{i۲}\cdots a_{in}]}_{\text{سطر iام } A}\underbrace{\begin{bmatrix}b_{۱j}\\ b_{۲j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}}_{\text{ستون jام } B}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

بطور کلی می توان نوشت :

سطر iام

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p}$$

ستون jام

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس حاصل ضرب

تأکید می کنیم که ضرب ماتریس A در ماتریس B موقعی تعریف می شود که تعداد ستون های A، با تعداد سطرهای B برابر باشد. در این صورت گوئیم ماتریس A در ماتریس B قابل ضرب است.

مثال: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. ماتریس AB را بدست آورید.

حل: چون تعداد ستون های A با تعداد سطرهای B برابر است لذا ماتریس A در ماتریس B قابل ضرب است و AB یک ماتریس ۲×۲ است .

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\\ -۱ & ٤\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۱)(۱)+(۲)(۳)+(۳)(-۱) & (۱)(۲)+(۲)(۱)+(۳)(٤)\\ (-۱)(۱)+(۰)(۳)+(۲)(-۱) & (-۱)(۲)+(۰)(۱)+(۲)(٤)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٤ & ۱۶\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

خواص ضرب ماتریس ها: (i) فرض کنیم A و B و C سه ماتریس باشند طوری که A(BC) و (AB)C تعریف شده باشند. در این صورت $A(BC)=(AB)C$

(یعنی ضرب ماتریس ها شرکت پذیر است).

(ii) الف) فرض کنیم A یک ماتریس $n\times p$ و B و C دو ماتریس $m\times n$ باشند.

در این صورت: (توزیع پذیری از راست) $(B+C)A=BA+CA$

ب) فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ و B و C دو ماتریس $n\times p$ باشند.

در این صورت: (توزیع پذیری از چپ) $A(B+C)=AB+AC$

(iii) فرض کنیم r و s دو اسکالر دلخواه و A و B دو ماتریس با درایه های موجود در میدان F باشند طوری که AB تعریف شده باشد. در این صورت:

$$(rA)(sB)=(rs)(AB)$$

نتیجه: فرض کنیم A و B دو ماتریس با درایه‌های موجود در میدان F باشند طوری که AB تعریف شده باشد. در این صورت به ازای هر اسکالر r $(r\in F)$

الف) $(rA)B=A(rB)=r(AB)$

ب) $(-A)(-B)=AB$

ج) $A(-B)=-AB$

د) $(-A)B=-AB$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست. به عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ آنگاه:

$$AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq BA=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ماتریس‌های بالامثلثی، پایین مثلثی، قطری و اسکالر: الف) ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را بالا مثلثی گویند هرگاه به ازای هر i و j که $(i>j)$ $a_{ij}=0$. یعنی در یک ماتریس بالامثلثی کلیه درایه‌های واقع در پایین قطر اصلی صفر می‌شوند. به عنوان مثال یک ماتریس بالامثلثی 3×3 در حالت کلی:

صورت زیر است :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ O & & a_{33} \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را پایین مثلثی گویند هرگاه ، بازاء هر i و j که $i<j$ ، $a_{ij}=0$. یعنی در یک ماتریس پایین مثلثی ، همه درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی ، صفرند . بعنوان مثال ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ یک ماتریس پایین مثلثی ۳×۳ است .

ج) ماتریس مربعی $D=[d_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس قطری نامیده می‌شود هرگاه هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد . یعنی در یک ماتریس قطری درایه‌های واقع در پایین و بالای قطر اصلی همگی صفرند . بنابراین ماتریس قطری D به صورت

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & & O \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

نوشته می‌شود

بعنوان مثال $D=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری ۳×۳ است .

د) ماتریس قطری‌ای که همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن با هم مساوی

باشند، ماتریس اسکالر نامیده می‌شود. یعنی هر ماتریس به شکل

$$\begin{bmatrix} c & & 0 \\ & c & \\ 0 & & \ddots \; c \end{bmatrix}$$ یک ماتریس اسکالر است.

ماتریس اسکالری که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند ماتریس واحد (همانی) نامیده می‌شود. ماتریس واحد $n \times n$ را با $I_{n \times n}$ نمایش می‌دهند.

نکته: (i) اگر A ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه $I_m A = A$ و $A I_n = A$.

(ii) اگر $O_{k,m}$ ماتریس صفر $k \times m$ باشد آنگاه $O_{k,m} A = O_{k,n}$

ترانهاده یک ماتریس: فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک ماتریس $m \times n$ باشد. ترانهاده A که با $A^t = [a'_{ij}]_{n \times m}$ نمایش داده می‌شود ماتریسی است $n \times m$ بطوریکه $a'_{ij} = a_{ji}$.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۳ \\ ۰ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}_{۲ \times ۳}$. در این صورت

$$A^t = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}.$$

ویژگیهای ترانهاده: (i) اگر A یک ماتریس m×n باشد آنگاه $(A^t)^t = A$.

(ii) اگر A و B دو ماتریس m×n باشند آنگاه $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(iii) اگر A یک ماتریس m×n و λ یک اسکالر باشد آنگاه:

$(\lambda A)^t = \lambda A^t$. خصوصاً $(-A)^t = -A^t$ ولذا $(A-B)^t = A^t - B^t$.

زیرا $((A-B)^t = [A+(-B)]^t = A^t + (-B)^t = A^t - B^t$.

(iv) اگر ضرب A در B تعریف شده باشد آنگاه $(AB)^t = B^t A^t$.

نتیجه: اگر A_1 و A_2 و ... و A_n ماتریس های قابل ضرب باشند آنگاه:

$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$. خصوصاً اگر

$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = A$ آنگاه $(A^n)^t = (A^t)^n$.

ماتریس متقارن: ماتریس مربعی A را متقارن نامیم هرگاه $A^t = A$.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۹ & ۸ \\ ۵ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$ متقارن است زیرا:

$$A^t = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۹ & ۸ \\ ۵ & ۸ & ۷ \end{bmatrix} = A$$

مثال: هر ماتریس قطری متقارن است. بنابراین ماتریس های اسکالر و ماتریس واحد و ماتریس صفر نیز متقارن‌اند.

ماتریس پادمتقارن: ماتریس مربعی A را یک ماتریس پادمتقارن گویند هرگاه $A^t = -A$.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۳ & ۰ & ۵ \\ ۲ & -۵ & ۰ \end{bmatrix}$ پادمتقارن است،

زیرا: $A^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۵ \\ -۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} = -A$

در یک ماتریس پادمتقارن همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی، صفرند.

تعریف: ماتریس $R_{m\times n}$ تحویل شده‌ی سطری نامیده می‌شود هرگاه واجد شرایط زیر باشد: (i) اولین درایه‌ی غیرصفر در هر سطر غیرصفر R برابر ۱ باشد.

(به عبارت دیگر درایه‌ی غیرصفر مقدم هر سطر غیرصفر R برابر ۱ باشد).

(ii) همه درایه‌های دیگر هر ستون از R که شامل درایه‌ی غیرصفر مقدم یک سطر است، ۰ باشند.

مثال: ماتریس همانی I_n یک ماتریس تحویل شده سطری است. مثلاً

$$I_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ یک ماتریس تحویل شده سطری است

ولی ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

تحویل شده سطری نیستند.

تعریف: ماتریس $R_{m\times n}$ تحویل شده سطری پلکانی نامیده می‌شود هرگاه

(i) R تحویل شده سطری باشد.

(ii) هر سطر R که همه درایه‌هایش صفر باشند، زیر همه سطرهایی که دارای درایه‌ی غیرصفرند واقع شود.

(iii) اگر سطرهای ۱، ...، و r سطرهای غیرصفر ماتریس R باشند و درایه‌ی غیرصفر مقدم سطر iام در ستون K_iام واقع باشد ($i=1,2,\dots,r$)، آنگاه $K_1<K_2<\dots<K_r$.

مثال: ماتریس همانی $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I_3$ و ماتریس

$A=\begin{bmatrix}0&1&-3&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ تحویل شده سطری پلکانی است ولی ماتریس

$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ تحویل شده سطری پلکانی نیست (تحویل شده سطری است)

دستگاه‌های معادلات خطی: هر معادله به صورت

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ که در آن a_1 و ... و a_n و b مقادیری ثابت (متعلق به میدان F) و x_1 و ... و x_n متغیر باشند) یک معادله خطی با ضرایب موجود در میدان F نامیده می‌شود. x_i ها را مجهول‌های معادله می‌نامند. هر n تایی مرتب به صورت $(c_1,\dots,c_n)$ / $c_1,\dots,c_n\in F$) که در معادله فوق صدق کند یعنی داشته باشیم $a_1c_1+\cdots+a_nc_n=b$ یک جواب این معادله نامیده می‌شود. گردایه‌ای از چند معادله خطی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

یک دستگاه m معادله خطی n مجهول نامیده می‌شود. هر n تایی مرتب $(c_1, \ldots, c_n)$ از عناصر F که در هر یک از معادلات دستگاه فوق صدق کند، یک جواب دستگاه نامیده می‌شود.

یک دستگاه معادلات خطی که حداقل دارای یک جواب باشد سازگار و در غیر این صورت ناسازگار نامیده می‌شود.

دستگاه‌های معادلات خطی هم ارز: دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نامیم هرگاه هر جواب یکی جواب دیگری نیز باشد. به عبارت دیگر دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نامیم هرگاه دارای جواب‌های یکسان باشند.

شکل ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی : دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهول

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

را می‌توان به شکل ماتریسی $AX=B$ نوشت

که در آن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$

ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و

$B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم نامیده می‌شود. $AX=B$ را شکل ماتریسی

دستگاه می‌نامند. ماتریس $m\times(n+1)$ ای که n ستون اولش ستون های

ماتریس ضرایب و ستون آخرش ماتریس مقادیر معلوم دستگاه باشند، ماتریس اف

نامیده می‌شود. ماتریس افزودهٔ دستگاه فوق به صورت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

می‌باشد.

مثال: ماتریس ضرایب و ماتریس افزودهٔ دستگاه معادلات خطی زیر

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2\\ 2x_1+3x_2+x_3=3\\ x_1-x_2-2x_3=-6 \end{cases}$$

را بدست آورید.

حل: $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ = ماتریس ضرایب

$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۲ & -۶ \end{bmatrix}$ = ماتریس افزوده و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}$ (ماتریس مقادیر معلوم)

بنابراین شکل ماتریسی دستگاه، بصورت $AX=B$ یعنی بصورت

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

در می‌آیند.

اگر در یک دستگاه معادلات خطی، اعمال زیر (موسوم به اعمال مقدماتی) را انجام دهیم، دستگاهی حاصل می‌شود که با دستگاه اولی هم ارز است.

(i) ضرب طرفین یکی از معادلات دستگاه در یک اسکالر غیر صفر.

(ii) افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر.

(iii) تعویض دو معادله دستگاه.

وقتی اعمال فوق روی یک دستگاه معادلات خطی انجام می‌گیرند، در عمل

فقط روی ضرایب و ثابت‌ها در معادلات دستگاه تغییرات انجام می‌شود. بنابراین برای انجام این اعمال مقدماتی، نیازی به نوشتن مجهولات نیست. بلکه می‌توان این اعمال را به شکل زیر که به اعمال سطری مقدماتی موسومند روی ماتریس افزوده، دستگاه انجام داد:

(I) ضرب درایه‌های یک سطر در یک اسکالر غیرصفر.

(II) افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

(III) تعویض دو سطر ماتریس.

بدین ترتیب، یک عمل سطری مقدماتی عبارت است از نوعی قاعدهٔ خاص مانند e که به هر ماتریس $m \times n$ مانند A، ماتریس $e(A)$ را که $m \times n$ است متناظر می‌سازد.

قضیه: به هر عمل سطری مقدماتی e یک عمل سطری مقدماتی e_1 از همان نوع e متناظر است بطوریکه به ازاء هر ماتریس A، $e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$.

به بیان دیگر، عمل معکوس هر عمل سطری مقدماتی وجود دارد و خود، یک عمل سطری مقدماتی از همان نوع است.

برهان: (i) فرض کنیم e عملی باشد که سطر r ام یک ماتریس مانند A را در اسکالر غیرصفر c ضرب می‌کند. e_1 را عملی می‌گیریم که سطر r ام $e(A)$ را در اسکالر c^{-1} ضرب می‌کند.

(ii) فرض کنیم e عملی باشد که سطر r ام A را با سطر r ام بعلاوه‌ی c برابر سطر s ام ($r \neq s$) جایگزین می‌کند. در این حالت e_1 را عملی می‌گیریم که سطر r ام $e(A)$ را با سطر r ام بعلاوه‌ی $(-c)$ برابر سطر s ام جایگزین می‌کند.

(iii) اگر e عمل تعویض سطرهای r ام و s ام A باشد، e_1 را همان e می‌گیریم. در هر یک از این سه حالت به ازاء هر ماتریس A داریم:

$$e_1(e(A))=e(e_1(A))=A.$$

تعریف: فرض کنیم A و B دو ماتریس m×n روی میدان F باشند. گوئیم B هم ارز سطری A است هرگاه بتوان B را با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از A بدست آورد.

تذکر: با استفاده از قضیهٔ فوق می‌توان دید که هر ماتریس هم ارز سطری خودش است. اگر B هم ارز سطری A باشد، A نیز هم ارز سطری B است.

$$A \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} B$$
$$A \xleftarrow[e_1']{} \cdots \xleftarrow[e_n']{}$$

اگر B هم ارز سطری A و C هم ارز سطری B باشد آنگاه C هم ارز سطری A است.

$$\underbrace{A \xrightarrow[e_1]{} \cdots \xrightarrow[e_m]{} B \xrightarrow[e_1']{} \cdots \xrightarrow[e_n']{} C}_{m+n \text{ عمل سطری مقدماتی}}$$

به عبارت دیگر هم ارزی سطری یک رابطهٔ هم ارزی است.

نکته: هر ماتریس m×n روی میدان F (مانند A) هم ارز سطری یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری و همچنین هم ارز سطری یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است.

روش حل دستگاه‌های معادلات خطی با استفاده از اعمال سطری مقدماتی:

برای حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

ابتدا آن را به شکل ماتریسی $AX=B$ یعنی به صورت

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب } A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات } X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B \rightarrow \text{ماتریس مقادیر معلوم}}$$

نوشته و ماتریس افزوده آن که آن را A' می‌نامیم را تشکیل می‌دهیم:

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \quad B$$

سپس روی ماتریس A' اعمال سطری مقدماتی انجام می‌دهیم طوری که قسمت ماتریس ضرایب آن به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R تبدیل شود و مقادیر معلوم آن یعنی b_1 و ... و b_m به c_1 و ... و c_m تبدیل گردند.

قرار دهیم $C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ ، ثابت می‌شود دستگاه‌های $AX=B$ و $RX=C$ هم‌ارزند و لذا جواب‌هایشان یکی است. به این ترتیب می‌توان جواب‌های دستگاه را بدست آورد.

مثال: با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} ۴x_۱+۸x_۲-۱۲x_۳=۴۴ \\ ۳x_۱+۶x_۲-۸x_۳=۳۲ \\ -۲x_۱-x_۲=-۷ \end{cases}$

حل:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۴ & ۸ & -۱۲ \\ ۳ & ۶ & -۸ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۴۴ \\ ۳۲ \\ -۷ \end{bmatrix}}_{B}$$

شکل ماتریسی دستگاه

ماتریس افزوده $A' = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & -۱۲ & ۴۴ \\ ۳ & ۶ & -۸ & ۳۲ \\ -۲ & -۱ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$

حال روی A' اعمال سطری مقدماتی انجام می‌دهیم تا اینکه قسمت ماتریس ضرایب

آن تبدیل به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی شود.

$$A'=\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & -١٢ & ٤٤ \\ ٣ & ٦ & -٨ & ٣٢ \\ -٢ & -١ & ٠ & -٧ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{٤}R_1 \\ R_٢ \\ R_٣ \end{array} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ & ١١ \\ ٣ & ٦ & -٨ & ٣٢ \\ -٢ & -١ & ٠ & -٧ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ -٣R_1+R_٢ \\ ٢R_1+R_٣ \end{array} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ & ١١ \\ ٠ & ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ٣ & -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_٣ \\ R_٢ \end{array} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ & ١١ \\ ٠ & ٣ & -٦ & ١٥ \\ ٠ & ٠ & ١ & -١ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ \frac{1}{٣}R_٢ \\ R_٣ \end{array} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ & ١١ \\ ٠ & ١ & -٢ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} -٢R_٢+R_1 \\ R_٢ \\ R_٣ \end{array} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & -٢ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ & -١ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} -R_٣+R_1 \\ ٢R_٣+R_٢ \\ R_٣ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} ١ & ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٣ \\ \underbrace{٠ \quad ٠ \quad ١}_{R} & & & \underbrace{-١}_{C} \end{array}\right]$$

R تحویل شده سطری پلکانی

بنابراین دستگاه فوق به دستگاه $RX=C$ هم ارز است.

