فصل اول

اعداد و نمادها

فهرست مطالب

عددنویسی

۱ ــ هم‌چنان که آدمی به شمارش و شناخت اعداد احتیاج پیدا کرد، به نوشتن اعداد هم نیاز پیدا کرد. اگر از روش‌های بدوی نمایش اعداد بگذریم، می‌توان به سه روش گوناگونی که برای نوشتن اعداد به کار رفته است، اشاره کرد:

عددنویسی غیرموضعی (برای مثال روش هیروگلیف مصری)
عددنویسی الفبایی (برای مثال روش ابجد عربی)
عددنویسی موضعی (برای مثال روش هندی ـ پارسی)

الف) با نگاهی به جدول داده شده سعی کنید به تفاوت عددنویسی موضعی و غیرموضعی ببرید.

ب) عدد هزار و سیصد و هشتاد و هشت را به دو روش هیروگلیف مصری و هندی ـ پارسی نمایش دهید.

پ) عدد دومیلیون و صد و سه‌هزار و پنجاه و دو را به دو روش هیروگلیف مصری و هندی ــ پارسی نمایش دهید.

روش هیروگلیف مصری	روش هندی ـ پارسی
𓏺	۱
𓏻	۲
𓏼	۳
𓏽	۴
𓏾	۵
𓏿	۶
𓐀	۷
𓐁	۸
𓐂	۹
𓎆	۱۰
𓎆𓏺	۱۱
𓎆𓏾	۱۵
𓎆𓎆	۲۰
𓎆𓎆𓎆	۳۰
𓎆𓎆𓎆𓎆	۴۰
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	۵۰
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	۶۰
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	۷۰
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	۸۰
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	۹۰
𓍢	۱۰۰
𓍢𓍢	۲۰۰
𓍢𓍢𓍢	۳۰۰
𓍢𓍢𓍢𓍢	۴۰۰
𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	۵۰۰
𓆼	۱۰۰۰
𓂭	۱۰۰۰۰

۲ـ در جدول زیر خط باستانی ایران‌زمین آمده است. ایران‌زمین نام ناحیه‌ای است که از «ماوراء النهر[۱]» تا «بین النهرین[۲]» ادامه دارد. این خط در ابتدا در بین سومری‌ها و آشوری‌ها رواج داشت. سپس به بابلی‌ها به ارث رسید و سپس هخامنشیان آن را برگزیدند. امروزه این خط به نام «**میخی**» شناخته می‌شود.

الف) عددنویسی میخی، موضعی است یا غیرموضعی؟

ب) عدد هزار و سیصد و هشتاد و هشت در این عددنویسی چطور نمایش داده می‌شود؟

روش میخی	روش هندی ـ پارسی
𒁹	۱
𒁹𒁹	۲
𒁹𒁹𒁹	۳
𒁹𒁹𒁹𒁹	۴
𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۵
𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۶
𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۷
𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۸
𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۹
𒌋	۱۰
𒌋𒁹	۱۱
𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	۱۵
𒌋𒌋	۲۰
𒌋𒌋𒌋	۳۰
𒌋𒌋𒌋𒌋	۴۰
𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋	۵۰
𒁹	۶۰
𒁹𒌋	۷۰
𒁹𒌋𒌋	۸۰
𒁹𒌋𒌋𒌋	۹۰

۳ـ نماد زیر بیانگر چه عددی است؟

𒁹𒌋𒌋𒁹𒁹

۴ـ نماد زیر بیانگر چه عددی است؟

𒁹𒌋𒌋𒁹𒌋𒌋𒁹

۵ـ عددنویسی رومی موضعی است یا غیرموضعی؟

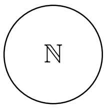
۶ـ با نگاهی به یک قرآنِ چاپ یک کشور عربی و مقایسه‌ی روش عددنویسی و شماره‌گذاری آیات، به تفاوت‌های ارقام ایرانی و عربی پی ببرید.

[۱] ناحیه‌ای بین سیحون و جیحون

[۲] میان‌رودان. ناحیه‌ای بین دجله و فرات

اعدد طبیعی و صحیح

۱ــ «شمارش» رفته‌رفته به‌دست آمد و پابه‌پای زندگی بشر رشد یافت.



ریخت این شمارش، امروزه «اعداد طبیعی» نامیده می‌شوند. این اعداد را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهند.

