فصل دوم

مجموعه‌ها

فهرست مطالب

مسأله‌ی گروه‌ها

۱. «یک روز در هنگام نوشیدن قهوه در باشگاه مسافران بین کهکشان‌ها، «ایون تیخی»، عضو برجسته‌ی این باشگاه گفت: پیاده شدن در سیاره‌ی «گسیود» خیلی مشکل بود، اما وقتی روی سطح سیاره فرود آمدم، از این‌که تصمیم به دیدن آنجا گرفته بودم پشیمان شدم. در آن‌جا موجوداتی عجیب زندگی می‌کردند. بیش از ۱۰۰۰ نفر از ساکنان سیاره به پیشوازم آمدند. ۸۱۱ نفر از آن‌ها «یک چشم» داشتند! ۷۵۲ نفر آن‌ها «موماری» بودند؛ یعنی روی سرشان به‌جای مو، مار رشد کرده بود! ۴۱۸ نفر از آن‌ها «پاماهی» بودند؛ یعنی به‌جای پاهایشان یک دم ماهی داشتند. ۵۷۰ نفرشان، هم یک چشم بودند و هم موماری. ۳۵۶ نفرشان، هم یک چشم بودند و هم پاماهی. ۳۴۸ نفرشان، هم موماری بودند و هم پاماهی. سرانجام، ۲۹۷ نفر از این عجیب‌الخلقه‌ها هم یک چشم بودند، هم موماری و هم پاماهی. بزرگ‌ترین آن‌ها به طرف من آمد و گفت ...»

در این هنگام استاد «تارانتوف» که به داستان مسافرت ایون تیخی گوش می‌کرد، با صدای بلند گفت:

«من می‌دانم که در آن سیاره، چند نفر فقط یک چشم هستند. چند نفر فقط موماری هستند و چند نفر فقط پاماهی»

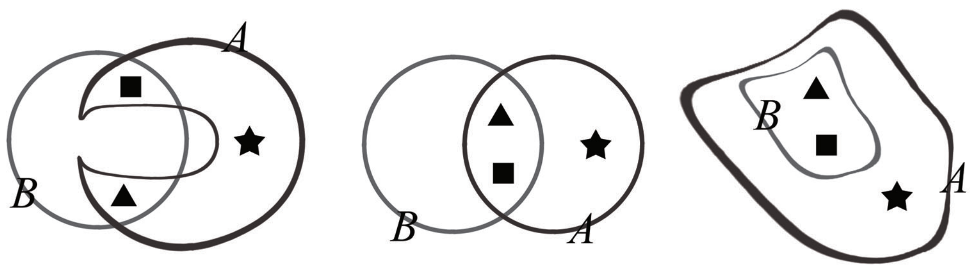
تارانتوف از چه راهی تعداد آن موجودات عجیب‌الخلقه را پیدا کرده بود؟

مجموعه‌ها

۱. حداکثر چند تا از این رابطه‌ها با هم می‌توانند درست باشند؟

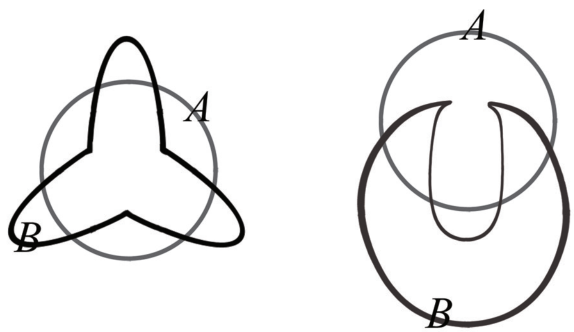
الف) $\notin\notin A$ ب) $\in\notin A$ ج) $\notin\in A$ د) $\in\in A$

۲. دو مجموعه‌ی A و B داریم. می‌دانیم که $\blacksquare, \blacktriangle, \bigstar \in A$ (یعنی $\blacksquare$ و $\blacktriangle$ و $\bigstar$ هر سه عضو A هستند) ولی $\blacktriangle, \blacksquare \in B$ و همچنین $\bigstar \notin B$. کدام یک از شکل‌های زیر درست کشیده شده‌اند؟

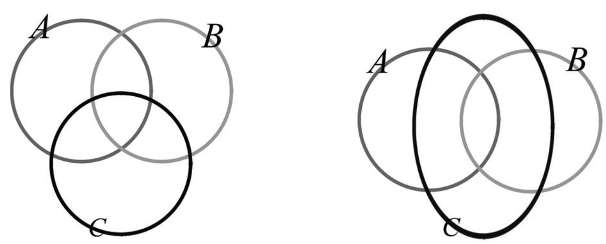


ج ب الف

۳. آیا دو شکل زیر، یک واقعیت را نشان می‌دهند؟



۴. آیا دو شکل زیر، یک واقعیت را نشان می‌دهند؟



۵. یک مجموعه‌ی تهی مثال بزنید.