لذا جوابهای دستگاه $RX=C$ همان جوابهای دستگاه اصلی می‌باشند.

$$RX=C \Rightarrow \begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۳\\-۱\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_۱=۲\\x_۲=۳\\x_۳=-۱\end{cases}$$

ب) $\begin{cases}x_۱-x_۲+۲x_۳=۱\\ ۲x_۱+۲x_۳=۱\\ x_۱-۳x_۲+۴x_۳=۲\end{cases}$

حل:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\\۲&۰&۲\\۱&-۳&۴\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}۱\\۱\\۲\end{bmatrix}}_{B}$$

$$\text{افزوده } A'=\left[\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}۱&-۱&۲\\۲&۰&۲\\۱&-۳&۴\end{matrix}}_{A}&\underbrace{\begin{matrix}۱\\۱\\۲\end{matrix}}_{B}\end{matrix}\right] \longrightarrow \begin{array}{c}R_۱\\-۲R_۱+R_۲\\-R_۱+R_۳\end{array}\begin{bmatrix}۱&-۱&۲&۱\\۰&۲&-۲&-۱\\۰&-۲&۲&۱\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}R_۱\\\frac{۱}{۲}R_۲\\R_۳\end{array}\begin{bmatrix}۱&-۱&۲&۱\\۰&۱&-۱&-\frac{۱}{۲}\\۰&-۲&۲&۱\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c}R_۲+R_۱\\R_۲\\۲R_۲+R_۳\end{array}\left[\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}۱&۰&۱\\۰&۱&-۱\\۰&۰&۰\end{matrix}}_{R}&\underbrace{\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\-\frac{۱}{۲}\\۰\end{matrix}}_{C}\end{matrix}\right]$$

$$RX=C \Rightarrow \begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&-۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\-\frac{۱}{۲}\\۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۳ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ - x_۳ = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{x_۳ = t} \begin{cases} x_۱ = -t + \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = t - \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. مثلاً به ازای $t=۰$ یکی از این جوابها را بدست درآوردیم :

$$t=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = -\frac{۱}{۲} \\ x_۳ = ۰ \end{cases}$$

ج) $$\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ - ۷x_۳ + ۵x_۴ + ۲x_۵ = -۲ \\ x_۱ - ۲x_۲ - ۴x_۳ + ۳x_۴ + x_۵ = -۲ \\ ۲x_۱ - ۴x_۳ + ۲x_۴ + x_۵ = ۳ \\ x_۱ - ۵x_۲ - ۷x_۳ + ۶x_۴ + ۲x_۵ = -۷ \end{cases}$$

حل :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۷ & ۵ & ۲ \\ ۱ & -۲ & -۴ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۴ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ & -۷ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \\ ۳ \\ -۷ \end{bmatrix}}_{B}$$

افزوده $$A' = \left[\begin{array}{cccccc} ۲ & -۳ & -۷ & ۵ & ۲ & -۲ \\ ۱ & -۲ & -۴ & ۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & -۴ & ۲ & ۱ & ۳ \\ \underbrace{۱ & -۵ & -۷ & ۶ & ۲}_{A} & \underbrace{-۷}_{B} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} \frac{۱}{۲}R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ \\ R_٤ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۳}{۲} & -\frac{۷}{۲} & \frac{۵}{۲} & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ & -٤ & ۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & -٤ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۵ & -۷ & ۶ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} R_۱ \\ -R_۱+R_۲ \\ -۲R_۱+R_۳ \\ -R_۱+R_٤ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۳}{۲} & \frac{-۷}{۲} & \frac{۵}{۲} & ۱ & -۱ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۳ & -۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & \frac{-۷}{۲} & \frac{-۷}{۲} & \frac{۷}{۲} & ۱ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} R_۱ \\ -۲R_۲ \\ R_۳ \\ R_٤ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۳}{۲} & \frac{-۷}{۲} & \frac{۵}{۲} & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۳ & -۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & \frac{-۷}{۲} & \frac{-۷}{۲} & \frac{۷}{۲} & ۱ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} \frac{۳}{۲}R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ -۳R_۲+R_۳ \\ \frac{۷}{۲}R_۲+R_٤ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} R_۱ \\ R_۲ \\ -R_۳ \\ R_٤ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} -R_۳+R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ \\ -R_۳+R_۴ \end{array} \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{matrix}}_{R} & \underbrace{\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{matrix}}_{C} \end{array} \right]$$

$$RX = C \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ - ۲x_۳ + x_۴ = ۱ \\ x_۲ + x_۳ - x_۴ = ۲ \\ x_۵ = ۱ \end{cases} \xrightarrow[x_۴ = s]{x_۳ = r} \begin{cases} x_۱ = ۲r - s + ۱ \\ x_۲ = -r + s + ۲ \\ x_۵ = ۱ \end{cases}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. بازای r و s = ۰ یکی از جوابهای این دستگاه عبارت است از:

$$r, s = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۲ \\ x_۳ = ۰ \\ x_۴ = ۰ \\ x_۵ = ۱ \end{cases}$$

مثال: نشان دهید دستگاه زیر ناسازگار است.

$$\begin{cases} x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ = ۱ \\ x_۱ + x_۲ - x_۳ + x_۴ = ۲ \\ x_۱ + ۷x_۲ - ۵x_۳ - x_۴ = ۳ \end{cases}$$

حل:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۷ & -۵ & -۱ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}}_{B}$$

افزوده $A' = \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{۱ \quad ۷ \quad -۵ \quad -۱}_{A}} & \underbrace{۳}_{B} \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{l} R_۱ \\ -R_۱+R_۲ \\ -R_۱+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ & -۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۹ & -۶ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{l} R_۱ \\ \frac{۱}{۳}R_۲ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۹ & -۶ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{array}{l} ۲R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ -۹R_۲+R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۵}{۳} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۰}_{R}} & \underbrace{-۱}_{C} \end{array}\right]$$

$RX=C \Rightarrow ۰=-۱$ ناسازگار

مثال: چه ارتباطی بین a و b و c برقرار باشد تا دستگاه زیر سازگار باشد.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ = a \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = b \\ ۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = c \end{cases}$$

حل:

$$A' \text{افزوده} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ & a \\ ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۳ & ۱ & ۲ & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_۲ \\ R_۱ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۲ & -۱ & ۱ & a \\ ۳ & ۱ & ۲ & c \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -۲R_۱+R_۲ \\ -۳R_۱+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۰ & -۵ & -۱ & a-۲b \\ ۰ & -۵ & -۱ & -۳b+c \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -\frac{۱}{۵}R_۲ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵}a + \frac{۲}{۵}b \\ ۰ & -۵ & -۱ & -۳b+c \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} -۲R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ ۵R_۲+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵}a + \frac{۱}{۵}b \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵}a + \frac{۲}{۵}b \\ ۰ & ۰ & ٤ & -a-b+c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad}\begin{array}{c} R_۱ \\ R_۲ \\ \frac{۱}{۴}R_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵}a+\frac{۱}{۵}b \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵}a+\frac{۲}{۵}b \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۴}a-\frac{۱}{۴}b+\frac{۱}{۴}c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad}\begin{array}{c} -\frac{۳}{۵}R_۳+R_۱ \\ -\frac{۱}{۵}R_۳+R_۲ \\ R_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱۱}{۲۰}a+\frac{۷}{۲۰}b-\frac{۳}{۲۰}c \\ ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۳}{۲۰}a+\frac{۹}{۲۰}b-\frac{۱}{۲۰}c \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۴}a-\frac{۱}{۴}b+\frac{۱}{۴}c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad}\begin{array}{c} R_۱ \\ R_۳ \\ R_۲ \end{array}\left[\underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{matrix}}_{R}\quad\underbrace{\begin{matrix} \frac{۱۱}{۲۰}a+\frac{۷}{۲۰}b-\frac{۳}{۲۰}c \\ -\frac{۱}{۴}a-\frac{۱}{۴}b+\frac{۱}{۴}c \\ -\frac{۳}{۲۰}a+\frac{۹}{۲۰}b-\frac{۱}{۲۰}c \end{matrix}}_{C}\right]$$

$$RX=C \Rightarrow -\frac{۳}{۲۰}a+\frac{۹}{۲۰}b-\frac{۱}{۲۰}c=۰$$

$$\Rightarrow \boxed{۳a-۹b+c=۰}$$ شرط سازگاری

دستگاه‌های معادلات خطی همگن: هر دستگاه معادلات خطی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

یک دستگاه معادلات خطی همگن نامیده می‌شود. به عبارت دیگر یک دستگاه معادلات خطی، همگن نامیده می‌شود هرگاه تمام مقادیر معلوم آن صفر باشند. از آنجا که $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ همیشه یک جواب دستگاه همگن است، لذا دستگاه همگن، همواره سازگار است. این جواب، جواب بدیهی دستگاه نامیده می‌شود. اگر این دستگاه جواب‌های دیگری به جز صفر داشته باشد، آنها را جواب‌های غیر بدیهی می‌نامند.

ثابت می‌شود که اگر در یک دستگاه معادلات خطی همگن، تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد آن دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است و در حقیقت بی‌نهایت جواب دارد. در حقیقت ثابت می‌شود هر دستگاه معادلات خطی همگن یا فقط جواب بدیهی دارد یا بی‌نهایت جواب دارد.

قضیه: اگر دو ماتریس $m\times n$، A و B هم ارز سطری باشند، آنگاه جواب‌های دو دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ و $BX=0$ یکی است (در اینجا منظور از 0، ماتریس $\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{m\times1}$ می‌باشد).

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ باشد. در این صورت A

هم ارز سطری ماتریس همانی I_n است اگر و فقط اگر دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

مثال: دستگاه های معادلات خطی همگن زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی دستگاه

ماتریس افزوده

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_1 \\ -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_1 \\ \frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2+R_1 \\ R_2 \\ -4R_2+R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{4}R_3+R_1 \\ \frac{3}{4}R_3+R_2 \\ R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

جواب های دستگاه همگن فوق، با جواب های دستگاه همگن

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یکی است. بنابراین جواب های دستگاه عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \xRightarrow{x_3 = t} \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

به ازای هر مقدار $t \neq 0$ یک جواب (از بینهایت جواب) غیر بدیهی برای دستگاه بدست می‌آید.

ب) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

→ شکل ماتریسی دستگاه

ماتریس افزوده $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ \frac{1}{7}R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 3R_2 + R_1 \\ R_2 \\ -8R_2 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \frac{7}{6}R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} -\frac{3}{7}R_3 + R_1 \\ -\frac{1}{7}R_3 + R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه فقط جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ دارد.

ماتریس های مقدماتی: ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را یک ماتریس مقدماتی نامیم هرگاه از انجام یک تک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی I_n به دست آمده باشد.

مثال: ماتریس های زیر ماتریس های مقدماتی اند:

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۳ برابر سطر سوم I_3 به سطر اول اضافه شده است

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

سطرهای دوم و چهارم I_4 جابجا شده اند.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-3\end{bmatrix}$$

سطر دوم I_2 در ۳- ضرب شده است.

اگر یک ماتریس مقدماتی از سمت چپ در ماتریسی مانند A ضرب شود، حاصل آن همان ماتریسی می شود که از انجام عمل سطری مقدماتی متناظر روی A به دست می آید به عبارت دقیق تر قضیه زیر را داریم:

قضیه: فرض کنیم e یک عمل سطری مقدماتی و E ماتریس مقدماتی $E=e(I)$ باشد. در این صورت به ازای هر ماتریس $m\times n$ مانند A داریم $e(A)=EA$.

مثال: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\2&-1&3&6\\1&4&4&0\end{bmatrix}$ و $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$ ماتریس مقدماتی ار

یا بعداً از افزودن ۳- برابر سطر اول به سطر سوم I_3 آن بدست آمده باشد.

در این صورت $EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ "دقیقاً" ماتریسی است که از

افزودن ۳- برابر سطر اول A به سطر سوم آن بدست می‌آید.

نتیجه: فرض کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ روی میدان F باشند. در این صورت B هم ارز سطری A است اگر و فقط اگر $B = PA$ و P حاصلضرب از ماتریس‌های مقدماتی $m\times m$ باشد.

برهان: فرض کنیم $B = PA$ که در آن $P = E_t \cdots E_2 E_1$ و E_i ها ماتریس‌های مقدماتی $m\times m$ باشند. در این صورت E_1A هم ارز سطری A، $E_2(E_1A)$ هم ارز سطری E_1A و لذا هم ارز سطری A است.

با ادامهٔ این فرآیند $(E_t \cdots E_2 E_1)A$ هم ارز سطری A است.

حال فرض کنیم B هم ارز سطری A باشد و E_1 و ... و E_t ماتریس‌های مقدماتی متناظر با دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی باشند که A را به B تبدیل می‌کنند. در این صورت $B = \underbrace{(E_t \cdots E_1)}_{P}A$ زیرا:

$$A \xrightarrow[E_1]{e_1} A_1 \xrightarrow[E_2]{e_2} A_2 \xrightarrow[E_3]{e_3} \cdots \xrightarrow[E_t]{e_t} A_t = B$$

$A_1 = e_1(A) = E_1 A$ و $A_2 = e_2(A_1) = e_2(E_1 A) = E_2(E_1 A) = (E_2 E_1)A$

و ... و $B = A_t = (E_t \cdots E_1)A$

قبل از ادامه بحث ماتریس‌های مقدماتی، معکوس یک ماتریس را معرفی می‌کنیم.

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n \times n$ روی میدان F باشد. ماتریس مربعی $B_{n\times n}$ را معکوس چپ A نامیم هرگاه $BA = I_n$. به همین ترتیب ماتریس مربعی $C_{n\times n}$ را معکوس راست A نامیم هرگاه $AC = I_n$. اگر ماتریس مربعی $B_{n\times n}$ چنان باشد که $AB = BA = I_n$، آنگاه B را معکوس A نامیده و A را معکوس‌پذیر یا نامنفرد نامیم.

لم: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دارای معکوس چپ $B_{n\times n}$ و معکوس راست $C_{n\times n}$ باشد، آنگاه $B = C$.

برهان: چون B معکوس چپ A و C معکوس راست A است، لذا $BA = I$ و $AC = I$. در نتیجه:

$$B = BI \overset{I=AC}{=\!=\!=} B(AC) \underset{\text{ماتریس‌ها}}{\overset{\text{شرکت‌پذیری ضرب}}{=\!=\!=\!=\!=}} (BA)C = IC = C$$

به این ترتیب اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دارای یک معکوس چپ و یک معکوس راست باشد، آنگاه A دارای یک معکوس منحصربفرد است که آن را با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

قضیه: فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی $n\times n$ روی میدان F باشند. در این صورت:

(i) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^{-1} نیز معکوس‌پذیر است و $(A^{-1})^{-1}=A$.

(ii) اگر A و B معکوس‌پذیر باشند، AB نیز معکوس‌پذیر است و داریم:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

(iii) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^t (ترانهاده A) نیز معکوس‌پذیر است و داریم

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t.$$

برهان: (i) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

و لذا بنا به تقارن تعریف، A^{-1} نیز معکوس‌پذیر بوده و چون معکوس هر ماتریس معکوس‌پذیر، منحصر به فرد است پس $(A^{-1})^{-1}=A$.

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1}=I$$

$$A^{-1}A=I$$

(ii) فرض کنیم A و B معکوس‌پذیر باشند. در این صورت می‌توان نوشت

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$ و $BB^{-1}=B^{-1}B=I$. لذا:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A[B(B^{-1}A^{-1})]=A[(BB^{-1})A^{-1}]=A(IA^{-1})=AA^{-1}=I$$

و به همین ترتیب $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$

بنابراین $(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$

یعنی AB معکوس‌پذیر است و لذا بنا به منحصر به فرد بودن معکوس یک ماتریس معکوس‌پذیر، $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

$$(AB)(AB)^{-1}=I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$$

iii) فرض کنیم A معکوس‌پذیر باشد. در این صورت می‌توان نوشت $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. در نتیجه

$$(AA^{-1})^t=(A^{-1}A)^t=I^t \Rightarrow (A^{-1})^tA^t=A^t(A^{-1})^t=I$$

بنابراین A^t معکوس‌پذیر است. در نتیجه $A^t(A^t)^{-1}=(A^t)^{-1}A^t=I$.

لذا بنا به منحصر به فرد بودن معکوس یک ماتریس معکوس‌پذیر، $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

$$A^t(A^t)^{-1}=I$$

$$A^t(A^{-1})^t=I$$

نتیجه: هر حاصل ضربی از ماتریس‌های معکوس‌پذیر، معکوس‌پذیر است.

برهان: فرض کنیم A_1 و ... و A_n ماتریس‌های معکوس‌پذیر (هم مرتبه) باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم $A_1\cdots A_n$ نیز معکوس‌پذیر است. با استقراء حکم را ثابت می‌کنیم.

به ازای $n=2$ حکم بنا به (ii) قضیهٔ قبل برقرار است. حال فرض کنیم حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد. یعنی اگر A_1 و ... و A_k معکوس‌پذیر باشند، $A_1\cdots A_k$

نیز معکوس‌پذیر باشد و $(A_1\cdots A_K)^{-1}=A_K^{-1}\cdots A_1^{-1}$ (فرض استقراء). فرض کنیم A_1 و ... و A_K و A_{K+1} معکوس‌پذیر باشند. در واقع ثابت کنیم $A_1\cdots A_K A_{K+1}$ نیز معکوس‌پذیر است و $(A_1\cdots A_K A_{K+1})^{-1}=A_{K+1}^{-1}A_K^{-1}\cdots A_1^{-1}$.

(حکم استقراء). چون A_1 و ... و A_K و A_{K+1} معکوس‌پذیرند، لذا بنابر فرض استقراء $A_1\cdots A_K$ معکوس‌پذیر و بنابر حالت $n=2$، $(A_1\cdots A_K)A_{K+1}$ نیز معکوس‌پذیر است. می‌توان نوشت.

$$(\underbrace{A_1\cdots A_K} A_{K+1})^{-1}=A_{K+1}^{-1}(A_1\cdots A_K)^{-1}\overset{\text{فرض}}{\underset{\text{استقراء}}{=}}A_{K+1}^{-1}A_K^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

حال به ادامه بحث ماتریس‌های مقدماتی می‌پردازیم.

دیدیم که به هر عمل سطری مقدماتی e یک عمل سطری مقدماتی e_1 از همان نوع e متناظر است بطوریکه به ازای هر ماتریس A، $e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$. بنابراین اگر ماتریس E از انجام یک عمل سطری مقدماتی e روی ماتریس واحد I بدست آمده باشد (یعنی $E=e(I)$) آنگاه یک عمل سطری مقدماتی (از همان نوع) وجود دارد که با انجام آن روی ماتریس E ماتریس واحد I بدست می‌آید. به عنوان مثال اگر ماتریس E از ضرب سطر iام ماتریس I در c ($c\neq 0$) بدست آمده باشد، آنگاه با ضرب سطر iام E در $\frac{1}{c}$، مجدداً ماتریس واحد I بدست می‌آید.