در شکل داده شده موقعیت $\mathbb{N}$ نشان داده شده است.

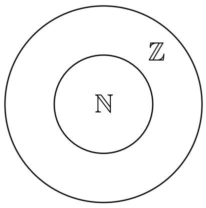
۲ــ در ابتدا شناخت اعداد طبیعی جنبه‌ای راز گونه داشت. این جنبه امروزه «عددشناسی»[۱] نامیده می‌شود. ردپای عددشناسی حتی در هزاران سال پیش هم دیده می‌شود. امروزه شناخت اعداد طبیعی جنبه‌ی ابزاری دارد و به منظور رمزنگاری و یا مطالعه‌ی ساختارهای جبری اهمیت دارد، این جنبه امروزه «نظریه‌ی اعداد»[۲] نامیده می‌شود.

مسأله‌ی زیر به کدام جنبه از شناخت اعداد مربوط است؟ عددشناسی یا نظریه‌ی اعداد.

قضیه‌ی خواجه نصیرالدین توسی: مجموع دو عدد فرد مربعی، نمی‌تواند عددی مربعی شود.

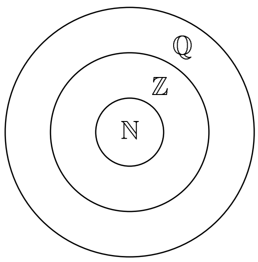
۳ــ بشر بسیار دیرتر از آنکه به مفهوم عدد کسری دست یابد، به مفهوم عدد منفی دست پیدا کرد؛ با این همه امروزه مجموعه‌ای معروف وجود دارد که اعضای آن اعداد طبیعی، صفر و قرینه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی هستند. این مجموعه را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهند.

در شکل موقعیت $\mathbb{Z}$ نشان داده شده است.



اعداد گویا

۱ــ مجموعه‌ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم. در $\mathbb{Q}$ خیالمان راحت است که چهار عمل اصلی را می‌توانیم انجام دهیم.
اما جای $\mathbb{Q}$ کجاست؟



$\mathbb{Q}$ هدیه‌ی ریاضی‌دان‌ها به انسان‌های حسابگر است؛ به آنهایی که دوست دارند محاسبات دقیق‌تری انجام دهند. امروزه در به چنگ آوردن «توصیف پدیده‌ها»، دانشمندان معمولاً به دانشی بیش از $\mathbb{Q}$ نیاز ندارند.

۲ــ سعی کنید $\mathbb{Q}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

۳ــ کسرهای زیر را ساده کنید.

$-\frac{۳۰}{۲۱}$ $\qquad$ $\frac{۱۰۵}{۳۵}$

۴ــ الف) کدام یک از کسرهای زیر ساده نشدنی است؟

$\frac{-۲}{۵}$ $\qquad$ $\frac{۲}{-۵}$ $\qquad$ $-\frac{۲}{۵}$

---

۱ numerology

۲ number theory

ب) کسرهای زیر را ساده کنید؛ یعنی آنها را به‌صورت کسر ساده نشدنی بنویسید.

$$\frac{۱۰۳}{۱۰۴} \qquad \frac{۰}{۱۰} \qquad \frac{۲}{-۵}$$

۵− الف) هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت کسری ساده نشدنی نمایش داد. چرا؟

ب) اعداد گویای زیر را به‌صورت کسر ساده نشدنی بنویسید.

$$\frac{۴}{\left(\frac{۱}{-۲}\right)} \qquad ۰/۲۵$$

۶− اگر A و B دو مجموعه از اعداد باشند و بین هر دو عضو B، عضوی از A یافت شود، می‌گوییم A در B چگال[۱] است و می‌نویسیم $A \odot B$.

الف) با توجه به دو مجموعه‌ی زیر آیا $A \odot B$؟

$$B = \{۰, ۳, ۱۰\} \qquad A = \{۱, ۴, ۲\}$$

ب) ثابت کنید که $\mathbb{Q} \odot \mathbb{Q}$.

۷− به جای B مجموعه‌ای مناسب قرار دهید.

$$\mathbb{N} \odot B$$

۸− آیا ادعای زیر درست است؟

«اگر $A \odot B$ و $B \odot A$ آنگاه $A = B$»

اعداد اعشاری

۱ − در ریاضیات اعداد اعشاری دیگری هم وجود دارند! یک عدد اعشاری همیشه به ارقام صفر ختم نمی‌شود. برای مثال دو عدد زیر، هر دو اعشاری هستند.