۶. کدام یک بیانگر مجموعه‌ی تهی است؟

$\emptyset$ ۰ $\{۰\}$ $\{\emptyset\}$ $\{\ \}$ ϕ

زیرمجموعه

۱. فرض کنید که A مجموعه‌ی همه‌ی عددهای طبیعی زوج بزرگ‌تر از ۴ و B مجموعه‌ی همه‌ی عددهایی باشند که به صورت مجموع دو عدد اول فرد نوشته می‌شوند. دست‌کم یکی از دو ادعای زیر را انتخاب کرده و آن را اثبات کنید.

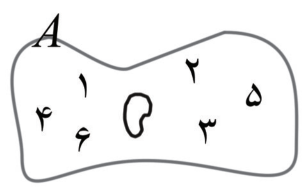
الف) $B \subset A$

ب) $A \subset B$

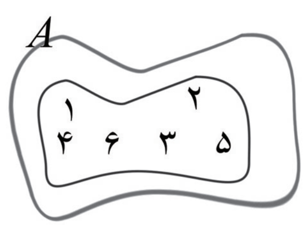
۲. در صفحه‌ی ۳۶ کتاب ریاضیات اول دبیرستان شکلِ نمودار مجموعه‌هایی داده شده است. آیا اِشکالی در شکل دیده می‌شود؟

۳. با توجه به شکل‌های داده شده، دو ادعای زیر را توضیح دهید.

الف) «تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است».



ب) «هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش است».



۴. الف) نشان دهید که

«اگر $B \subset C$ و $A \subset B$ آن‌گاه $A \subset C$»

ب) ثابت کنید که

«اگر $B \subset A$ و $A \subset B$ آن‌گاه $A = B$»

۵. ثابت کنید

$$«\text{اگر } A \subset \emptyset \text{، } A = \emptyset»$$

۶. اگر A یک مجموعه باشد، به زیر مجموعه‌هایی از A که هیچ‌کدام زیر مجموعه‌ی همدیگر نباشند، یک خانواده‌ی اسپرنر [1] می‌گویند. برای مثال اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$، دو زیر مجموعه‌ی زیر، یک خانواده‌ی اسپرنری دوتایی هستند.

$$\{۱\}\,,\,\{۲, ۳\}$$

اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، یک خانواده‌ی اسپرنری ده‌تایی معرفی کنید.

۷. فرض کنید که $A = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$. به جدول زیر با دقت نگاه کنید.

زیرمجموعه	شماره‌گذاری صفر و یکی	عدد در مبنای ۲	عدد در مبنای ۱۰
$\emptyset$	$(۰, ۰, ۰)$	۰	۰
$\{x_۳\}$	$(۰, ۰, ۱)$	۱	۱
$\{x_۲\}$	$(۰, ۱, ۰)$	۱۰	۲
$\{x_۲, x_۳\}$	$(۰, ۱, ۱)$	۱۱	۳
$\{x_۱\}$	$(۱, ۰, ۰)$	۱۰۰	۴
$\{x_۱, x_۳\}$	$(۱, ۰, ۱)$	۱۰۱	۵
$\{x_۱, x_۲\}$	$(۱, ۱, ۰)$	۱۱۰	۶
$\{x_۱, x_۲, x_۳\}$	$(۱, ۱, ۱)$	۱۱۱	۷

الف) چه ارتباطی بین ستون‌ها و سطرهای این جدول می‌بینید؟ آن‌ها را توصیف کنید.

ب) جدول مشابهی برای $A = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$ بکشید.

ج) جدول زیر را پر کنید.