به عنوان مثال :

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{در } c\,(\neq 0)]{\text{سطر سوم ضرب}}E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{در } \frac{1}{c}]{\text{سطر سوم ضرب}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

حالات ممکن به شرح زیر است :

(i) اگر E از ضرب سطر r ام I در $c\neq 0$ بدست آید، آنگاه با ضرب سطر r ام E در $\frac{1}{c}$، I بدست می‌آید .

(ii) اگر E با افزودن c برابر سطر s ام I به سطر r ام آن بدست آمده باشد، آنگاه با افزودن $-c$ برابر سطر s ام E به سطر r ام آن، ماتریس I بدست می‌آید .

(iii) اگر E با جابجا کردن سطرهای r و s ماتریس I بدست آمده باشد، آنگاه با جابجا کردن سطرهای r و s از E، I بدست می‌آید .

اعمالی که با انجام آنها روی E، ماتریس I بدست می‌آید، اعمال معکوس نامیده می‌شوند .

قضیه: هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است و معکوس آن یک ماتریس مقدماتی است .

برهان: فرض کنیم E ماتریس مقدماتی متناظر با عمل سطری مقدماتی e باشد یعنی $E=e(I)$. حال فرض کنیم E_1 ماتریسی باشد که با انجام عمل معکوس e (مثلاً e_1)

روی I حاصل شده باشد (یعنی $E_1 = e_1(I)$). در این صورت:

$$E_1 E = e_1(E) = e_1(e(I)) = I$$

و

$$E E_1 = e(E_1) = e(e_1(I)) = I$$

بنابراین E معکوس‌پذیر است و معکوس آن E_1 می‌باشد، که یک ماتریس مقدماتی است.

<u>مثال</u>: داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>یادآوری</u>: اگر ماتریس B را بتوان با انجام تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی روی A بدست آورد، با انجام اعمال معکوس روی B می‌توان به A رسید. به این ترتیب می‌توان گفت که ماتریس‌های A و B هم ارز سطری‌اند هرگاه با انجام تعداد متناهی اعمال سطری مقدماتی، بتوان از یکی از ماتریس‌ها به دیگری رسید.

<u>قضیه</u>: فرض کنیم A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

i) A معکوس‌پذیر است.

ii) A هم ارز سطری ماتریس همانی I_n است.

iii) A حاصلضرب از ماتریس‌های مقدماتی است.

نتیجه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی n×n معکوس‌پذیر باشد و دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی، A را به ماتریس همانی تحویل کند. در این صورت همان دنباله‌ی اعمال، هنگامی که بر I بکار بسته شود A^{-1} را بدست می‌دهد. زیرا:

$$A\xrightarrow[E_1]{e_1}A_1\xrightarrow[E_2]{e_2}A_2\longrightarrow\cdots\xrightarrow[E_k]{e_k}A_k=I$$

فرض کنیم E_i $(1\leq i\leq k)$ ماتریس مقدماتی متناظر با e_i باشند. در این صورت:

$$I=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A\Rightarrow\underbrace{IA^{-1}}_{A^{-1}}=(\underbrace{E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1}A)A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)(\underbrace{AA^{-1}}_{I})\Rightarrow A^{-1}=E_k\cdots E_2E_1I$$

روش بدست آوردن معکوس یک ماتریس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی: برای بدست آوردن معکوس یک ماتریس معکوس‌پذیر با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، ماتریس I را در سمت راست ماتریس A نوشته و همزمان، هر عمل سطری مقدماتی که روی A انجام می‌دهیم، روی I نیز انجام می‌دهیم. زمانی که A به I تبدیل شود، I به A^{-1} تبدیل می‌شود یعنی:

$$[A:I]\longrightarrow[I:A^{-1}].$$

درصورتی که از معکوس‌پذیری ماتریس داده شده اطلاعی نداشته باشیم، با توجه به معادل بودن قسمت‌های (i) و (ii) قضیه‌ی فوق، می‌توان از معکوس‌پذیری آن ماتریس مطلع شد. بدین صورت که اگر با انجام تعدادی متناهی اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس، ماتریس I حاصل نشود یا به عبارت دیگر یکی از سطرهای ماتریس تماماً صفر

تبدیل نشود، نتیجه میگیریم که ماتریس A معکوس‌ناپذیر است.

مثال: معکوس ماتریس‌های زیر را درصورت معکوس‌پذیر بودن، بدست آورید

(۱) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$ $\qquad [A:I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۸ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{r} R_۱ \\ -۲R_۱+R_۲ \\ -R_۱+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۵ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{r} -۲R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ ۲R_۲+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲ \\ -R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{r} -۹R_۳+R_۱ \\ ۳R_۳+R_۲ \\ R_۳ \end{array} \left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} -۴۰ & ۱۶ & ۹ \\ ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۵ & -۲ & -۱ \end{matrix}}_{A^{-۱}} \end{matrix}\right] \longrightarrow [I:A^{-۱}]$$

بنابراین $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۴۰ & ۱۶ & ۹ \\ ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۵ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$.

(iii) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۴ \\ ۲ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$

$$[A:I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -۲R_۱+R_۲ \\ R_۱+R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۸ & -۹ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۹ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -\frac{۱}{۸}R_۲ \\ R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۹}{۸} & \frac{۱}{۴} & \frac{-۱}{۸} & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۹ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} -۶R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ -۸R_۲+R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & ۰ & -\frac{۱۱}{۴} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۳}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۹}{۸} & \frac{۱}{۴} & \frac{-۱}{۸} & ۰ \\ \underbrace{۰ \quad ۰ \quad ۰}_{\text{سطر صفر}} & & & -۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

چون در سمت چپ یک سطر صفر ظاهر شد، پس A معکوس‌ناپذیر است.

نتیجه: فرض کنیم A و B دو ماتریس m×n باشند. در این صورت B هم‌ارز سطری A است اگر و فقط اگر B=PA و P یک ماتریس m×m معکوس‌پذیر باشد.

برهان: بنا بر نتیجه خوانده شده B هم‌ارز سطری A است اگر و فقط اگر B=PA و P حاصل ضرب از ماتریس‌های مقدماتی m×m باشند. چون هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است، پس حاصل ضرب آنها یعنی P نیز معکوس‌پذیر است.

subject : date :

قضیه: برای ماتریس $n\times n$ مانند A، گزاره‌های زیر هم ارزند:

(i) A معکوس‌پذیر است.

(ii) دستگاه همگن $AX=0$ فقط جواب بدیهی $X=0$ دارد.

(iii) دستگاه معادلات $AX=B$، به ازای هر ماتریس $n\times 1$ مانند B، حداقل یک جواب دارد (سازگار است).

نتیجه ۱: ماتریس مربعی که دارای یک معکوس چپ یا یک معکوس راست باشد، معکوس‌پذیر است.

برهان: فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ و دارای یک معکوس چپ B باشد (یعنی $BA=I$). در این صورت، چون $X=IX=(BA)X=B(AX)$ پس دستگاه $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی است و لذا بنا به قضیه فوق A معکوس‌پذیر است. حال فرض کنیم A دارای یک معکوس راست C باشد (یعنی $AC=I$). آنگاه C دارای یک معکوس چپ است و لذا معکوس‌پذیر است. پس $A=C^{-1}$. بنابراین A معکوس‌پذیر و دارای معکوس C است.

نتیجه ۲: فرض کنیم $A=A_1A_2\cdots A_k$ و A_1 و ... و A_k ماتریس‌های مربعی $n\times n$ باشند. در این صورت A معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر هر A_j $(1\le j\le k)$ معکوس‌پذیر باشد.

برهان: قبلاً نشان دادیم اگر A_1 و ... و A_k معکوس‌پذیر باشند، $A=A_1\cdots A_k$ نیز معکوس‌پذیر است.

حال فرض کنیم A معکوس‌پذیر باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم A_1 و ... و A_k نیز معکوس‌پذیرند. ابتدا ثابت می‌کنیم A_k معکوس‌پذیر است. برای این منظور فرض کنیم X ماتریس $n\times 1$ باشد و $A_kX=0$. در این صورت

$AX=(A_1\cdots A_{k-1})\underbrace{A_kX}_{0}=0$. در نتیجه با توجه به معکوس‌پذیر بودن A باید داشته باشیم:

$$A^{-1}(AX)=0\Longrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=0\Rightarrow IX=0\Longrightarrow X=0$$

بنابراین دستگاه $A_kX=0$ فقط دارای جواب بدیهی است و لذا بنابر قضیهٔ فوق A_k معکوس‌پذیر است. بنابراین:

$$A=A_1\cdots A_k\Longrightarrow AA_k^{-1}=(\underbrace{A_1\cdots A_{k-1}}_{}A_k)A_k^{-1}$$

$$\Rightarrow AA_k^{-1}=(A_1\cdots A_{k-1})\underbrace{(A_kA_k^{-1})}_{I}\Rightarrow A_1\cdots A_{k-1}=\underbrace{AA_k^{-1}}_{}$$

حاصلضرب دو ماتریس معکوس‌پذیر

و لذا $A_1\cdots A_{k-1}$ معکوس‌پذیر است. با ادامهٔ این فرآیند به این نتیجه می‌رسیم که هر A_j $(1,2,\dots,k)$ معکوس‌پذیر است.

تمرین: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}3&-6&2&-1\\-2&4&1&3\\0&0&1&1\\1&-2&1&0\end{bmatrix}$. به ازای کدام $Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$ دستگاه $AX=Y$ سازگار است.

حل: با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده داریم:

$$\text{افزوده} = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ & y_{۱} \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ & y_{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & y_{۳} \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ & y_{۴} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & -۱ & -\frac{۲}{۷}y_{۲}+\frac{۱}{۷}y_{۱} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & \frac{۳}{۷}y_{۲}+\frac{۱}{۷}y_{۱} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & y_{۳}-y_{۲}-\frac{۲}{۳}y_{۱} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۵}{۹}y_{۱}-\frac{۱}{۳}y_{۲}+y_{۴} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{۳}-y_{۲}-\frac{۲}{۳}y_{۱}=۰ \\ -\frac{۵}{۹}y_{۱}-\frac{۱}{۳}y_{۲}+y_{۴}=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲y_{۱}+۳y_{۲}-۳y_{۳}=۰ \\ ۵y_{۱}+۳y_{۲}-۹y_{۴}=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{۳}=\frac{۲}{۳}y_{۱}+y_{۲} \\ y_{۴}=\frac{۵}{۹}y_{۱}+\frac{۱}{۳}y_{۲} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $y = \begin{bmatrix} y_{۱} \\ y_{۲} \\ \frac{۲}{۳}y_{۱}+y_{۲} \\ \frac{۵}{۹}y_{۱}+\frac{۱}{۳}y_{۲} \end{bmatrix}$ دستگاه $AX=y$ سازگار است.

دترمینان: بطور کلی دترمینان برای ماتریس های مربعی تعریف می شود. در حقیقت دترمینان، تابعی است از مجموعه ماتریس های مربعی روی میدان F بطوریکه به هر ماتریس مربعی اسکالری از F را نظیر کند که این اسکالر را دترمینان آن ماتریس می نامند. دترمینان ماتریس مربعی A با نمادهای $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش داده می شود.

دترمینان ماتریس های ۱×۱: فرض کنیم $[a_{11}]_{1\times1}$ یک ماتریس ۱×۱ باشد. دترمینان این ماتریس را معادل a_{11} تعریف می کنیم، یعنی $\det[a_{11}]_{1\times1}=a_{11}$.

دترمینان ماتریس های ۲×۲: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی ۲×۲ باشد. دترمینان A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

حال می خواهیم بطور کلی دترمینان ماتریس های n×n را تعریف کنیم. با تعریف زیر شروع می کنیم:

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی n×n $(n\geq 2)$ روی میدان F باشد. ماتریس A_{ij} ماتریسی است $(n-1)\times(n-1)$ که از حذف سطر iام و ستون jام A بدست می آید. دترمینان A_{ij} را کهاد (مینور) درایه واقع در سطر iام و ستون jام A می نامند.

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&2&0\\7&5&-1\end{bmatrix}$. کهادهای a_{11} و a_{13} و a_{31} را بدست آورید.

حل: $\tilde{A}_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\5&-1\end{bmatrix}$

کهاد a_{11} $=\begin{vmatrix}2&0\\5&-1\end{vmatrix}=-2-0=-2$

کهاد a_{13} $=\begin{vmatrix}-3&2\\7&5\end{vmatrix}=(-3)(5)-(2)(7)=-15-14=-29$ $\quad \tilde{A}_{13}=\begin{bmatrix}-3&2\\7&5\end{bmatrix}$

کهاد a_{31} $=\begin{vmatrix}2&3\\2&0\end{vmatrix}=(2)(0)-(3)(2)=-6$ $\quad \tilde{A}_{31}=\begin{bmatrix}2&3\\2&0\end{bmatrix}$

تعریف: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. همسازهٔ Δ_{ij} از درایهٔ a_{ij} را به صورت $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|\tilde{A}_{ij}|$ تعریف می‌کنیم. ماتریس $\Delta=[\Delta_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس همسازهٔ A نامیده می‌شود.

مثال: ماتریس همسازهٔ $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

به همین ترتیب می‌توان ادامه داد.

تعریف: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\geq 2)$ باشد. دترمینان A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|A|=a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+\cdots+a_{1n}\Delta_{1n}$$

این فرمول بسط لاپلاس برحسب سطر اول نامیده می‌شود. دترمینان هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت بسط لاپلاس برحسب هر سطر یا هر ستون آن ماتریس محاسبه نمود. ثابت می‌شود که برحسب هر سطر یا هر ستون بسط داده و دترمینان را محاسبه کنیم، به یک جواب مشخص می‌رسیم. به عنوان مثال فرمول محاسبه دترمینان برحسب سطر iام و برحسب ستون jام به صورت زیر می‌باشد.

$$A=\begin{array}{c}
\text{ستون } j \text{ام}\\
\uparrow\\
\left[\begin{array}{ccccc}
a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots & a_{۱j} & \cdots & a_{۱n}\\
a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots & a_{۲j} & \cdots & a_{۲n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i۱} & a_{i۲} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n۱} & a_{n۲} \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{سطر } i \text{ام}\\ \\ \end{array}$$

$$\text{برحسب سطر } i \text{ام} = a_{i۱}\Delta_{i۱} + a_{i۲}\Delta_{i۲} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$\text{برحسب ستون } j \text{ام} = a_{۱j}\Delta_{۱j} + a_{۲j}\Delta_{۲j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳\\ ۲ & ۵ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ را برحسب سطر دوم و برحسب ستون سوم بسط داده و محاسبه کنید.

حل:

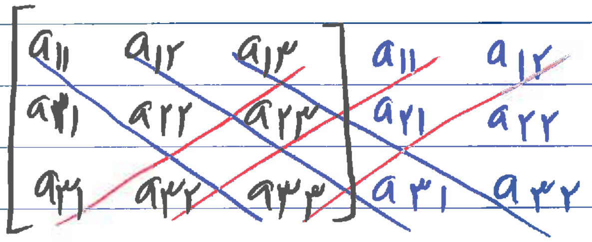
$$|A| = ۲(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} -۲ & ۳\\ ۰ & ۲\end{vmatrix} + ۵(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۳\\ ۰ & ۲\end{vmatrix} + (۱)(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۲\\ ۰ & ۰\end{vmatrix} \quad \text{برحسب سطر دوم}$$

$$= (-۲)(-۴) + (۵)(۲) + (-۱)(۰) = ۱۸$$

$$|A| = ۳(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۵\\ ۰ & ۰\end{vmatrix} + (۱)(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۲\\ ۰ & ۰\end{vmatrix} + (۲)(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۲\\ ۲ & ۵\end{vmatrix} \quad \text{برحسب ستون سوم}$$

$$= (۳)(۰) + (-۱)(۰) + (۲)(۵+۴) = ۱۸$$

قاعدهٔ ساروس برای محاسبهٔ دترمینال های ۳x۳ : برای محاسبهٔ دترمینال یک ماتریس ۳x۳ مانند A با استفاده از قاعدهٔ ساروس، ابتدا ستون های اوّل و دوّم A را به ترتیب در سمت راست ماتریس A نوشته و سپس قطر اصلی و قطرهای موازی با آن و قطر فرعی و قطرهای موازی با آن را مشخص می کنیم. دترمینال A برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه های واقع بر قطر اصلی و خطوط موازی با آن منهای مجموع حاصل ضرب درایه های واقع بر قطر فرعی و خطوط موازی آن.

A=


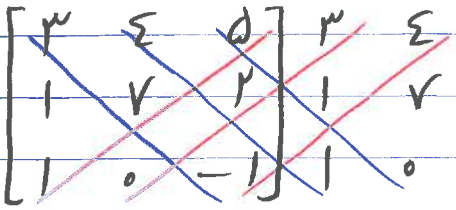
$$|A| = (a_{۱۱} a_{۲۲} a_{۳۳} + a_{۱۲} a_{۲۳} a_{۳۱} + a_{۱۳} a_{۲۱} a_{۳۲})$$

$$- (a_{۱۳} a_{۲۲} a_{۳۱} + a_{۱۱} a_{۲۳} a_{۳۲} + a_{۱۲} a_{۲۱} a_{۳۳})$$

تذکر: قاعدهٔ ساروس فقط برای محاسبهٔ دترمینان های ۳x۳ بکار می رود.

مثال: با استفاده از قاعدهٔ ساروس دترمینان $A = \begin{bmatrix} ۳ & ٤ & ۵ \\ ۱ & ۷ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:



$$|A| = [(۳)(۷)(-۱) + (٤)(۲)(۱) + (۵)(۱)(۰)]$$

$$- [(۵)(۷)(۱) + (۳)(۲)(۰) + (٤)(۱)(-۱)] = -٤٤$$

برای محاسبه‌ی یک دترمینان $n \times n$ با توجه به لاپلاس ، باید n دترمینان $(n-1)\times(n-1)$ را محاسبه کنیم. مثلاً برای محاسبه‌ی یک دترمینان ۴×۴ باید ۴ دترمینان ۳×۳ را محاسبه کنیم. لذا برای محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس بهتر است از سطر آن یا ستونی استفاده کنیم که بیشترین درایه‌ی صفر را دارد. زیرا این کار محاسبات را به حداقل می‌رساند. مثلاً برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

سطر اول بهترین انتخاب است.