$۱/۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱\cdots$

$۱/۰۱۰۱۲۰۱۲۳۰۱۲۳۴۰۱\cdots$

۲− به اعداد زیر دقت کنید.

$۲۵۱/۳۳۳\cdots$

$۶۰/۲۴۳۳۳\cdots$

$-۲۱/۴۵۶۴۵۶۴۵۶\cdots$

[۱] نماد چگال ($\odot$) اختراع ایرانی‌هاست، در سال ۱۳۸۵!

اگر در بخش اعشاری عددی، دسته‌ای از ارقام همیشه پشت سرهم تکرار شوند، به این دسته از ارقام «دوره‌ی گردش» آن عدد می‌گوییم و ارقام دوره گردش را درون پرانتز قرار می‌دهیم.

بنابراین سه عدد داده شده‌ی بالا را چنین می‌نویسیم:

این عدد دوره‌ی گردشی یک رقمی دارد! $۲۵۱/(۳)$

$۶۰/۲۴(۳)$

$-۲۱/(۴۵۶)$

۳- الف) آیا امکان دارد دوره‌ی گردش عددی هم دو رقمی باشد هم چهار رقمی؟

ب) آیا امکان دارد دوره‌ی گردش عددی هم دو رقمی باشد هم سه رقمی؟

۴- کدام‌یک از اعداد زیر با هم برابرند؟

$۱/۰(۱۰)$ $\quad$ $۱/(۰۱۰)$ $\quad$ $۱/(۰۱)$

$۱/۰(۱۰۱)$ $\quad$ $(۱/۰۱)$ $\quad$ $۱/۰۱۰۱(۰۱۰۱)$

۵- کدام‌یک از اعداد زیر به صفر ختم می‌شوند؟

$۴۱/(۴۰)$ $\quad$ $۴۱/(۰۴)$ $\quad$ $۴۱/۴(۰)$

۶- $۳۲۱/(۴۵۶)$ را در هر یک از اعداد زیر ضرب کنید.

$۱۰^۶$ $\quad$ $۱۰^۵$ $\quad$ $۱۰^۴$ $\quad$ $۱۰^۳$ $\quad$ $۱۰^۲$ $\quad$ ۱۰

۷- $۳۲۱/(۴۵۶)$ را بر هر یک از اعداد زیر تقسیم کنید.

$۱۰^۶$ $\quad$ $۱۰^۵$ $\quad$ $۱۰^۴$ $\quad$ $۱۰^۳$ $\quad$ $۱۰^۲$ $\quad$ ۱۰

۸- به عملیات زیر دقت کنید.

$a = ۴/(۷)$

چون دوره‌ی گردش یک رقم دارد، دو طرف تساوی بالا را در $۱۰^۱$ ضرب می‌کنیم.

$۱۰a = ۴۷/(۷)$

اکنون دو تساوی بالا را از هم کم می‌کنیم.

$$۱۰a - a = ۴۷/(۷) - ۴/(۷)$$
$$\Longrightarrow \quad ۹a = ۴۳ \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{۴۳}{۹}$$

عملیات بالا نشان می‌دهد که $۴/(۷)$ عددی گویاست.

الف) با تقسیم ۴۳ بر ۹ نشان دهید که $۴/(۷) = \frac{۴۳}{۹}$.

ب) نشان دهید که $۵/(۶)$ عددی گویاست.

۹ــ به عملیات زیر دقت کنید.

$b = ۴/(۷۱)$

چون دوره‌ی گردش دو رقم دارد، دو طرف تساوی بالا را در $۱۰^{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$۱۰۰b = ۴۷۱/(۷۱)$

اکنون دو تساوی بالا را از هم کم می‌کنیم.

$$۱۰۰b - b = ۴۷۱/(۷۱) - ۴/(۷۱)$$
$$\Longrightarrow \quad ۹۹b = ۴۶۷ \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{۴۶۷}{۹۹}$$

عملیات بالا نشان می‌دهد که $۴/(۷۱)$ عددی گویاست.

الف) با تقسیم ۴۶۷ بر ۹۹ نشان دهید که $۴/(۷۱) = \frac{۴۶۷}{۹۹}$.

ب) نشان دهید که $۵/(۶۱)$ عددی گویاست.