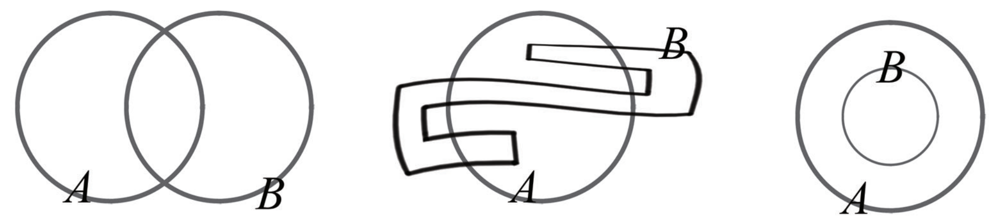
تعداد اعضای مجموعه	بزرگترین عدد ستون سمت چپی جدول مجموعه	تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه
۰		
۱		
۲		
۳	۷	۸
۴		
۵		

[1] Sperner

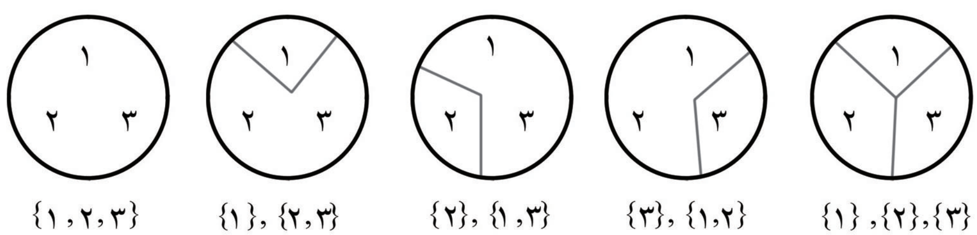
د) تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی، چه عددی خواهد شد؟

اجتماع و اشتراک

۱. در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.



۲. اگر همه‌ی اعضای یک مجموعه را به چند (یا یک) زیر مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، می‌گوییم آن مجموعه را «اِفراز» کرده‌ایم. برای مثال در شکل‌های زیر همه‌ی پنج افراز گوناگون مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ داده شده است.



به تعداد روش‌های گوناگون افراز یک مجموعه‌ی n عضوی، n اُمین عدد بِل [۱] می‌گویند.

۳. چهارمین عدد بل را حساب کنید.

۴. با پر کردن جدول زیر، حدس بزنید که پنجمین عدد بل تقریباً چقدر است؟

n	n اُمین عدد بل
۱	
۲	
۳	۵
۴	

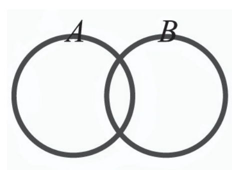
۵. در بسیاری از بخش‌های ریاضیات مطالعه‌ی مجموعه‌های جدا از هم (یعنی مجموعه‌هایی که اشتراک بین آنها صفر عضوی است،) مهم است و در بخش‌های ویژه‌ای از ریاضیات (همچون هندسه‌ی متناهی)

۱) Bell

مطالعه‌ی مجموعه‌هایی که اشتراک بین آنها یک عضوی است، مهم است. تمرین زیر به یک ساختمان مهم هندسه‌ی متناهی می‌پردازد.

یک مجموعه‌ی هفت عضوی داریم. هفت تا زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی آن را بیابید، به طوری که: اولاً) اشتراک هر دو تا از این زیرمجموعه‌ها، یک عضوی باشد. ثانیاً) هر دو عضو، همزمان فقط در یکی از این زیرمجموعه‌ها باشند. ثالثاً) هر عضو، عضوِ تنها سه تا از این زیرمجموعه‌ها باشد.

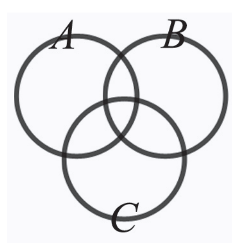
۶. با توجه به شکل زیر درستی جملات ریاضی داده شده را نشان دهید.



الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

۷. با توجه به شکل زیر درستی جملات ریاضی زیر را نشان دهید.



الف) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ب) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ج) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

د) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۸. ثابت کنید:

الف) $A \cap B = A \longleftrightarrow A \subset B$

ب) $A \cup B = A \longleftrightarrow B \subset A$

ج) $A \cap \varnothing = \varnothing$

د) $A \cup \varnothing = A$

۹. الف) با آوردن یک مثال، نادرستی هر یک از دو ادعای زیر را نشان دهید.

«از $A \cap B = A \cap C$ می‌توان نتیجه گرفت که $B = C$»

«از $A \cup B = A \cup C$ می‌توان نتیجه گرفت که $B = C$»

ب) تاکنون با چندین ویژگی اجتماع و اشتراک آشنا شده‌اید؛ به بعضی از این ویژگی‌ها در صفحه‌های ۳۸ و ۴۰ کتاب درسی و بعضی دیگر در تمرین‌های ۴، ۵ و ۶ اشاره شد. با کمک گرفتن از این ویژگی‌ها، درستی متن ریاضی زیر را بررسی کنید.