قضیه: دترمینان هر ماتریس بالامثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad 0$$

نتیجه: دترمینان ماتریس‌های قطری و اسکالر برابر است با حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن.

به این ترتیب می‌توان دید که دترمینان ماتریس واحد ۱ و دترمینان ماتریس صفر صفر است.

توضیح: محاسبه دترمینان یک ماتریس از طریق روش لاپلاس مشکل و محاسبات زیاد و خسته کننده است. زیرا همانگونه که گفتیم اگر A یک ماتریس ۵×۵ باشد، برای محاسبه دترمینان A باید ۵ دترمینان ۴×۴ را محاسبه کنیم که هر یک از دترمینان های ۴×۴ نیز شامل ۴ دترمینان ۳×۳ خواهد بود که در نتیجه باید دترمینان ۲۰ ماتریس ۳×۳ را محاسبه نمود. بنابراین روش لاپلاس بیشتر در موارد نظری مورد استفاده قرار میگیرد. برای ارائه روش ساده تر توجه می کنیم که هر چه تعداد صفرهای یک سطر یا یک ستون ماتریس بیشتر باشد، محاسبه دترمینان آن راحت تر است. لذا باید روشی را پیدا کرد که تعداد صفرها را در سطرها یا ستون های ماتریس بدون تغییر اساسی در دترمینان آن افزایش دهد. واضح است یکی از راههای تولید صفر در سطرها و ستون های ماتریس، استفاده از اعمال سطری مقدماتی است. حال این سؤال مطرح می شود که انجام اعمال سطری مقدماتی چه تأثیری روی دترمینان ماتریس دارد. همانگونه که خواهیم دید، تأثیر اعمال سطری مقدماتی، تأثیری مثبت است و با استفاده از آنها می توان ماتریس را به شکل یک ماتریس بالا مثلثی درآورده و سپس دترمینان آن را به راحتی محاسبه نمود.

ویژگیهای دترمینان : فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی n×n باشند. در این صورت

(i) اگر A دارای یک سطر (یک ستون) صفر باشد، آنگاه $|A|=0$.

(ii) اگر A^t ترانهاده A باشد آنگاه $|A^t|=|A|$.

(iii) دترمینان AB برابر است با: $|AB|=|A||B|$.

(iv) اگر یک سطر (یک ستون) A در عدد ثابت c ضرب شود آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر است با: $c|A|$.

تذکر: خاصیت (iv) را می‌توان به صورت‌های زیر بیان نمود:

iv-الف) در یک دترمینان، در یک سطر (یک ستون) آن می‌توان از هر عددی فاکتور گرفت و در بیرون دترمینان قرار داد:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a & b \\ a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

iv-ب) اگر بخواهیم عددی که در یک دترمینان ضرب شده است را به داخل دترمینان ببریم، این عدد را فقط در یک سطر یا یک ستون آن ضرب می‌کنیم. مثلاً:

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

بنابراین اگر λ یک عدد (اسکالر) و A یک ماتریس n×n باشد آنگاه

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

(v) اگر دو سطر مجزا (دو ستون مجزا) A را با هم جابجا کنیم، آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر است با $-|A|$.

(vi) اگر ماتریسی دارای دو سطر (یا دارای دو ستون) مساوی باشد آنگاه دترمینان آن برابر صفر است.

(vii) اگر یک سطر (یا یک ستون) A مضربی از سطر (یا ستون) دیگری از A باشد، آنگاه $|A|=0$.

(viii) اگر مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (ستون) دیگری از A بیفزاییم، دترمینان A تغییر نمی‌کند.

حال با توجه به ویژگیهای فوق، برای محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس می‌توان آن را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی به فرم یک ماتریس بالامثلثی درآورد و سپس دترمینان را محاسبه نمود.

<u>مثال</u>: دترمینان زیر را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی محاسبه کنید.

<u>حل</u>:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{۳ فاکتور می‌گیریم}}{\overset{\text{در سطر دوم از}}{=\!=\!=\!=\!=}} 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{را جابجا کنیم}}{\overset{\text{سطرهای دوم و اول}}{=\!=\!=\!=\!=}} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{به سطر سوم می‌افزاییم}}{\overset{\text{(-2) برابر سطر اول را}}{=\!=\!=\!=\!=}} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{را با سطر سوم افزاییم}]{\text{(-10) برابر سطر دوم}} -3\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&-55\end{vmatrix}=(-3)(-55)=165$$

مثال: بدون بسط ثابت کنید دترمینان زیر برابر صفر است.

$$\begin{vmatrix}0&a&0\\b&c&d\\0&e&0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{در سطر سوم از e فاکتور می‌گیریم}]{\text{در سطر اول از a و}} ae\begin{vmatrix}0&1&0\\b&c&d\\0&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{دو سطر مساوی است}]{\text{دترمینان دارای}} 0$$

مثال: بدون بسط دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha&2&\cos^2\alpha\\\sin^2\beta&2&\cos^2\beta\\\sin^2\gamma&2&\cos^2\gamma\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}\sin^2\alpha&2&\cos^2\alpha\\\sin^2\beta&2&\cos^2\beta\\\sin^2\gamma&2&\cos^2\gamma\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{با ستون اول را افزاییم}]{\text{ستون سوم را}}\begin{vmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha&2&\cos^2\alpha\\\sin^2\beta+\cos^2\beta&2&\cos^2\beta\\\sin^2\gamma+\cos^2\gamma&2&\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&\cos^2\alpha\\1&2&\cos^2\beta\\1&2&\cos^2\gamma\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در ستون دوم از 2}} 2\begin{vmatrix}1&1&\cos^2\alpha\\1&1&\cos^2\beta\\1&1&\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2 ستون مساوی است}]{\text{دترمینان دارای}} 2(0)=0$$

مثال: بدون بسط دترمینان $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1+x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1+z\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1+x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1+z\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{به سطرهای دوم، سوم و چهارم می‌افزاییم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&0&0\\0&0&y&0\\0&0&0&z\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بالا مثلثی}}(1)(x)(y)(z)=xyz$$

مثال: بدون بسط دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{به سطرهای دوم و سوم می‌افزاییم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را}}\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{در سطر سوم از } c-a \text{ فاکتور می‌گیریم}]{\text{در سطر دوم از } b-a \text{ و}}(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم می‌افزاییم}]{\text{(-1) برابر سطر دوم را به}}(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&0&c-b\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بالا مثلثی}}(b-a)(c-a)(c-b)$$

دترمینان و معکوس ماتریس: دیدیم که اگر r و s دو اسکالر دلخواه و A و B دو ماتریس با درایه‌های موجود در میدان F باشند طوریکه AB تعریف شده باشد، آنگاه $(rA)(sB)=(rs)(AB)$ (خاصیت (III) ضرب ماتریس‌ها).

حال قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی معکوس‌پذیر و $c\neq 0$. در این صورت cA نیز معکوس‌پذیر بوده و داریم: $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$.

برهان: می‌توان نوشت:

$$(cA)(\frac{1}{c}A^{-1})=\underbrace{(c\cdot\frac{1}{c})}_{1}\underbrace{(AA^{-1})}_{I}=I$$

و

$$(\frac{1}{c}A^{-1})(cA)=\underbrace{(\frac{1}{c}\cdot c)}_{1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}=I$$

پس cA معکوس‌پذیر است و $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$.

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی معکوس‌پذیر باشد. در این صورت $|A|\neq 0$ و $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

برهان: چون A معکوس‌پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد و داریم:

$$AA^{-1}=I \longrightarrow |AA^{-1}|=|I|=1 \longrightarrow |A||A^{-1}|=1$$

چون حاصل ضرب $|A|$ و $|A^{-1}|$ مخالف صفر است، پس هر کدام مخالف صفرند

ولذا $|A|\neq 0$. در نتیجه $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

یادآوری: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس مربعی باشد. اگر به جای هر a_{ij} همسازه آن یعنی $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|\bar{A}_{ij}|$ را قرار دهیم، ماتریس بدست آمده را ماتریس همسازه A گویند و با نماد Δ نمایش می‌دهند.

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. ترانهاده ماتریس همسازه A را ماتریس الحاقی A نامیده و با نماد adj A نمایش می‌دهند. یعنی $\text{adj}A=\Delta^{t}$.

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. در این صورت $A(\operatorname{adj}A)=(\operatorname{adj}A)A=|A|I$.

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n\times n$، دترمینال ناصفر باشد. در این صورت A معکوسپذیر است و داریم $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$.

برهان: بنا به قضیه فوق می‌توان نوشت: $A(\operatorname{adj}A)=(\operatorname{adj}A)A=|A|I$

چون $|A|\neq ۰$، پس می‌توان طرفین را در $\frac{1}{|A|}$ ضرب نمود ولذا:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A\right)=\left(\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A\right)A=I\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A}$$

بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس A معکوسپذیر است اگر و فقط اگر $|A|\neq ۰$.

مثال: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳&۱&۲\\-۲&۵&۴\\۱&۳&۶\end{bmatrix}$ را در صورت معکوسپذیر بودن بدست آورید.

حل: داریم: $|A|=(۹۰+۴-۱۲)-(۱۰+۳۶-۱۲)=۴۸\neq ۰$

چون $|A|\neq ۰$ پس A معکوسپذیر است. حال می‌توان نوشت:

$\Delta_{ij}=(-۱)^{i+j}|\bar{A}_{ij}|$ ، $\Delta_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}۵&۴\\۳&۶\end{vmatrix}=۱۸$

$\Delta_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix}-۲&۴\\۱&۶\end{vmatrix}=-(-۱۲-۴)=۱۶$ و $\Delta_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}-۲&۵\\۱&۳\end{vmatrix}=-۱۱$

$$\Delta_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۶\end{vmatrix}=-(۶-۶)=۰$$ و $$\Delta_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۶\end{vmatrix}=۱۶$$

$$\Delta_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}=-(۹-۱)=-۸\ ,\ \Delta_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & ۴\end{vmatrix}=-۶$$

$$\Delta_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۴\end{vmatrix}=-(۱۲+۴)=-۱۶$$

$$\Delta_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۵\end{vmatrix}=۱۵+۲=۱۷$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}۱۸ & ۱۶ & -۱۱\\ ۰ & ۱۶ & -۸\\ -۶ & -۱۶ & ۱۷\end{bmatrix}$$

$$adj\,A=\Delta^{t}=\begin{bmatrix}۱۸ & ۰ & -۶\\ ۱۶ & ۱۶ & -۱۶\\ -۱۱ & -۸ & ۱۷\end{bmatrix}$$ ماتریس الحاقی

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\,adj\,A=\frac{۱}{۴۸}\begin{bmatrix}۱۸ & ۰ & -۶\\ ۱۶ & ۱۶ & -۱۶\\ -۱۱ & -۸ & ۱۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۸} & ۰ & \frac{-۱}{۸}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{-۱۱}{۴۸} & \frac{-۱}{۶} & \frac{۱۷}{۴۸}\end{bmatrix}$$

قاعده‌ی کرامر برای حل دستگاه‌های n معادله‌ی خطی n مجهولی: در این بخش کاربردی از دترمینان، در حل دستگاه‌های n معادله‌ی خطی n مجهولی را بیان می‌کنیم. برای این منظور دستگاه n معادله‌ی خطی n مجهولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}a_{۱۱}x_{۱}+a_{۱۲}x_{۲}+\cdots+a_{۱n}x_{n}=b_{۱}\\ a_{۲۱}x_{۱}+a_{۲۲}x_{۲}+\cdots+a_{۲n}x_{n}=b_{۲}\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_{n۱}x_{۱}+a_{n۲}x_{۲}+\cdots+a_{nn}x_{n}=b_{n}\end{cases}$$

فرض کنیم. $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n}\\ a_{۲۱} & \cdots & a_{۲n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix}x_{۱}\\ \vdots\\ x_{n}\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix}b_{۱}\\ \vdots\\ b_{n}\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم باشند. در این صورت دستگاه را بصور

subject : $AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}B}$

$AX=B$ نوشته می‌شود. اگر $|A|\neq 0$ آنگاه A معکوس‌پذیر بوده و با ضرب طرفین این معادله $(AX=B)$ در A^{-1}، جواب معادله به صورت $X=A^{-1}B$ بدست خواهد آمد. اگر در این تساوی، بجای A^{-1} مقدار آن را با استفاده از ماتریس الحاقی قرار دهیم، بدست می‌آوریم:

$$X=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)B=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}b_1\Delta_{11}+b_2\Delta_{21}+\cdots+b_n\Delta_{n1}\\ b_1\Delta_{12}+b_2\Delta_{22}+\cdots+b_n\Delta_{n2}\\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ b_1\Delta_{1n}+b_2\Delta_{2n}+\cdots+b_n\Delta_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{|A|}(b_1\Delta_{11}+b_2\Delta_{21}+\cdots+b_n\Delta_{n1})\\ x_2=\frac{1}{|A|}(b_1\Delta_{12}+b_2\Delta_{22}+\cdots+b_n\Delta_{n2})\\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ x_n=\frac{1}{|A|}(b_1\Delta_{1n}+b_2\Delta_{2n}+\cdots+b_n\Delta_{nn})\end{cases}$$

چون Δ_{11} و Δ_{21} و ... و Δ_{n1} همسازه‌های متناظر با ستون اول A هستند، لذا اگر A_1 ماتریسی باشد که از جایگزین کردن ستون اول A با

ماتریس ستون B جانشین شود، یعنی

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

و همسازه‌های این ماتریس را با Δ'_{ij} نمایش دهیم، آنگاه به ازاء هر i، $1 \le i \le n$، $\Delta'_{i1} = \Delta_{i1}$. بر این ترتیب بسط دترمینان A_1 برحسب ستون اول، به صورت زیر خواهد بود:

$$|A_1| = b_1 \Delta'_{11} + b_2 \Delta'_{21} + \dots + b_n \Delta'_{n1}$$

$$= b_1 \Delta_{11} + b_2 \Delta_{21} + \dots + b_n \Delta_{n1} = (|A|) x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}}$$

همین نتیجه را برای مجهولات دیگر نیز می‌توان گرفت، با این تفاوت که برای بدست آوردن مجهول x_j کافیست به جای ستون jام A، ماتریس ستونی B را قرار دهیم. یعنی به ازاء هر j، $1 \le j \le n$، داریم:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ستون jام

این مطالب را می‌توان در قضیهٔ زیر (معروف به قاعدهٔ کرامر) بیان نمود:

قضیه (قاعده کرامر): اگر A یک ماتریس مربعی n×n و نامنفرد باشد، جواب دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

به صورت زیر است:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad \dots,\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

که در آن هر ماتریس A_j از جایگزین نمودن ستون j ام A با ماتریس ستونی B بدست می‌آید.

مثال: دستگاه

$$\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 3y-2z=6 \\ -2x+3z=-1 \end{cases}$$

را با قاعده کرامر حل کنید.

حل:

ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات

و $B=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم $\qquad |A|=19$

$$A_1=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{95}{19}=5,\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{76}{19}=4,\quad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{57}{19}=3$$

فصل سوم - فضاهای برداری :

تعریف : یک فضای برداری V روی میدان F متشکل است از :

(i) یک میدان F که اعضای آن را اسکالر می‌نامیم .

(ii) یک مجموعه V که اعضای آن را بردار نامیم .

(iii) یک عمل به نام جمع برداری که به هر زوج از بردارهای x و y از V بردار $x+y$ از V را که مجموع x و y نامیده می‌شود وابسته می‌سازد به این شرایط که : $(+: V\times V \rightarrow V)$

الف) جمع جابجایی است یعنی به ازای هر $x,y\in V$ ، $x+y=y+x$.

ب) جمع شرکت‌پذیر است یعنی به ازای هر $x,y,z\in V$ ، $(x+y)+z=x+(y+z)$.

ج) بردار منحصربفرد 0 به نام بردار صفر در V موجود است بطوریکه به ازای هر $x\in V$ ،

$$x+0=0+x=x .$$

د) به ازای هر $x\in V$ ، بردار منحصربفرد $-x$ در V موجود است بطوریکه

$$x+(-x)=(-x)+x=0 .$$

یعنی V تحت عمل $+$ یک گروه آبلی است .

(iv) یک عمل به نام ضرب اسکالر ($\cdot : F\times V \rightarrow V$) که به هر اسکالر $c\in F$ و هر بردار $x\in V$ ، بردار cx در V که حاصل ضرب (اسکالر) c در x نامیده می‌شود وابسته می‌سازد به این شرایط که :

ه) به ازای هر $x\in V$ ، $1x=x$.

و) به ازای هر $c_1,c_2\in F$ و هر $x\in V$ ، $(c_1c_2)x=c_1(c_2x)$.

ز) به ازای هر $c\in F$ و هر $x,y\in V$ ، $c(x+y)=cx+cy$.

ح) به ازای هر $c_1,c_2\in F$ و هر $x\in V$ ، $(c_1+c_2)x=c_1x+c_2x$.