۱۰ــ به عملیات زیر دقت کنید.

$c = ۴/۵(۷۱)$

چون بعد از ممیز و پیش از شروع دوره‌ی گردش، یک رقم وجود دارد، دو طرف تساوی بالا را در $۱۰^{۱}$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰c = ۴۵/(۷۱)$$
$$\Longrightarrow \quad ۱۰۰۰c = ۴۵۷۱/(۷۱)$$
$$\Longrightarrow \quad ۱۰۰۰c - ۱۰c = ۴۵۷۱/(۷۱) - ۴۵۷۱/(۷۱)$$
$$\Longrightarrow \quad ۹۹۰c = ۴۵۳۶ \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{۴۵۳۶}{۹۹۰}$$

عملیات بالا نشان می‌دهد که $۴/۵(۷۱)$ عددی گویاست.

الف) با تقسیم ۴۵۳۶ بر ۹۹۰ نشان دهید که $۴/۵(۷۱) = \frac{۴۵۳۶}{۹۹۰}$.

ب) نشان دهید که $۵/۵(۶۱)$ عددی گویاست.

۱۱ــ نشان دهید اعداد زیر گویا هستند.

$۶۳/(۰۷۱)$ $\qquad$ $۶۳/۰(۷)$ $\qquad$ $۶۳/۰۷(۱۲)$

۱۲ــ با کمک گرفتن از سه روش ۸، ۹ و ۱۰ می‌توانیم ثابت کنیم که «هر عددی که دوره‌ی گردش دارد، گویاست».

اثبات این ادعا را می‌توانید در وب‌گاه در «دوره‌ی گردش عدد گویا» بیابید.

۱۳ــ گزاره‌ی بالا به‌کدام معنی است؟

الف) هر عددی که دوره‌ی گردش ندارد، گویا نیست.

ب) هر عددی که گویاست، دوره‌ی گردش دارد.

۱۴ــ الف) سعی کنید نمایش اعشاری اعداد زیر را بیابید.

$$\frac{۱}{۷} \qquad \frac{۲}{۵} \qquad \frac{۳}{۱۱}$$

ب) می‌توان ثابت کرد که «در نمایش اعشاری هر عدد گویا، دوره‌ی گردش دیده می‌شود».

اثبات این ادعا را می‌توانید در وب‌گاه در «نمایش اعشاری یک عدد گویا» ببینید.

پ) درستی «ب» را برای $\frac{۴۹}{۲۶}$ بررسی کنید.

۱۵ــ الف) ثابت کنید که $۰/(۹) = ۱$.

ب) ثابت کنید که $۷/۴۰(۹) = ۷/۴۱$.

پ) ثابت کنید که $۷/۴۱(۹) = ۷/۴۲$.

ت) $-۷/۴۲$ را به‌صورتی که ۹ دوره‌ی گردش آن باشد بنویسید.

ث) آیا هر عددی که به صفر ختم شود را می‌توان جوری نوشت که ۹ دوره‌ی گردش آن شود؟

۱۶ــ الف) درست یا غلط؟

$$۳/(۴) - ۲/(۵) = ۰/(۹)$$

ب) محاسبه کنید.

$$۷/(۴۱) - ۳/(۴) = ?$$

اعداد حقیقی

۱ــ $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست.

برهان . زیرا اگر $\sqrt{۲}$ گویا باشد، در این صورت می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به صورت کسر شاده نشدنی $\frac{m}{n}$ بنویسیم که m و n دو عدد طبیعی باشند، بنابراین

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{۲}n = m \quad \Longrightarrow \quad ۲n^{۲} = m^{۲}$$

پس $m^{۲}$ زوج است؛ بنابراین m زوج است. بنابراین $m = ۲k$ که k عددی طبیعی است. پس

$$\left.\begin{array}{r} ۲n^{۲} = m^{۲} \\ m = ۲k \end{array}\right\} \Longrightarrow ۲n^{۲} = (۲k)^{۲} \Longrightarrow ۲n^{۲} = ۴k^{۲} \Longrightarrow n^{۲} = ۲k^{۲}$$

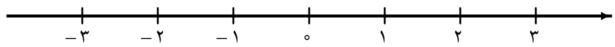
پس n^2 زوج است؛ بنابراین n زوج است.

چون m و n هر دو زوج شدند پس کسر $\frac{m}{n}$ ساده شدنی است.