می‌خواهیم ثابت کنیم که

«اگر $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$، در این صورت $B = C$»

اثبات:

$$
\begin{aligned}
B &= B \cup (B \cap A) = B \cup (A \cap B) = B \cup (A \cap C) \\
&= (B \cup A) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \\
&= (A \cup C) \cap (B \cup C) = (C \cup A) \cap (B \cup C) \\
&= (C \cup A) \cap (C \cup B) = C \cup (A \cap B) \\
&= C \cup (A \cap C) = C \cup (C \cap A) = C
\end{aligned}
$$

پس $B = C$.

۱۰. در هر یک از دو مثال صفحه‌ی بعد از چه مفاهیمی استفاده شده است: اجتماع یا اشتراک؟

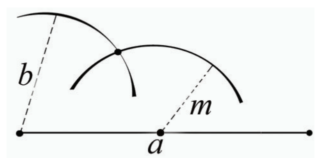
مثال اول) می‌خواهیم مثلثی رسم کنیم که از آن سه اندازه‌ی زیر را داریم:

m: طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC

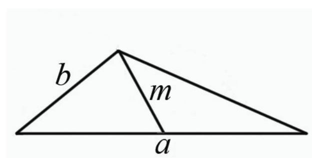
b: طول ضلع AC

a: طول ضلع BC

برای این کار ابتدا پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم. سپس نقطه‌ی وسط آن را می‌یابیم و از مرکز آن دایره‌ای به شعاع m رسم می‌کنیم. پس از آن دایره‌ای به مرکز یکی از دو سر پاره‌خط و به شعاع b رسم می‌کنیم.



از محل برخورد دو دایره و دو سر پاره‌خط، سه رأس مثلث موردنظر پیدا خواهند شد.



مثال دوم) می‌خواهیم جواب معادله‌ی زیر را بیابیم (یعنی مقدار x را جوری تعیین کنیم که رابطه‌ی زیر درست شود).

$$x^{۲} + ۲x = ۰$$

برای این کار چنین می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} x^{۲} + ۲x &= ۰ \\ x^{۲} + ۲x &= x(x+۲) \end{aligned}\right\} \longrightarrow x(x+۲) = ۰$$

چون حاصل‌ضرب x و $(x+۲)$ برابر صفر شده است، پس دست‌کم یکی از این دو عبارت باید برابر صفر شوند. بنابراین

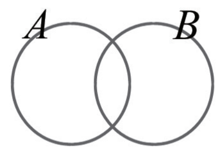
$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad x + ۲ = ۰$$

در نتیجه این معادله، دو جواب زیر را دارد:

$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad x = -۲$$

تفاضل مجموعه‌ها

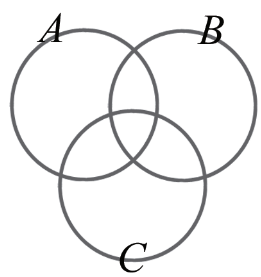
۱. با توجه به شکل زیر، درستی جملات ریاضی داده شده را نشان دهید.



الف) $(A-B)\cap B=\varnothing$ ب) $(A-B)\cup A=A$

ج) $(A-B)\cup B=A\cup B$ د) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$

۲. با توجه به شکل زیر، درستی جملات ریاضی داده شده را نشان دهید.



الف) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

ب) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

۳. درست یا غلط؟

الف) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

ب) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

۴. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، نشان دهید که $B-A=B$ و $A-B=A$.

۵. می‌دانیم که $A \cup B = A - B$. ثابت کنید $B = \varnothing$.

۶. می‌دانیم که $A - B = B - A$. ثابت کنید $A = B$.

۷. درست یا غلط؟

الف) $A \cup B$ یک مجموعه است.

ب) $A_{۱} \cup A_{۲} \cup \ldots \cup A_{۱۰۰۰}$ یک مجموعه است.

ج) مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها یک مجموعه است.

۸. یکی از کاربردهای امروزی کشیدن شکل مجموعه‌ها، در «منطق» است. با رسم شکل، درستی یا نادرستی استدلال‌های زیر را نشان دهید.

الف) هر بشری حیوان است.
هیچ حیوانی گیاه نیست.

پس هیچ بشری گیاه نیست.

ب) هیچ مایعی جامد نیست.
بعضی اجسام مایع هستند.

پس بعضی از اجسام جامد نیستند.

ج) هیچ مایعی جامد نیست.
بعضی اجسام مایع هستند.

پس بعضی از جامدها جسم نیستند.

د) همه‌ی ماهیان در آب زندگی می‌کنند.
هیچ نهنگی ماهی نیست.

پس هیچ نهنگی در آب زندگی نمی‌کند.