چند مثال از فضاهای برداری :

مثال ۱- فرض کنید F یک میدان دلخواه و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی n تایی‌های مرتب با مولفه‌های موجود در میدان F را با F^n نمایش می‌دهیم. یعنی :

$$F^n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,x_2,\dots,x_n\in F\}$$

عمل جمع برداری و ضرب اسکالر را به صورت مولفه به مولفه تعریف می‌کنیم. یعنی اگر

$(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in F^n$ و $c\in F$ ،

جمع برداری : $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

ضرب اسکالر : $c(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n)$

$V=F^n$ یک فضای برداری روی میدان F است. زیرا اگر $c_1,c_2,c\in F$ و

$z=(z_1,\dots,z_n)\in V=F^n$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ و $x=(x_1,\dots,x_n)$ آنگاه :

$$x+y=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

$$=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)=(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n)=y+x \qquad \text{(الف)}$$

$$(x+y)+z=[(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)]+(z_1,\dots,z_n)$$

$$=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)+(z_1,\dots,z_n)=((x_1+y_1)+z_1,\dots,(x_n+y_n)+z_n)$$

$$=(x_1+(y_1+z_1),\dots,x_n+(y_n+z_n))=(x_1,\dots,x_n)+(y_1+z_1,\dots,y_n+z_n)$$

$$=(x_1,\dots,x_n)+[(y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots,z_n)]=x+(y+z) \qquad \text{(ب)}$$

n تایی مرتب صفر یعنی $0_V=(0_F,\dots,0_F)\in V=F^n$ موجود است بطوریکه :

$x+0=(x_1,\dots,x_n)+(0_F,\dots,0_F)=(x_1+0_F,\dots,x_n+0_F)=(x_1,\dots,x_n)=x$ (ج)

به ازای هر $x=(x_1,\dots,x_n)\in V=F^n$ بردار منحصربفرد $-x=(-x_1,\dots,-x_n)\in V=F^n$

موجود است بطوریکه: $-x+x=(-x_1,\dots,-x_n)+(x_1,\dots,x_n)=(-x_1+x_1,\dots,-x_n+x_n)$

$=(0_F,\dots,0_F)$ (د)

$1_F x=1_F(x_1,\dots,x_n)=(1_F x_1,\dots,1_F x_n)=(x_1,\dots,x_n)=x$ (ه)

$(c_1c_2)x=(c_1c_2)(x_1,\dots,x_n)=((c_1c_2)x_1,\dots,(c_1c_2)x_n)$

$=(c_1(c_2x_1),\dots,c_1(c_2x_n))=c_1(c_2x_1,\dots,c_2x_n)=c_1[c_2(x_1,\dots,x_n)]$

$=c_1(c_2x)$ (و)

$c(x+y)=c((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n))=c(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$=(c(x_1+y_1),\dots,c(x_n+y_n))=(cx_1+cy_1,\dots,cx_n+cy_n)$

$=(cx_1,\dots,cx_n)+(cy_1,\dots,cy_n)=c(x_1,\dots,x_n)+c(y_1,\dots,y_n)$

$=cx+cy$ (ز)

$(c_1+c_2)x=(c_1+c_2)(x_1,\dots,x_n)=((c_1+c_2)x_1,\dots,(c_1+c_2)x_n)$

$=(c_1x_1+c_2x_1,\dots,c_1x_n+c_2x_n)=(c_1x_1,\dots,c_1x_n)+(c_2x_1,\dots,c_2x_n)$

$=c_1(x_1,\dots,x_n)+c_2(x_1,\dots,x_n)=c_1x+c_2x$ (ح)

مثال ۱۲: فرض کنیم $M_{m\times n}(F)$ مجموعه همه ماتریس های $m\times n$ با درایه های موجود در میدان F باشد. اگر جمع بردارها را جمع ماتریس ها و ضرب اسکالر را ضرب عدد

اسکالر در ماتریس تعریف کنیم آنگاه $M_{m\times n}(F)$ یک فضای برداری روی میدان F است

که به فضای ماتریس‌های $m\times n$ موسوم است. توجه می‌کنیم که $M_{1\times n}(F)=F^n$.

مثال ۳: فرض کنیم $V=C[a,b]$ مجموعهٔ تمام توابع پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ باشند،

یعنی $V=C[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ پیوسته است}\}$.

به ازای هر $f,g\in V$ و هر $c\in\mathbb{R}$ جمع برداری و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

جمع برداری: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

ضرب اسکالر: $(cf)(x)=cf(x)$

در این صورت $V=C[a,b]$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است. بردار صفر، تابع $f(x)=0$ و بردار قرینهٔ f، $-f$ است که به صورت $(-f)(x)=-f(x)$ تعریف می‌شود. این فضای برداری به فضای توابع پیوسته روی $[a,b]$ موسوم است.

مثال ٤: فرض کنیم $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ و $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ دو چندجمله‌ای با ضرایب موجود در میدان F باشند یعنی: $a_0,a_1,\dots,a_n,b_0,b_1,\dots,b_m\in F$، $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$

فرض کنیم $m\leq n$. قرار می‌دهیم $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$.

به این ترتیب $g(x)$ را می‌توان به صورت $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m+\cdots+b_nx^n$ نوشت. حال جمع برداری و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

جمع برداری: $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$

ضرب اسکالر: $cf(x)=(ca_0)+(ca_1)x+\cdots+(ca_n)x^n \quad (c\in F)$

با اعمال فوق (جمع برداری و ضرب اسکالر) مجموعهٔ تمام چندجمله‌ای‌ها با ضرایب موجود در میدان F یک فضای برداری است که با نماد $P(F)$ نمایش داده شده و فضای تمام چندجمله‌ای‌ها روی F نامیده می‌شود.

مثال ۵: فرض کنیم $P_n(F)$ مجموعهٔ تمام چندجمله‌ای‌های از درجهٔ کوچکتر یا مساوی n با ضرایب موجود در میدان F باشد. در این صورت $P_n(F)$ با همان اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر فوق یک فضای برداری است که به فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجهٔ n موسوم است.

مثال ۶: فرض کنیم $S=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. برای هر $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in S$ و $c\in\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2-b_2)$$

و

$$c(a_1,a_2)=(ca_1,ca_2)$$

S تحت این دو عمل یک فضای برداری نیست. زیرا به عنوان مثال جمع فوق دارای خاصیت جابجایی نیست:

$$(1,2)+(2,3)=(1+2,2-3)=(3,-1)$$

$$(2,3)+(1,2)=(2+1,3-2)=(3,1)$$

قضیهٔ زیر خواص عمومی فضاهای برداری را بیان می‌کند:

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت:

(i) به ازای هر $c\in F$، $c\cdot 0_V=0_V$.

(ii) به ازای هر $x\in V$، $0_F\cdot x=0_V$.

(iii) به ازای هر $c\in F$ و هر $x\in V$، $cx=0_V \Rightarrow c=0_F$ یا $x=0_V$.

(iv) به ازای هر $c\in F$ و هر $x\in V$، $(-c)x=-(cx)=c(-x)$.

برهان: (i) فرض کنیم $c\in F$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. می‌توان نوشت:

$$0_V+0_V=0_V \Rightarrow c\cdot(0_V+0_V)=c\cdot 0_V \Rightarrow \cancel{c\cdot 0_V}+c\cdot 0_V=\cancel{c\cdot 0_V}+0_V$$

$$\xrightarrow[\text{(V,+) در}]{\text{قاعده‌ی حذف}} \boxed{c\cdot 0_V=0_V}$$

(ii) فرض کنیم $x\in V$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. در این صورت:

$$0_F+0_F=0_F \Rightarrow (0_F+0_F)x=0_F x \Rightarrow \cancel{0_F x}+0_F x=\cancel{0_F x}+0_V$$

$$\Rightarrow \boxed{0_F x=0_V}$$

(iii) فرض کنیم $cx=0_V$ و $c\neq 0_F$. چون F یک میدان است پس c دارای معکوس ضربی است، یعنی c^{-1} (یا $\frac{1}{c}$) موجود است. بنابراین:

$$cx=0_V \Rightarrow \frac{1}{c}(cx)=\frac{1}{c}0_V \overset{(و)}{\Longrightarrow} \Big(\underbrace{\frac{1}{c}\cdot c}_{1_F}\Big)x=\frac{1}{c}\cdot 0_V \overset{(i)}{\Rightarrow} 1_F x=0_V$$

$$\overset{(ه)}{\Longrightarrow} \boxed{x=0_V}$$

(iv) به ازای هر $c\in F$ و هر $x\in V$ می‌توان نوشت:

$$(-c)x+cx=(-c+c)x=0_F\cdot x \overset{(ii)}{=} 0_V \Longrightarrow$$ $(-c)x$ قرینه‌ی cx است.

از طرفی $-(cx)$ نیز قرینه‌ی cx است. لذا بنابه منحصر به فرد بودن عضو قرینه $(-c)x=-(cx)$.

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$c(-x)+cx \overset{(ز)}{=} c(-x+x)=c\cdot 0_V \overset{(i)}{=} 0_V \Rightarrow$ $c(-x)$ قرینهٔ cx است

از طرفی $-(cx)$ نیز قرینهٔ cx است. لذا بنا به منحصر به فرد بودن عضو قرینه، $c(-x)=-(cx)$. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

تذکر: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $x,y\in V$. تعریف می‌کنیم $-x=(-1)x$ و $x-y=x+(-y)$.

تمرین: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $c,c_1,\dots,c_n\in F$ و $x,x_1,\dots,x_n\in V$. ثابت کنید:

الف) $(c_1+\cdots+c_n)x=c_1x+\cdots+c_nx$

ب) $c(x_1+\cdots+x_n)=cx_1+\cdots+cx_n$.

زیرفضای برداری: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعهٔ W از V را یک زیرفضای V نامیم هرگاه تحت اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر روی V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

برای سنجش اصول فضای برداری نشان می‌دهیم که زیرمجموعهٔ W از V یک زیرفضای V است هرگاه: (i) به ازای هر $x,y\in W$، $x+y\in W$ (یعنی W تحت جمع برداری بسته باشد).

(ii) به ازای هر $x\in W$ و هر $c\in F$، $cx\in W$ (یعنی W تحت ضرب اسکالر بسته باشد)

(iii) بردار ۰ در W باشد (یعنی $0_V \in W$).

(iv) به ازای هر $x \in W$، $-x \in W$.

بقیهٔ خواص فضای برداری مانند شرکت‌پذیری جمع برداری، جابجایی جمع برداری و خواص ضرب اسکالر، از V به W به ارث می‌رسند.

قضیهٔ زیر محک مفیدتری برای تشخیص زیرفضا بودن، بدست می‌دهد:

قضیه (محک مفیدتر): زیرمجموعهٔ ناتهی W از V (V یک فضای برداری روی میدان F است) یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in W$ و هر $c \in F$، $cx+y \in W$.

برهان: لزوم - فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F، W زیرمجموعه‌ای ناتهی از V و W یک زیرفضای V باشد. در این صورت با توجه به اینکه W تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x, y \in W$ و هر $c \in F$، $cx+y \in W$.

کفایت: فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد بطوری که به ازای هر $x, y \in W$ و هر $c \in F$، $cx+y \in W$. می‌خواهیم ثابت کنیم W یک زیرفضای V است.

چون W ناتهی است، پس برداری مانند u در W موجود است. لذا بنابه فرض $(-1)u + u = -u + u = 0_V \in W$. اگر x برداری دلخواه از W و c

اسکالری دلخواه باشند، $cx + 0_V = cx \in W$، یعنی W تحت عمل ضرب اسکالر بسته است. بخصوص به ازای هر $x \in W$، $(-1)x = -x \in W$. سرانجام اگر x و y المانهای دلخواه از W باشند، آنگاه $1x + y = x + y \in W$.

لذا W یک زیرفضای V است.

چند مثال از زیرفضاها: (i) فرض کنید V یک فضای برداری دلخواه روی میدان F باشد. در این صورت خود V یک زیرفضای V است. همچنین $\{0_V\}$ یک زیرفضای V است که آن را زیرفضای صفر می‌نامیم. $c.0_V + 0_V = 0_V + 0_V = 0_V$.

(ii) فضای برداری $V = F^n$ روی میدان F را در نظر بگیرید ($n \geq 2$). زیرمجموعه $W = \{(0_F, x_2, \dots, x_n) \in V \mid x_2, \dots, x_n \in F\}$ از V یک زیرفضای V است.

زیرا: $(0_F, x_2, \dots, x_n)$ و $(0_F, y_2, \dots, y_n) \in V = F^n$ و $c \in F$

$$c(0_F, x_2, \dots, x_n) + (0_F, y_2, \dots, y_n) = (\overbrace{c.0_F}^{0_F}, cx_2, \dots, cx_n) + (0_F, y_2, \dots, y_n)$$

$$= (0_F, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n) \in W$$

اما مجموعه $W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in F, x_1 = 1 + x_2\}$ یک زیرفضای V نیست.

زیرا مثلاً: $(2, 1, x_3, \dots, x_n)$ و $(4, 3, y_3, \dots, y_n) \in W_1$

ولی $(2, 1, x_3, \dots, x_n) + (4, 3, y_3, \dots, y_n) = (6, 4, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n) \notin W_1$

زیرا $6 \neq 1 + 4$.

تذکر: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. همانگونه که بیان شد 0_V به هر یک از زیرفضاهای V، تعلق دارد. یعنی اگر W زیرفضای دلخواهی از V باشد آنگاه، $0_V \in W$.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند. در این صورت $W_1 \cap W_2$ یک زیرفضای V است.

برهان: چون W_1 و W_2 زیرفضاهای V می‌باشند، لذا $0_V \in W_1$ و $0_V \in W_2$. در نتیجه $0_V \in W_1 \cap W_2$، یعنی $W_1 \cap W_2$ ناتهی است. حال فرض کنیم $x, y \in W_1 \cap W_2$ و $c \in F$ دلخواه و از این پس ثابت باشند. در این صورت $x, y \in W_1$ و $x, y \in W_2$ و چون W_1 و W_2 زیرفضا هستند، $cx+y \in W_1$ و $cx+y \in W_2$. بنابراین $cx+y \in W_1 \cap W_2$ و لذا $W_1 \cap W_2$ یک زیرفضای V است.

نتیجه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و ... و W_n زیرفضاهایی از V باشند. در این صورت $W_1 \cap \dots \cap W_n$ یک زیرفضای V است.

بطور کلی اشتراک هر خانواده از زیرفضاهای V یک زیرفضای V است. یعنی اگر $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای V باشد آنگاه، $\bigcap_{\alpha \in J} W_\alpha$ یک زیرفضای V است.

سوال: آیا اجتماع دو زیرفضای یک فضای برداری لزوماً یک زیرفضاست؟

پاسخ، این سؤال در حالت کلی منفی است. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم V فضای برداری ماتریس‌های 2×2 با درآیه‌های حقیقی باشد. در این صورت واضح است که $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ و $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ زیرفضاهایی از V می‌باشند. امّا $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V نیست. زیرا:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in W_1 \cup W_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in W_1 \cup W_2$$

ولی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

در شرایطی، اجتماع دو زیرفضا، یک زیرفضاست. قضیه زیر این شرایط را بیان می‌کند:

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند. در این صورت $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.

برهان: لزوم: فرض کنیم $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V ولی $W_1 \nsubseteq W_2$ و $W_2 \nsubseteq W_1$

روش خلف). در این صورت $x_1 \in W_1$ ① ای موجود است بطوریکه $x_1 \notin W_2$ ② و $x_2 \in W_2$ ③ ای موجود است بطوریکه $x_2 \notin W_1$ ④ . چون $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$ و $W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$ و $W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$ پس $x_1 , x_2 \in W_1 \cup W_2$. چون بنابه فرض $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضاست، پس $x_1 + x_2 \in W_1 \cup W_2$. بنابراین:

$$x_1+x_2 \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow x_1+x_2 \in W_1 \text{ یا } x_1+x_2 \in W_2$$

اگر $x_1+x_2 \in W_1$ آنگاه:

$$x_1+x_2 \in W_1 \xrightarrow[W_1 \text{ زیرفضا}]{x_1 \in W_1 \text{ و}} (-1)x_1+(x_1+x_2)=x_2 \in W_1 \; .\times. \; (\text{با } ④)$$

اگر $x_1+x_2 \in W_2$ آنگاه:

$$x_1+x_2 \in W_2 \xrightarrow[W_2 \text{ زیرفضاست}]{x_2 \in W_2 \text{ و}} (-1)x_2+(x_1+x_2)=x_1 \in W_2 \; .\times. \; (\text{با } ②)$$

به این ترتیب فرض خلف، باطل و حکم ثابت شد لذا یعنی $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.

کفایت: اگر $W_1 \subseteq W_2$ آنگاه $W_1 \cup W_2 = W_2$ که زیرفضاست.

اگر $W_2 \subseteq W_1$ آنگاه $W_1 \cup W_2 = W_1$ که زیرفضاست.

مجموع زیرفضاها: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 زیرمجموعه‌هایی از V باشند. W_1+W_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_1+W_2=\{x_1+x_2 \mid x_1 \in W_1 , x_2 \in W_2\}$$

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند. دراین صورت: (۱) W_1+W_2 یک زیرفضای V است که شامل هر یک از W_1 و W_2 است. یعنی $W_1 \subseteq W_1+W_2$ و $W_2 \subseteq W_1+W_2$.

(۲) هر زیرفضای V که شامل W_1 و W_2 باشد، شامل W_1+W_2 نیز می‌باشد. به عبارت دیگر W_1+W_2 کوچکترین زیرفضایی از V است که شامل W_1 و W_2 می‌باشد.

برهان: (۱) چون W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V می‌باشند، لذا $0_V \in W_1$ و $0_V \in W_2$ و درنتیجه:

$$0_V = \overset{\in W_1}{0_V} + \overset{\in W_2}{0_V} \in W_1+W_2 \Rightarrow W_1+W_2 \neq \emptyset$$

حال فرض کنیم $x,y \in W_1+W_2$ و $c \in F$. دراین صورت می‌توان نوشت $x = x_1+x_2$ و $y = y_1+y_2$ که در آن $x_1,y_1 \in W_1$ و $x_2,y_2 \in W_2$.

لذا:

$$cx+y = c(x_1+x_2)+(y_1+y_2) = \underbrace{(cx_1+y_1)}_{\in W_1}+\underbrace{(cx_2+y_2)}_{\in W_2} \in W_1+W_2$$

درنتیجه W_1+W_2 یک زیرفضای V است. حال ثابت می‌کنیم $W_1 \subseteq W_1+W_2$ و $W_2 \subseteq W_1+W_2$. برای هر $t_1 \in W_1$ می‌توان نوشت:

$$t_1 = \underbrace{t_1}_{\in W_1} + \underbrace{0_V}_{\in W_2} \in W_1+W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_1+W_2$$

به همین ترتیب برای هر $t_2 \in W_2$ می‌توان نوشت:

$$t_2 = \underbrace{0_V}_{\in W_1} + \underbrace{t_2}_{\in W_2} \in W_1+W_2 \Rightarrow W_2 \subseteq W_1+W_2$$

ز) فرض کنیم W زیرفضایی از V شامل W_1 و W_2 باشد. یعنی $W_1 \subseteq W$ و $W_2 \subseteq W$. می‌خواهیم ثابت کنیم $W_1 + W_2 \subseteq W$. فرض کنیم $x \in W_1 + W_2$. در این صورت $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$ ای موجودند که $x = x_1 + x_2$. چون $W_1 \subseteq W$ و $W_2 \subseteq W$ پس $x_1, x_2 \in W$ و لذا $x \in W$. یعنی $W_1 + W_2 \subseteq W$.