چنین چیزی امکان ندارد. مگر می‌شود کسری ساده نشدنی، ساده شدنی باشد!

بنابراین $\sqrt{2}$ نمی‌تواند گویا باشد. $\square$

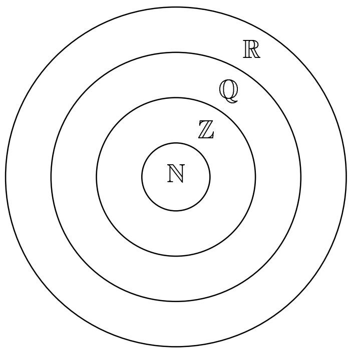
۲−



بعضی از نقاط روی محور اعداد بیانگر و نشانه‌ی اعداد گویا نیستند.

به اعدادی که چنین نقاطی نشان می‌دهند، «اعداد گنگ» می‌گوییم و این مجموعه از اعداد را با $\mathbb{Q}'$ نشان می‌دهیم. به مجموعه‌ی اعداد گویا و گنگ، اعداد حقیقی می‌گوییم و آن را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. با کمک $\mathbb{R}$ خیالمان راحت است که مکان همه‌ی نقاط محور را داریم.

اما جای $\mathbb{R}$ کجاست؟



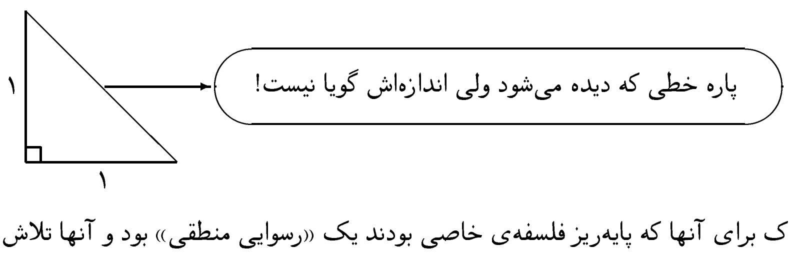
$\mathbb{R}$ این امکان را به ریاضی‌دان‌ها می‌دهد که درباره‌ی همه‌ی نقاط روی محور اعداد حرف بزنند. $\mathbb{R}$ هدیه‌ی ریاضی‌دان‌ها به دانشمندان علوم مهندسی است. به دانشمندانی که به شناخت ماهیت طبیعت و هستی می‌پردازند.

۳− همه چیز با «دست» به دست نیامده است! حتی همه‌ی دست‌آوردهای بشری.

هیچ‌گاه قدرت اندیشه را دست کم نگیرید.

گنگ بودن $\sqrt{2}$ یکی از شگفت‌آورترین اندیشه‌آوردهای بشری است. داستان کشف این عدد نیز جالب است:

فیثاغورسیان معتقد بودند که در اعداد طبیعی همه‌ی ویژگی‌های انسان و طبیعت دیده می‌شود. کشف گنگ بودن $\sqrt{2}$ (یعنی وجود پاره‌خطی که دیده می‌شود ولی قابل بیان با نسبت دو عدد طبیعی نیست) برای فیثاغورسیان بسیار شگفت‌انگیز و از طرفی نگران کننده بود.



این واقعیت درست و دردناک برای آنها که پایه‌ریز فلسفه‌ی خاصی بودند یک «رسوایی منطقی» بود و آنها تلاش کردند که گنگ بودن $\sqrt{2}$ را مخفی نگاه دارند. افسانه‌ای وجود دارد که شخص ناپرهیزگاری این راز را فاش کرد و آنها او را در دریا خفه کردند! روایت لطیف‌تری نیز هست که آنها او را از «انجمن برادری» شان بیرون کردند و به نشانه‌ی مرگش، سنگ قبری ساختند.

در طول تاریخ، اثبات‌های گوناگونی برای گنگ بودن $\sqrt{۲}$ به‌دست آمده است. نمونه‌ای از اثبات‌ها را در وب‌گاه در «about radical two» می‌توانید بیابید.

۴ــ الف) ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

ب) ثابت کنید $\sqrt{٦}$ گنگ است.

۵ــ با کمک همان روشی که در ۱ به کار گرفته شد، می‌توان ثابت کرد:

اولاً اگر p عددی اول باشد، $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

ثانیاً اگر n عددی طبیعی باشد ولی مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ عددی گنگ خواهد شد.