مثال: فرض کنیم V فضای برداری تمام ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ و $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ زیرفضاهایی از V می‌باشند. داریم $V = W_1 + W_2$، زیرا هر ماتریس از V مانند $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in W_2}$$

مجموع مستقیم: فضای برداری V روی میدان F را مجموع مستقیم زیرفضاهای W_1 و W_2 از V نامیم و با $V = W_1 \oplus W_2$ نمایش می‌دهیم، هرگاه $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ و $V = W_1 + W_2$. در این حالت هر یک از W_1 و W_2 یک جمعوند مستقیم V نامیده می‌شوند.

مثال: زیرفضاهای $W_1 = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in F^n \mid a_n = 0\}$ و

و $W_2=\{(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)\in F^n \mid a_1=\dots=a_{n-1}=0\}$ از F^n را در نظر بگیرید.

در این صورت $F^n=W_1\oplus W_2$. زیرا:

$$W_1\cap W_2=\{\underbrace{(0,\dots,0)}_{n \text{ تایی مرتب}}\}$$

و به ازای هر $(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)\in F^n$

$$(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)=\underbrace{(a_1,\dots,a_{n-1},0)}_{\in W_1}+\underbrace{(0,\dots,0,a_n)}_{\in W_2}$$

تمرین: ۱- فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند. ثابت کنید $V=W_1\oplus W_2$ اگر و فقط اگر به ازای هر $0\neq x\in V$ بردارهای منحصر به فرد $x_1\in W_1$ و $x_2\in W_2$ موجود باشند به طوری که $x=x_1+x_2$.

۲- فرض کنید V فضای برداری تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با اعمال جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر توابع و V_e و V_o به ترتیب مجموعهٔ توابع زوج و فرد باشند. ثابت کنید V_e و V_o زیرفضاهای V بوده و $V=V_e\oplus V_o$.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. بردار $x\in V$ یک ترکیب خطی بردارهای x_1 و ... و x_n از V نامیده می‌شود هرگاه اسکالرهایی مانند c_1 و ... و c_n از F موجود باشند به طوری که $x=c_1x_1+\dots+c_nx_n=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$.

اگر S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد، بردار $x\in V$ را یک ترکیب خطی از اعضای S

نایم هرگاه تعدادی متناهی از بردارهای که مانند x_1 و ... و x_n و اسکالرهایی مانند c_1 و ... و c_n موجود باشند بطوریکه $x=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$.

در این صورت گوئیم x ترکیب خطی از بردارهای x_1 و ... و x_n است و c_1 و ... و c_n را ضرایب این ترکیب خطی گوئیم.

<u>مثال</u>: آیا بردار $x=(1,1,4)\in\mathbb{R}^3$ ترکیب خطی از بردارهای $x_1=(1,2,-1)\in\mathbb{R}^3$ و $x_2=(3,5,2)\in\mathbb{R}^3$ است؟ بردار $y=(1,5,1)$ چطور؟

<u>حل</u>:

$$x=c_1x_1+c_2x_2 \Rightarrow (1,1,4)=c_1(1,2,-1)+c_2(3,5,2)$$

$$\Rightarrow (1,1,4)=(c_1,2c_1,-c_1)+(3c_2,5c_2,2c_2)$$

$$\Rightarrow (1,1,4)=(c_1+3c_2,\ 2c_1+5c_2,\ -c_1+2c_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+3c_2=1 \\ 2c_1+5c_2=1 \\ -c_1+2c_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

بردار x ترکیب خطی از x_1 و x_2 است.

$$y=d_1x_1+d_2x_2 \Rightarrow (1,5,1)=d_1(1,2,-1)+d_2(3,5,2)$$

$$\Rightarrow (1,5,1)=(d_1,2d_1,-d_1)+(3d_2,5d_2,2d_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1+3d_2=1 \\ 2d_1+5d_2=5 \\ -d_1+2d_2=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -۲R_۱+R_۲ \\ R_۱+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۲ \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} R_۱ \\ -R_۲ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{array}{c} -۳R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ -۵R_۲+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱۷ \end{bmatrix}$

بنابراین دستگاه فوق با دستگاه $\begin{cases} d_۱ = ۱۰ \\ d_۲ = -۳ \\ ۰ = ۱۷ \end{cases}$ هم ارز است. امّا این دستگاه ناسازگار است. پس نمی‌توان v را به صورت ترکیبی خطی از $v_۱$ و $v_۲$ نوشت.

<u>قضیه</u>: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. در این صورت مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S یک زیرفضای V است.

<u>برهان</u>: فرض کنیم W مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S باشد. فرض کنیم $x, y \in W$ و $c \in F$. در این صورت بردارهایی مانند x_1 و ... و x_m و y_1 و ... و y_n از S و اسکالرهایی مانند a_1 و ... و a_m و b_1 و ... و b_n موجودند به طوری که $x = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$ و $y = b_1y_1 + \cdots + b_ny_n$. در نتیجه

$$cx+y = (ca_1)x_1 + \cdots + (ca_m)x_m + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n$$

یعنی $cx+y \in W$ و لذا W یک زیرفضای V است.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. زیرفضای شامل کلیه ترکیبات خطی از اعضای S را زیرفضای تولید شده (پدید آمده) توسط S نامیده و با نماد $span(S)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که $S \subseteq span(S)$.

به عبارت دیگر: $span(S)=\{a_1x_1+\dots+a_nx_n \mid n\in \mathbb{N}, x_i\in S, a_i\in F, 1\leq i\leq n\}$

مثال: زیرفضای تولید شده توسط $S=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ از $\mathbb{R}^3$ عبارت است از:

$$span(S)=\{a(1,0,0)+b(0,1,0) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,b,0) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

مثال: زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ از $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ عبارت است از:

$$span(S)=\left\{a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه ناتهی S از V، کوچکترین زیرفضای V است که S را در بر دارد.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و S زیر مجموعه‌ای ناتهی از V باشد. گوئیم S فضای V را تولید می‌کند یا پدید می‌آورد هرگاه $Span(S)=V$.

همچنین در این صورت گفته می‌شود S بطور خطی فضای V را تولید می‌کند.

مثال: مجموعه $S=\{(1,0),(0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^2$ فضای $\mathbb{R}^2$ را تولید می‌کند. زیرا:

$$Span(S)=\{a(1,0)+b(0,1) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$$

مثال: مجموعه $S=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند. زیرا هر بردار $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از اعضای S نوشت. یعنی اسکالرهایی مانند r و s و t موجودند بطوریکه

$$(a_1,a_2,a_3)=r(1,1,0)+s(1,0,1)+t(0,1,1)$$

به عبارت دیگر دستگاه $\begin{cases} r+s=a_1 \\ r+t=a_2 \\ s+t=a_3 \end{cases}$ دارای جواب است. این

جواب عبارت است از:

$$\begin{cases} r=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3) \\ s=\frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3) \\ t=\frac{1}{2}(-a_1+a_2+a_3) \end{cases}.$$

مثال: ماتریس‌های $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ فضای برداری $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را تولید می‌کنند. زیرا به ازاء هر ماتریس دلخواه $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ از $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r+s+t=a \\ r+s+u=b \\ r+t+u=c \\ s+t+u=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\frac{۱}{۳}a+\frac{۱}{۳}b+\frac{۱}{۳}c-\frac{۲}{۳}d \\ s=\frac{۱}{۳}a+\frac{۱}{۳}b-\frac{۲}{۳}c+\frac{۱}{۳}d \\ t=\frac{۱}{۳}a-\frac{۲}{۳}b+\frac{۱}{۳}c+\frac{۱}{۳}d \\ u=-\frac{۲}{۳}a+\frac{۱}{۳}b+\frac{۱}{۳}c+\frac{۱}{۳}d \end{cases}$$

وابستگی خطی و استقلال خطی:

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشند. بردارهای x_1 و ... و x_n از V وابسته خطی نامیده می‌شوند، هرگاه اسکالرهایی مانند a_1 و ... و a_n از F که حداقل یکی از آنها ناصفر است، موجود باشند بطوریکه $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$.

به عبارت دیگر، زیرمجموعه S از فضای برداری V، وابسته خطی نامیده می‌شود هرگاه تعدادی متناهی بردار متمایز x_1 و ... و x_n در S و اسکالرهایی مانند a_1 و ... و a_n در F که حداقل یکی از آنها ناصفر است موجود باشند بطوریکه $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$.

فرض کنیم $x_1, \dots, x_n \in V$. داریم $0x_1+\cdots+0x_n=0$.

این ترکیب خطی را ترکیب خطی بدیهی بردارهای x_1 و ... و x_n (یا نمایش بدیهی بردار صفر) می‌نامیم. اگر اسکالرهایی مانند a_1 و ... و a_n از F که حداقل

یکی از آنها ناصفر است موجود باشند بطوریکه ($a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$

این ترکیب خطی را یک ترکیب خطی نابدیهی x_1 و ... و x_n برای بردار صفر نامیم

(نمایش نابدیهی بردار صفر از بردارهای x_1 و ... و x_n).

به این ترتیب می‌توان گفت: بردارهای $x_1,\dots,x_n\in V$ وابسته خطی اند

هرگاه حداقل یک ترکیب خطی نابدیهی از x_1 و ... و x_n برای بردار صفر

وجود داشته باشد.

<u>تذکر</u>: هر زیرمجموعه از یک فضای برداری که بردار صفر را در بر داشته باشد،

وابسته خطی است (به عبارت دیگر هر مجموعه شامل بردار صفر وابسته خطی است).

زیرا $1.0=0$ و لذا: $0x_1+\dots+0x_{i-1}+1.0+0x_{i+1}+\dots+0x_n=0$

یک ترکیب خطی نابدیهی از x_1 و ... و x_n برای بردار صفر است.

<u>مثال</u>: آیا بردارهای $(1,1,0)$ و $(1,3,2)$ و $(4,9,5)$ از $\mathbb{R}^3$ وابسته

خطی اند؟

<u>حل</u>:

$$a_1(1,1,0)+a_2(1,3,2)+a_3(4,9,5)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (a_1+a_2+4a_3,\ a_1+3a_2+9a_3,\ 2a_2+5a_3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2+4a_3=0 \\ a_1+3a_2+9a_3=0 \\ 2a_2+5a_3=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی دستگاه

ماتریس افزوده
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ٤ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -R_۱+R_۲ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ٤ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ \frac{۱}{۲}R_۲ \\ R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ٤ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۵}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} -R_۲+R_۱ \\ R_۲ \\ -۲R_۲+R_۳ \end{array} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۵}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_۱ + \frac{۳}{۲} a_۳ = ۰ \\ a_۲ + \frac{۵}{۲} a_۳ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{a_۳ = t} \begin{cases} a_۱ = -\frac{۳}{۲} t \\ a_۲ = \frac{-۵}{۲} t \\ a_۳ = t \end{cases} \xrightarrow{t=-۲} \begin{cases} a_۱ = ۳ \\ a_۲ = ۵ \\ a_۳ = -۲ \end{cases}$$

پس بردارهای فوق وابسته خطی اند.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و $x_۱$، ... ، x_n بردارهایی از V باشند. در این صورت $x_۱$، ... ، x_n وابسته خطی اند اگر و فقط اگر یکی از این بردارها را بتوان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت.

برهان: لزوم - فرض کنیم $x_۱$، ... ، x_n وابسته خطی باشند. در این صورت اسکالرهایی مانند $a_۱, \dots, a_n \in F$ که حداقل یکی از آنها ناصفر است (مثلاً $a_i \neq ۰$) موجودند به طوری که

$$a_۱ x_۱ + \cdots + a_{i-۱} x_{i-۱} + \underline{a_i x_i} + a_{i+۱} x_{i+۱} + \cdots + a_n x_n = ۰$$

$$\Rightarrow a_i x_i = (-a_1)x_1 + \dots + (-a_{i-1})x_{i-1} + (-a_{i+1})x_{i+1} + \dots + (-a_n)x_n$$

طرفین را در $\frac{1}{a_i}$

$$\Rightarrow x_i = \left(\frac{-a_1}{a_i}\right)x_1 + \dots + \left(\frac{-a_{i-1}}{a_i}\right) + \left(\frac{-a_{i+1}}{a_i}\right)x_{i+1} + \dots + \left(\frac{-a_n}{a_i}\right)x_n$$

بنابراین x_i ترکیب خطی از بقیه است.

کفایت: فرض کنیم یکی از این بردارها مثلاً x_k را بتوان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت. یعنی اسکالرهایی مانند $c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n$ موجود باشند بطوریکه:

$$x_k = c_1x_1 + \dots + c_{k-1}x_{k-1} + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n$$

در این صورت:

$$c_1x_1 + \dots + c_{k-1}x_{k-1} + \underline{(-1)x_k} + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n = 0$$

چون ضریب x_k (یعنی -1) مخالف صفر است، پس بردارهای x_1 و ... و x_n وابسته خطی اند.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعه $S \subseteq V$ مستقل خطی نامیده می‌شود (یا اعضای آن که مستقل خطی اند) هرگاه وابسته خطی نباشد. به عبارت دیگر $x_1, \dots, x_n \in V$ مستقل خطی اند اگر و فقط اگر بردار صفر، جز نمایش بدیهی x_1 و ... و x_n، نمایش دیگری نداشته باشد. بطوریکه:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$$

$\rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0 \Rightarrow$ x_1 و ... و x_n مستقل خطی اند

$\rightarrow$ اگر حداقل یکی از c_1 و ... و c_n مخالف صفر باشند آنگاه: x_1 و ... و x_n وابسته خطی اند.

مثال: وابستگی خطی یا استقلال خطی بردارهای $x_1=(1,3,-4,2)$ و

$x_2=(2,2,-4,0)$ و $x_3=(1,-3,2,-4)$ و $x_4=(-1,0,1,0)$

از $\mathbb{R}^4$ را بررسی کنید.

حل: $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0 \longrightarrow (0,0,0,0)$ بردار صفر $\mathbb{R}^4$ یعنی

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+c_3-c_4=0 \\ 3c_1+2c_2-3c_3=0 \\ -4c_1-4c_2+2c_3+c_4=0 \\ 2c_1-4c_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1=4 \\ c_2=-3 \\ c_3=2 \\ c_4=0 \end{cases}$$

پس این بردارهای x_1، ...، x_4 وابسته خطی اند.

مثال: نشان دهید بردارهای $(1,0,-1)$ و $(2,1,2)$ و $(3,-2,0)$

از $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی اند.

حل: $c_1(1,0,-1)+c_2(2,1,2)+c_3(3,-2,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow (c_1,0,-c_1)+(2c_2,c_2,2c_2)+(3c_3,-2c_3,0)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+3c_3=0 \\ c_2-2c_3=0 \\ -c_1+2c_2=0 \end{cases}$$

تنها جواب این دستگاه جواب بدیهی یعنی $c_1=c_2=c_3=0$ است.

در نتیجه بردارهای فوق مستقل خطی اند.

مثال: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و α و β و γ سه بردار مستقل خطی در V باشند. نشان دهید $\alpha+\beta$ ، $\beta+\gamma$ و $\gamma+\alpha$ نیز مستقل خطی اند

حل:

$$c_1(\alpha+\beta)+c_2(\beta+\gamma)+c_3(\gamma+\alpha)=0$$

$$\Rightarrow c_1\alpha+c_1\beta+c_2\beta+c_2\gamma+c_3\gamma+c_3\alpha=0$$

$$\Rightarrow (c_1+c_3)\alpha+(c_1+c_2)\beta+(c_2+c_3)\gamma=0$$

$$\xrightarrow[\text{خطی اند}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ و } \gamma \text{ مستقل}} \begin{cases} c_1+c_3=0 \\ c_1+c_2=0 \\ c_2+c_3=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ -R_1+R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ -R_2+R_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} -R_3+R_1 \\ R_3+R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

دستگاه فوق با دستگاه $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \end{cases}$ هم ارز است. لذا بردارهای $\alpha+\beta$ ، $\beta+\gamma$ و $\gamma+\alpha$ مستقل خطی اند.

چند نکته : (i) $\emptyset$ مستقل خطی است ، زیرا مجموعه‌های وابسته خطی باید ناتهی باشند .

(ii) مجموعه‌ای که تنها از یک بردار ناصفر مانند x تشکیل شده باشد، مستقل خطی است . زیرا اگر $\{x\}$ وابسته خطی باشد ، به ازای اسکالری ناصفر مانند a ، $ax=0$. لذا :

$$a.x=0 \Rightarrow a^{-1}(a.x)=a^{-1}.0 \Rightarrow (a^{-1}a)x=0 \Rightarrow 1x=0 \Rightarrow x=0 \divideontimes$$

(iii) یک مجموعه مستقل خطی است اگر و فقط اگر تنها نمایش صفر به عنوان ترکیب خطی از اعضای آن، نمایش بدیهی باشد یا به عبارت دیگر ۰ ترکیب خطی غیر بدیهی از اعضای مجموعه نداشته باشد .

قضیه : فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. در این صورت : (i) اگر S_1 وابسته خطی باشد، S_2 نیز وابسته خطی است (به عبارت دیگر هر مجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است) .

(ii) اگر S_2 مستقل خطی باشد، S_1 نیز مستقل خطی است (به عبارت دیگر هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است) .

برهان : (i) فرض کنیم S_1 وابسته خطی باشد . در این صورت بردارهای متمایز u_1 ، ... ، u_n از S_1 و اسکالرهای a_1 ، ... ، a_n که حداقل یکی از آنها

ناصفر است، موجودند بطوریکه $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$.

چون $S_1\subseteq S_2$، بردارهای $x_1, \dots, x_n$ را می‌توان بعنوان بردارهایی از S_2 در نظر گرفت ولذا S_2 که وابسته خطی است.

(ii) فرض کنیم S_1 مستقل خطی نباشد (فرض خلف). در این صورت S_1 وابسته خطی است ولذا بنا به (i)، S_2 نیز وابسته خطی است که یک تناقض است.

تمرین: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. در این صورت S مستقل خطی است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی باشد.

برهان: لزوم - فرض کنیم S مستقل خطی باشد. در این صورت بنا به قضیه فوق (قسمت (ii)) هر زیرمجموعه S و از جمله هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی است.

کفایت: فرض کنیم هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم S مستقل خطی است. فرض کنیم S مستقل خطی نباشد (فرض خلف). در این صورت S وابسته خطی است ولذا بردارهایی مانند $x_1, \dots, x_n\in S$ و اسکالرهایی مانند $a_1, \dots, a_n\in F$ که حداقل یکی از آنها ناصفر است موجودند بطوریکه $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$. یعنی $\{x_1, \dots, x_n\}$ وابسته خطی است که با فرض در تناقض است.

پایه و بعد فضاهای برداری

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعه B از V را یک پایه (مبنا) برای فضای برداری V نامیم هرگاه B مستقل خطی باشد و فضای V را تولید کند یعنی $Span(B)=V$ (هر بردار از V را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای B نوشت).

چند مثال از پایه: (i) فضای برداری $V=F^n$ روی میدان F را در نظر بگیرید

$$B=\{e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots, e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0),\dots, e_n=(0,0,\dots,0,1)\}$$

مؤلفه iام

یک پایه برای $V=F^n$ است که به پایه استاندارد موسوم است. زیرا:

$$a_1e_1+\dots+a_ne_n=(0,\dots,0)\Rightarrow(a_1,0,\dots,0)+\dots+(0,0,\dots,0,a_n)=(0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow(a_1,\dots,a_n)=(0,\dots,0)\Rightarrow a_1=\dots=a_n=0\Rightarrow$$ $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ مستقل خطی است

همچنین به ازای هر $(c_1,\dots,c_n)\in F^n$ می‌توان نوشت:

$$(c_1,\dots,c_n)=c_1e_1+\dots+c_ne_n\Rightarrow V=Span(B)$$

یعنی $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه F^n است.

(ii) فرض کنیم $V=M_{m\times n}(F)$ فضای برداری مجموعه ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌های موجود در میدان F باشد. فرض کنیم M_{ij} ماتریسی را نشان دهد که تنها درایه ناصفر آن 1 است و در سطر iام و ستون jام قرار دارد.

در این صورت $B=\{M_{ij} \mid 1\le i\le m \text{ و } 1\le j\le n\}$

پایه‌ای برای فضای برداری $V=M_{m\times n}(F)$ است. به عنوان مثال:

$$B=\{M_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, M_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, M_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, M_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, M_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\}$$

یک پایه برای $V=M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ می‌باشد.

(iii) فرض کنیم $V=P_n(F)$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n با ضرایب موجود در میدان F می‌باشد. در این صورت $B=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ یک پایه برای $V=P_n(F)$ است که آن را پایه استاندارد $V=P_n(F)$ می‌نامیم.

زیرا: $a_0\cdot 1+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=0$ ، $a_0,a_1,\dots,a_n\in F$

$\Rightarrow a_0=a_1=\dots=a_n=0 \Rightarrow$ $B=\{1,x,\dots,x^n\}$ مستقل خطی است

همچنین به ازای هر $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m\in V=P_n(F)$ $(m\le n)$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=b_0\cdot 1+b_1x+\dots+b_mx^m+0x^{m+1}+\dots+0x^n$$

$$\Rightarrow Span(B)=P_n(F)$$

اکنون مثالی از یک پایه نامتناهی می‌آوریم.

(iv) فرض کنیم $V=P(F)$ فضای برداری همه چندجمله‌ای‌های روی F را با ضرایب موجود در میدان F می‌باشد. ادعا می‌کنیم $B=\{1,x,x^2,\dots\}$ پایه‌ای

برای V است. و مشخصاً این مجموعه، V را تولید می‌کند. حال ثابت می‌کنیم B مستقل خطی است. برای این منظور کافی است نشان دهیم به ازای هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی $\{1, x, \ldots, x^n\}$ مستقل خطی است. فرض کنیم $c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$. این بدین معناست که هر $x \in F$ یک ریشه‌ی چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ است. می‌دانیم که یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط از درجه‌ی n، نمی‌تواند بیش از n ریشه‌ی متمایز داشته باشد. لذا باید $f(x)$ یک چندجمله‌ای صفر باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(۲) نشان دهید $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که B مستقل خطی است. برای این منظور فرض کنیم $c_1(1,0,0) + c_2(1,1,0) + c_3(1,1,1) = (0,0,0)$. در این صورت:

$$(c_1,0,0) + (c_2,c_2,0) + (c_3,c_3,c_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (c_1+c_2+c_3, c_2+c_3, c_3) = (0,0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$$ B مستقل خطی است.

برای اینکه نشان دهیم B، فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند، باید به ازای هر $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ نشان دهیم اعدادی مانند r و s و t موجودند به طوری که:

$$(a,b,c) = r(1,0,0) + s(1,1,0) + t(1,1,1)$$

یا به طور معادل:

$$(a,b,c) = (r+s+t, s+t, t)$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} r+s+t=a \\ s+t=b \\ t=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=a-b \\ s=b-c \\ t=c \end{cases}$$

یعنی : $(a,b,c)=(a-b)(1,0,0)+(b-c)(1,1,0)+c(1,1,1)$.

لذا $\mathbb{R}^3=\mathrm{Span}(B)$ و در نتیجه B یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و $B=\{x_1,\dots,x_n\}$ زیر مجموعه‌ای از V باشد. در این صورت B پایه‌ای برای V است اگر و فقط اگر به ازای هر $x\in V$، اسکالرهای منحصر به فرد a_1 و ... و a_n موجود باشند بطوریکه $x=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ (به عبارت دیگر B پایه‌ای برای V است اگر و فقط اگر هر $x\in V$ را بتوان به شکل منحصر به فرد به صورت ترکیب خطی از بردارهای B نوشت).

برهان: لزوم - فرض کنیم $B=\{x_1,\dots,x_n\}$ پایه‌ای برای V و $x\in V$ دلخواه ولی ثابت باشد. چون B یک پایه V است پس $V=\mathrm{Span}(B)$ و لذا اسکالرهایی مانند $a_1,\dots,a_n\in F$ موجودند بطوریکه $x=a_1x_1+\dots+a_nx_n$. برای اثبات منحصر به فرد بودن a_1 و a_2 و ... و a_n، فرض کنیم اسکالرهایی مانند b_1 و ... و b_n موجود باشند بطوریکه $x=b_1x_1+\dots+b_nx_n$. در این صورت :

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n=b_1x_1+\dots+b_nx_n \Rightarrow (a_1-b_1)x_1+\dots+(a_n-b_n)x_n=0$$

$\xRightarrow[\text{پایه برای } V \text{ و لذا مستقل خطی است}]{B=\{x_1,\cdots,x_n\} \text{ یک}} a_1-b_1=0,\cdots, a_n=b_n=0 \Rightarrow a_1=b_1,\cdots, a_n=b_n$

کفایت: فرض کنیم $B=\{x_1,\cdots,x_n\}$ زیرمجموعه‌ای از V باشد بطوریکه هر $x\in V$ را بتوان به شکل منحصربفرد به صورت $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ نوشت. دراین صورت واضح است که $V=Span(B)$. برای اثبات مستقل خطی بودن B فرض کنیم $c_1x_1+\cdots+c_nx_n=0$ $(c_1,\cdots,c_n\in F)$. از طرفی $0x_1+\cdots+0x_n=0$. بنابراین بردار 0 به صورت دو ترکیب خطی از x_1، ... و x_n نوشته شده است. لذا بنابر فرض باید داشته باشیم $c_1=\cdots=c_n=0$. یعنی B مستقل خطی و لذا پایه‌ای برای V است.

تعریف: فضای برداری V (روی میدان F) را متناهی البعد (با بعد متناهی) گوییم هرگاه تعدادی متناهی از بردارهای V بتوانند آن را تولید کنند.

دراین قسمت ثابت می‌کنیم، هر فضای برداری که توسط تعدادی متناهی بردار تولید شود، دارای یک پایه‌ی متناهی است. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم:

لم: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و $S=\{x_1,\cdots,x_n\}$ زیرمجموعه‌ای وابسته‌ی خطی از V باشد بطوریکه $V=Span(S)$. دراین صورت با حذف بردار مناسبی از S مثل x_i می‌توانیم مجموعه‌ی

$S_i=\{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n\}$ را بدست آوریم، آنگاه هم V را تولید می‌کند یعنی $V=\text{Span}(S_i)$.

برهان: چون بردارهای $x_1,\dots,x_n$ وابسته خطی‌اند، لذا یکی از این بردارها، مثلاً x_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت، یعنی اسکالرهایی مانند $b_1,\dots,b_{i-1},b_{i+1},\dots,b_n$ موجودند بطوریکه:

$$x_i=b_1x_1+\cdots+b_{i-1}x_{i-1}+b_{i+1}x_{i+1}+\cdots+b_nx_n \quad ①$$

حال فرض کنیم $x\in V$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. چون $V=\text{Span}(S)$ پس اسکالرهای $a_1,\dots,a_n$ موجودند بطوریکه:

$$x=a_1x_1+\cdots+a_{i-1}x_{i-1}+\underline{a_ix_i}+a_{i+1}x_{i+1}+\cdots+a_nx_n$$

اگر در تساوی اخیر به جای x_i مقدارش را از ① قرار دهیم، x به صورت ترکیب خطی از $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ نوشته می‌شود و لذا $V=\text{Span}(S_i)$.

با استفاده از لم فوق می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد (با بعد متناهی) روی میدان F باشد. در این صورت V دارای یک پایهٔ متناهی است.

برهان: فرض کنیم $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ فضای V را تولید کند، یعنی $V=\text{Span}(S)$. اگر این مجموعه مستقل خطی باشد، یک پایه است و برهان

تمام است. اگر این مجموعه، یعنی S، مستقل خطی نباشد، وابسته خطی است و لذا بنا به لم فوق می‌توان برداری از این مجموعه حذف کرد و مجموعه‌ای کوچکتر بدست آورد که آن هم V را تولید می‌کند. اگر این مجموعهٔ جدید مستقل خطی باشد، برهان تمام است. زیرا در این صورت یک پایهٔ متناهی داریم. اگر مستقل خطی نباشد، می‌توانیم با زهم (بنا به لم فوق) مجموعهٔ کوچکتری بدست آوریم که V را تولید می‌کند. با ادامهٔ این روند، بالاخره به یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌رسیم که V را تولید می‌کند. لذا این مجموعه یک پایه برای V (یا پایهٔ متناهی) بوده و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $S=\{x_1, \ldots, x_n\}$ فضای V را تولید کند. در این صورت زیرمجموعه‌ای از S یک پایه برای V است.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک پایهٔ n عضوی برای V باشد. اگر $\{y_1, \ldots, y_m\}$ مجموعه‌ای از m بردار مستقل خطی در V باشد، آنگاه $m \leq n$.

قضیهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود:

« فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F با پایه‌ای n عضوی و $\{y_1, \ldots, y_m\}$ زیرمجموعه‌ای از V باشد بطوریکه $m > n$. در این صورت

بردارهای y_1 و ... و y_m وابستهٔ خطی اند. »

از قضیهٔ فوق بلافاصله، قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F باشد. در این صورت هر دو پایه از V، تعداد مساوی (و متناهی) عضو دارند.

برهان: فرض کنیم $B=\{x_1,\dots,x_m\}$ و $B'=\{y_1,\dots,y_n\}$ دو پایه برای فضای برداری متناهی البعد V باشند. چون B یک پایه و B' یک مجموعهٔ مستقل خطی است، بنابر قضیهٔ فوق $n\leq m$ ①. به همین ترتیب چون B' یک پایه و B یک مجموعهٔ مستقل خطی است، بنابر قضیهٔ فوق $m\leq n$ ②. از ① و ② نتیجه می‌شود $m=n$.

قضیهٔ فوق به ما اجازه می‌دهد که بعد یک فضای برداری را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F باشد. بعد V را با نماد $\dim V$ نمایش داده و آن را تعداد اعضای هر یک از پایه‌های V تعریف می‌کنیم.

چند مثال از بعد: (i) دیدیم که $B=\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ پایه‌ای برای F^n است. لذا $\dim F^n=n$.

(ii) چون $\underbrace{\{1, x, \dots, x^n\}}_{n+1 \text{ عضو}}$ را یک پایه برای $P_n(F)$ است پس $\dim P_n(F)=n+1$.

(iii) دیدیم که $B=\{M_{ij} \mid 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\}$ یک پایه برای فضای $V=M_{m\times n}(F)$ روی میدان F است. لذا $\dim M_{m\times n}(F)=mn$.

بخصوص $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R})=4$.

نکته: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $\dim V=n$. در این صورت:

(i) هر زیرمجموعه V که شامل بیش از n عضو باشد، وابسته خطی است.

(ii) هیچ زیرمجموعه‌ای از V که کمتر از n عضو داشته باشد، نمی‌تواند V را تولید کند.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $S=\{x_1, \dots, x_m\}\subseteq V$ فضای V را تولید کند. در این صورت $\dim V\leq m$.

برهان: بنابر نتیجهٔ خوانده شده، زیرمجموعه‌ای از $S=\{x_1, \dots, x_m\}$ ، پایه‌ای برای V است. اما $\dim V$ تعداد اعضای هر زیرمجموعه‌ای از V است که پایه باشد و لذا $\dim V\leq m$.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F ، S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V و β عضوی از V باشد بطوریکه $\beta\notin Span(S)$. در این صورت $S\cup\{\beta\}$ مستقل خطی است.

برهان: فرض کنیم α_1 و α_2 و ... و α_m بردارهای متمایزی از S باشند و $c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m+b\beta=0$. ادعا می‌کنیم $b=0$. زیرا در غیر این صورت (یعنی اگر $b\neq 0$) داریم:

$$b\beta=(-c_1)\alpha_1+\cdots+(-c_m)\alpha_m \Rightarrow \beta=\left(\frac{-c_1}{b}\right)\alpha_1+\cdots+\left(\frac{-c_m}{b}\right)\alpha_m$$

$$\Rightarrow \beta\in Span(S)\ .\dot{\times}.$$

لذا $c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m=0$ و چون S مستقل خطی است پس $c_1=\cdots=c_m=0$. بنابراین $c_1=\cdots=c_m=b=0$. یعنی $S\cup\{\beta\}$ مستقل خطی است.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری غیر صفر متناهی البعد با بعد n باشد ($\dim V=n$). در این صورت هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V را می‌توان به پایه‌ای برای V توسعه داد.

برهان: فرض کنیم S_0 زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V باشد. چون V با بعد متناهی است و $\dim V=n$، لذا S_0 حداکثر دارای n عضو است. حال به روش زیر S_0 را به پایه‌ای برای V توسعه می‌دهیم. اگر S_0 فضای V را تولید کند آنگاه S_0 یک پایهٔ V است و برهان تمام است. اگر S_0 فضای V را تولید نکند (یعنی $V\neq Span(S_0)$) می‌توان برداری مانند $\beta_1\in V$ یافت بطوریکه $\beta_1\notin Span(S_0)$ و لذا بنا به قضیهٔ قبل $S_1=S_0\cup\{\beta_1\}$ مستقل خطی باشد.

اگر این فضای V را تولید کند، یک پایه برای V است و برهان تمام است. در غیر این صورت باز بنا به قضیهٔ قبل می‌توان برداری مانند β_2 در V یافت بطوریکه $S_2 = S_1 \cup \{\beta_2\} = S_0 \cup \{\beta_1, \beta_2\}$ مستقل خطی باشد. با ادامهٔ این فرآیند (طی حداکثر $n - |S_0|$ مرحله) به مجموعهٔ $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ می‌رسیم که پایه‌ای برای V است.

نتیجه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی‌البعد روی میدان F و W زیرفضای سره از V باشد (یعنی $W \subsetneq V$). در این صورت W با بعد متناهی است و $\dim W < \dim V$.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و W_1 و W_2 دو زیرفضای با بعد متناهی V باشند. در این صورت $W_1 + W_2$ با بعد متناهی است و

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$$

(یا معادلاً $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$).

برهان: بنا به نتیجهٔ فوق، فضای $W_1 \cap W_2$ یک پایهٔ متناهی $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ دارد. این پایه را به عنوان مجموعهٔ مستقل خطی در V می‌توان به پایه‌ای مانند $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$ برای W_1 و نیز به پایه‌ای مانند $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ برای W_2 توسیع داد. ثابت می‌کنیم

$D=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_m,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ یک پایه برای W_1+W_2 است.

ابتدا ثابت میکنیم D مستقل خطاست. برای این منظور فرض کنیم:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j + \sum_{t=1}^{n} c_t\gamma_t = 0 \quad (a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_m,c_1,\dots,c_n\in F)$$

در این صورت

$$\sum_{t=1}^{n} c_t\gamma_t = \sum_{i=1}^{k}(-a_i)\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}(-b_j)\beta_j \in W_1$$

از طرفی:

$$\sum_{t=1}^{n} c_t\gamma_t = c_1\gamma_1+\dots+c_n\gamma_n = 0\alpha_1+\dots+0\alpha_k+c_1\gamma_1+\dots+c_n\gamma_n \in W_2$$

بنابراین $\sum_{t=1}^{n} c_t\gamma_t \in W_1\cap W_2$ و لذا به ازاء اسکالرهای معین مانند $d_1,\dots,d_k\in F$ میتوان نوشت:

$$\sum_{t=1}^{n} c_t\gamma_t = d_1\alpha_1+\dots+d_k\alpha_k \Rightarrow d_1\alpha_1+\dots+d_k\alpha_k+(-c_1)\gamma_1+\dots+(-c_n)\gamma_n=0$$

$$\xrightarrow[\text{مستقل خطاست}]{C=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}} d_1=\dots=d_k=\boxed{c_1=\dots=c_n=0}$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j = 0$ و لذا:

$$a_1\alpha_1+\dots+a_k\alpha_k+b_1\beta_1+\dots+b_m\beta_m=0$$

$$\xrightarrow[\text{مستقل خطی}]{B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_m\}} a_1=\dots=a_k=b_1=\dots=b_m=0$$

در نتیجه $D=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_m,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ مستقل خطاست.

از طرفی D فضای W_1+W_2 را تولید میکند (ثابت کنید). بعلاوه

$$\dim W_1 + \dim W_2 = (k+m) + (k+n) = k + (k+m+n)$$

$$= \dim (W_1 \cap W_2) + \dim (W_1 + W_2)$$

مختصات یک بردار در فضای برداری :

تعریف : فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F باشد. یک پایه مرتب برای V، پایه‌ای است که با یک ترتیب معین در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر یک پایه مرتب یک دنباله متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را تولید کند.

تذکر: تفاوت اصلی بین یک پایه و یک پایه مرتب این است که اگر B را یک پایه برای V در نظر بگیریم، آنگاه هرگونه جابجایی اعضای B تغییری در آن ایجاد نمی‌کند و همان پایه B را به ما ارائه می‌دهد. اما اگر همین پایه را به عنوان پایه مرتب در نظر بگیریم، دیگر مجاز به تغییر ترتیب اعضای B نیستیم و هرگونه جابجایی در این ترتیب، پایه دیگری را به ما ارائه می‌دهد که با B یکی نیست.

مثال: اگر $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ و $B'=\{e_2, e_1, e_3\}$ دو پایه مرتب برای F^3 در نظر گرفته شوند آنگاه $B \neq B'$.

پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ را پایه مرتب استاندارد برای F^n و پایه $\{1, x, \dots, x^n\}$ را پایه مرتب استاندارد برای $P_n(F)$ می‌نامند.

دیدیم که اگر V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $B=\{x_1, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، هر بردار $x \in V$ را می‌توان به شکل منحصربفردی به صورت

ترکیب خطی از بردارهای B نوشت.

با این توضیح می‌توان تعریف مختصات یک بردار را به صورت زیر بیان نمود.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد. بازاء هر $x\in V$ فرض کنید $x_1,\ldots,x_n$ اسکالرهای منحصر بفردی باشند که $x=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$. در این صورت $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ را "مختصات بردار x نسبت به پایه B" نامیده و با نماد $[x]_B$ نشان می‌دهیم. یعنی $[x]_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$.

مثال ۱: اگر $B=\{1,x,x^2\}$ پایه مرتب استاندارد برای $P_2(\mathbb{R})$ باشد و $f(x)=4+6x-7x^2$ آنگاه $[f(x)]_B=\begin{bmatrix}4\\6\\-7\end{bmatrix}$ زیرا:

$f(x)=4\cdot1+6\cdot x+(-7)\cdot x^2$.

مثال ۲: اگر $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ پایه مرتب استاندارد برای $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ باشد و $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ آنگاه: $[A]_B=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$ زیرا:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

مثال ۳: فرض کنیم $B=\{۱, ۱-x, (۱-x)^۲\}$ پایه‌ای مرتب برای $P_۲(\mathbb{R})$ باشد. اگر $[f(x)]_B=\begin{bmatrix}۵\\-۳\\۲\end{bmatrix}$ ، $f(x)$ را بیابید.

حل: $[f(x)]_B=\begin{bmatrix}۵\\-۳\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=(۵)۱+(-۳)(۱-x)+(۲)(۱-x)^۲$

$=۵-۳+۳x+۲-۴x+۲x^۲ \Rightarrow f(x)=۴-x+۲x^۲$

"به طور کلی اگر $B=\{\alpha_۱,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه‌ی مرتب برای V باشد و $x\in V$ به طوریکه $[x]_B=\begin{bmatrix}c_۱\\c_۲\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$ آنگاه $x=c_۱\alpha_۱+\cdots+c_n\alpha_n$."

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی‌البعد روی میدان F ، B یک پایه‌ی مرتب برای V و $x,y\in V$ و $c\in F$. در این صورت:

(i) $[x+y]_B=[x]_B+[y]_B$ و (ii) $[cx]_B=c[x]_B$.

تغییر مختصات: فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F و $B=\{\alpha_۱,\dots,\alpha_n\}$ و $B'=\{\alpha'_۱,\dots,\alpha'_n\}$ پایه‌های مرتبی برای V باشند.

فرض کنیم x برداری دلخواه از V باشد و $[x]_B=\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ و $[x]_{B'}=\begin{bmatrix}x'_۱\\x'_۲\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}$.

می‌خواهیم رابطه‌ی بین $[x]_B$ و $[x]_{B'}$ را بیابیم. به ازای هر $\alpha'_j\in B'$ ($۱\leq j\leq n$) اسکالرهای منحصر به فرد t_{ij} موجودند به طوریکه:

$$\alpha'_j=\sum_{i=۱}^{n} t_{ij}\,\alpha_i \quad \circledast$$

$\alpha'_۱=t_{۱۱}\alpha_۱+t_{۲۱}\alpha_۲+\cdots+t_{n۱}\alpha_n$

$\alpha'_۲=t_{۱۲}\alpha_۱+t_{۲۲}\alpha_۲+\cdots+t_{n۲}\alpha_n$

لذا می‌توان نوشت :

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \Rightarrow x = x'_1 \alpha'_1 + \cdots + x'_n \alpha'_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j \alpha'_j$$

$$\overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (t_{ij} x'_j) \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j \right) \alpha_i$$

$$\xrightarrow[\text{منحصر بفردند}]{x_n \text{ و } \dots \text{ و } x_1} x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j \quad (1 \le i \le n)$$

تعریف :

$$x_1 = t_{11} x'_1 + t_{12} x'_2 + \cdots + t_{1n} x'_n$$

$$x_2 = t_{21} x'_1 + t_{22} x'_2 + \cdots + t_{2n} x'_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = t_{n1} x'_1 + t_{n2} x'_2 + \cdots + t_{nn} x'_n$$

بنابراین :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}}_{P} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[x]_B = P [x]_{B'}} \quad ①$$

ثابت می‌شود P یک ماتریس مربعی $n \times n$ معکوس‌پذیر است و ستون j ام P مختصات α'_j $(1 \le j \le n)$ نسبت به پایه B هستند . یعنی :

$$P \text{ ستون } j \text{ ام } = [\alpha'_j]_B \quad (1 \le j \le n)$$

با توجه به اینکه P معکوس‌پذیر است، لذا رابطهٔ $[x]_B = P[x]_{B'}$ را می‌توان نوشت: $\boxed{[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B}$ ②

"ماتریس P، ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ B' به پایهٔ B یا بطور خلاصه ماتریس تغییر مختصات نامیده می‌شود."

به عبارت دقیق‌تر قضیهٔ زیر را داریم:

__قضیه:__ فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F و $B=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $B'=\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ دو پایهٔ مرتب برای V باشند. در این صورت ماتریس $n\times n$ منحصر به فرد و لزوماً "معکوس‌پذیری" مانند P موجود است بطوریکه برای هر $x\in V$، $[x]_B = P[x]_{B'}$ ① و $[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B$ ②. علاوه بر این، ستون‌های P با رابطهٔ $P_j = [\alpha'_j]_B$، که در آن α'_j ها اعضای پایهٔ B' هستند، داده می‌شوند.

"ماتریس P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ B' به پایهٔ B نامیده می‌شود."

__مثال ۱:__ فرض کنید $B=\{\alpha_1=(1,0,0), \alpha_2=(0,1,0), \alpha_3=(0,0,1)\}$ پایهٔ مرتب استاندارد در $\mathbb{R}^3$ و $B'=\{\alpha'_1=(-1,0,0), \alpha'_2=(4,2,0), \alpha'_3=(5,-3,8)\}$ پایهٔ مرتب دیگری برای $\mathbb{R}^3$ باشند. ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ B' به پایهٔ B را یافته و مختصات بردار $(3,2,-8)$ در پایهٔ B' را بدست آورید.

حل: داریم: $[\alpha'_۲]_B=\begin{bmatrix}۴\\۲\\۰\end{bmatrix} \to$ ستون دوم P و $[\alpha'_۱]_B=\begin{bmatrix}-۱\\۰\\۰\end{bmatrix} \to$ ستون اول P

و $[\alpha'_۳]_B=\begin{bmatrix}۵\\-۳\\۸\end{bmatrix} \to$ ستون سوم P. بنابراین: $P=\begin{bmatrix}-۱ & ۴ & ۵\\ ۰ & ۲ & -۳\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}$.

در نتیجه $[x]_B=P[x]_{B'}$ و $[x]_{B'}=P^{-1}[x]_B$. داریم:

بنابراین: $P^{-1}=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & \frac{۱۱}{۸}\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸}\end{bmatrix}$.

$$[(۳,۲,-۸)]_{B'}=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & \frac{۱۱}{۸}\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸}\end{bmatrix}[(۳,۲,-۸)]_B$$

$$\Rightarrow [(۳,۲,-۸)]_{B'}=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & \frac{۱۱}{۸}\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۲\\-۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳+۴-۱۱\\ ۰+۱-\frac{۲۴}{۱۶}\\ ۰+۰-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰\\-\frac{۱}{۲}\\-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [(۳,۲,-۸)]_{B'}=\begin{bmatrix}-۱۰\\-\frac{۱}{۲}\\-۱\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر: $(۳,۲,-۸)=(-۱۰)\alpha'_۱+(-\frac{۱}{۲})\alpha'_۲+(-۱)\alpha'_۳$

مثال ۲: فرض کنید $B=\{\overset{\alpha_۱}{۱},\overset{\alpha_۲}{x},\overset{\alpha_۳}{x^۲}\}$ و $B'=\{\overset{\alpha'_۱}{۱},\overset{\alpha'_۲}{۱-x},\overset{\alpha'_۳}{(۱-x)^۲}\}$

پایه‌های مرتب برای $P_۲(\mathbb{R})$ باشند. ماتریس تغییر مختصات از پایه B به پایه B' را یافته و سپس چندجمله‌ای $f(x)=a+bx+cx^۲$ را برحسب توان‌های $(۱-x)$ بنویسید.

حل: ابتدا ماتریس تغییر مختصات از پایه B' به پایه B را بدست می‌آوریم.

$$\alpha'_1 = 1 = 1.1 + 0.x + 0.x^2 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 \Rightarrow [\alpha'_1]_B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\alpha'_2 = 1-x = 1.1 + (-1)x + 0.x^2 \Rightarrow [\alpha'_2]_B = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\alpha'_3 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2 = 1.1 + (-2)x + 1.x^2 \Longrightarrow [\alpha'_3]_B = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تغییر مختصات از پایه B' به پایه B عبارت است از:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

معکوس این ماتریس یعنی $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (که با P مساوی است)

ماتریس تغییر مختصات از پایه B به پایه B' است. لذا می‌توان نوشت:

$$[f(x)]_{B'} = P^{-1}[f(x)]_B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b+c\\-b-2c\\c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = a+bx+cx^2 = (a+b+c).1 + (-b-2c)(1-x) + c(1-x)^2$$

تمرین: فرض کنید

$$B = \{\alpha_1 = (1,0,0,0), \alpha_2 = (0,1,0,0), \alpha_3 = (0,0,1,0), \alpha_4 = (0,0,0,1)\}$$

$$B' = \{\alpha'_1 = (0,1,0,0), \alpha'_2 = (0,0,0,1), \alpha'_3 = (1,2,0,-\tfrac{8}{5}), \alpha'_4 = (0,3,1,-1)\}$$

دو پایه مرتب برای $\mathbb{R}^4$ باشند.

الف) ماتریس تغییر مختصات از پایه B' به پایه B را بدست آورید.

ب) با فرض $[x]_{B'}=\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ، $[x]_B$ را بدست آورید.

ج) ماتریس تغییر مختصات Q از پایه B به پایه B' را بدست آورده و با استفاده از آن مختصات بردار (۵و۱-۱و۲) را نسبت به پایه B' بیابید.

فضاهای سطری و ستونی ماتریس ها:

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ روی میدان F باشد. در این صورت سطرهای A بردارهایی در F^n می‌باشند که زیرفضای تولیدشده توسط این سطرها را فضای سطری A می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\in F^m}{a_{m1}} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{matrix} \in F^n \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

به طور مشابه ستون های A بردارهایی در F^m می‌باشند که زیرفضای تولیدشده توسط این ستون ها را فضای ستونی A می‌نامند.

قضیه: فرض کنیم ماتریس $A_{m\times n}$ هم ارز سطری ماتریس $B_{m\times n}$ باشد. در این صورت فضای سطری A با فضای سطری B مساوی است.

قضیه: فرض کنیم ماتریس A هم ارز سطری ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R باشد. در این صورت بردارهای سطری ناصفر R (سطرهای غیرصفر R) پایه ای برای فضای سطری A تشکیل می‌دهند.

مثال ۱: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&3&1&3\\0&1&2&0\\-3&0&7&-1\\2&0&-2&-2\end{bmatrix}$. پایه‌ای برای فضای سطری A بیابید.

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&1&3\\0&1&2&0\\-3&0&7&-1\\2&0&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{اعمال سطری}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{R}$$

تحویل شده سطری پلکانی

ماتریس $R=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری A است. لذا بردارهای سطری ناصفر R (سطرهای غیرصفر R) یعنی $(1,0,0,-2)$ و $(0,1,0,2)$ و $(0,0,1,-1)$ پایه‌ای برای فضای سطری A را بسازند.

تذکر ۱: فرض کنید می‌خواهیم پایه‌ای برای زیرفضای تولید شده توسط مجموعه $S=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ در F^n بیابیم. برای این منظور بردارهای x_i را به عنوان سطرهای ماتریس A نوشته و با انجام اعمال سطری مقدماتی، A را به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی مانند R تبدیل می‌کنیم. در این صورت سطرهای غیرصفر R یک پایه برای زیرفضای تولید شده توسط x_iها تشکیل می‌دهد.

مثال ۲: یک پایه برای زیرفضای تولید شده توسط بردارهای

$x_1=(1,-2,0,0,3)$ و $x_2=(2,-5,-3,-2,6)$ و

$x_3=(0,5,15,10,0)$ و $x_4=(2,6,18,8,6)$ از $\mathbb{R}^5$ بدست آورید.

حل: بردارهای r_1 و r_2 و r_3 و r_4 را سطرهای ماتریس A قرار داده و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، A را به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 3\\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6\\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0\\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{اعمال سطری}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{R}$$

تحویل شده سطری پلکانی

سطرهای غیر صفر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R یعنی $(1, 0, 0, -2, 3)$ و $(0, 1, 0, -1, 0)$ و $(0, 0, 1, 1, 0)$ یک پایه برای فضای سطری A و لذا یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای r_1 و r_2 و r_3 و r_4 می‌باشند.

تذکر ۲: فضای ستونی یک ماتریس با فضای سطری ماتریس ترانهاده آن برابر است. لذا برای بدست آوردن یک پایه برای فضای ستونی یک ماتریس، کافیست فضای سطری ترانهاده ماتریس را بدست آورده، سپس این بردارها را بصورت ستونی بنویسیم.

مثال ۳: پایه‌ای برای فضای ستونی $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 0 & 4 & 4 & -4\end{bmatrix}$ بدست آورید.

حل: ترانهاده A یعنی A' را بدست آورده، با اعمال سطری مقدماتی آن را به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 4\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{اعمال سطری}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}$$ تحویل شده سطری پلکانی

بنابراین بردارهای $(1,0,-6)$ و $(0,1,2)$ یعنی سطرهای غیرصفر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R هم ارز سطری A') یک پایه برای فضای سطری A' و لذا $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهند.

مثال ۴: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. پایه‌ای برای فضای ستونی A بیابید.

حل:

ترانهاده A $$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}$$ تحویل شده سطری پلکانی

بنابراین بردارهای $(1, 0, 0, 0, -1)$ و $(0, 1, 0, 4, 3)$

و $(0, 0, 1, -1, -1)$ پایه‌ای برای فضای سطری A' (از آنجا A) تشکیل می‌دهند

که هم ارز است بگوییم $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\4\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ پایه‌ای برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهند.

قضیه: اگر A یک ماتریس m×n باشد آنگاه فضاهای سطری و ستونی A دارای بعد مساوی هستند. یعنی بعد فضای ستونی A = بعد فضای سطری A

با توجه به قضیه فوق می‌توان تعریف زیر را بیان نمود:

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس m×n باشد. بعد فضای سطری یا بعد فضای ستونی A را رتبه ماتریس A نامیده و با نماد rank A نمایش می‌دهند.

مثال ۵: رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&0&3&0\\1&2&-1&-1&0\\0&0&1&4&0\\2&4&1&10&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3&0\\1&2&-1&-1&0\\0&0&1&4&0\\2&4&1&10&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\begin{matrix}R_1\\-R_1+R_2\\R_3\\-2R_1+R_4\\R_5\end{matrix}}\begin{bmatrix}1&2&0&3&0\\0&0&-1&-4&0\\0&0&1&4&0\\0&0&1&4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ -R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ -R_2+R_3 \\ -R_2+R_4 \\ R_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_4 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ -R_3+R_4 \\ R_5 \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{R}$$

تحویل شده سطری پلکانی

$B=\{(1,2,0,3,0),(0,0,1,4,0),(0,0,0,0,1)\}$ یک پایه برای فضای سطری A است و

لذا : تعداد عضوهای پایهٔ B $=$ 3 $=$ بعد فضای سطری A $= \text{rank}\, A =$ رتبهٔ A