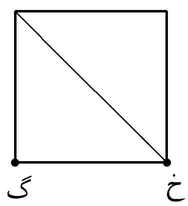
برای دیدن اثبات ادعای دوم می‌توانید به در وب‌گاه به «گنگی رادیکال n» مراجعه کنید.

توضیح دهید که چرا درستی ادعای نخست از ادعای دوم به‌دست می‌آید؟

٦ــ الف) آیا می‌توان با کمک دوپیمانه به گنجایش ۲ و $\sqrt{۲} - ۲$ لیتری فقط $\sqrt{۲}$ لیتر از آب دریای خزر و خلیج «همیشه» فارس را جابه‌جا کرد؟

ب) یک لیتر را چطور؟ آیا می‌توان با همان پیمانه‌ها فقط یک لیتر از آب دو دریا را جابه‌جا کرد؟

۷ــ (گرگ نادان ــ خرگوش لرزان)

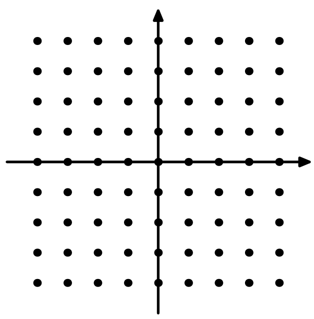


گرگ و خرگوشی داریم که هر کدام بنابه دلیلی با سرعت یکسانی فقط می‌دوند و می‌دوند؛ زیرا گرگ گرسنه است و خرگوش ترسیده. مطابق شکل گرگ از نقطه‌ی «گ» ساعت‌گرد به پیرامون مربع و خرگوش از نقطه‌ی «خ» روی قطر مربع می‌دوند.

آیا دل گرگ از عزا در می‌آید؟

۸ــ ثابت کنید که اگر مستطیلی به طول a و به عرض b را بتوان به مربع‌های مساوی تقسیم کرد، آنگاه $\frac{a}{b}$ عددی گویاست؟

۹ــ در دستگاه مختصات به نقطه‌ای که هر دو مختصات آن صحیح باشد، « نقطه‌ی شبکه‌ای» می‌گوییم.



الف) خطی دلخواه بکشید که از مبدا مختصات بگذرد، آیا این خط به نقطه‌ای شبکه‌ای برخورد می‌کند؟

ب) آیا امکان دارد خطی که از مبدا می‌گذرد از هیچ‌یک از نقاط شبکه‌ای (به‌جز مبدا) رد نشود؟

حساب حقیقی

۱ — می‌خواهیم ثابت کنیم «قرینه‌ی هر عدد گویا، عددی گویا می‌شود».

این‌طور می‌نویسیم:

اگر $\frac{a}{b}$ نمایش کسری عددی گویا باشد به‌طوری‌که a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، قرینه‌ی این عدد گویا برابر $-\frac{a}{b}$ می‌شود. چون $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ پس این عدد نیز عددی گویا می‌شود. بنابراین قرینه‌ی هر عدد گویا، عددی گویا می‌شود.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم «قرینه‌ی هر عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود».

اگر r عددی گنگ باشد، $-r$ حتماً گنگ می‌شود، زیرا اگر $-r$ عددی گویا باشد، (بنابر آنچه در بالا ثابت کرده‌ایم) قرینه‌ی این عدد یعنی $-(-r)$ عددی گویا می‌شود. اما می‌دانیم که $r = -(-r)$، پس r عددی گویا خواهد شد. $\perp$

بنابراین قرینه‌ی هر عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود.

الف) آیا معکوس هر عدد گویا، عددی گویا می‌شود؟

ب) ثابت کنید که «معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود».

۲ — ثابت کنید $-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ عددی گنگ است.

۳ — می‌خواهیم ثابت کنیم «جمع هر دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود».

این‌طور می‌نویسیم:

اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نمایش کسری دو عدد گویا باشند به‌طوری‌که a و c دو عدد صحیح و b و d دو عدد طبیعی باشند، می‌توانیم جمع این دو عدد را حساب کنیم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

این عدد کسری، مخرجی طبیعی و صورتی صحیح دارد؛ پس گویاست.

بنابراین جمع هر دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود.

الف) ثابت کنید «تفریق هر دو عدد گویا از هم، عددی گویا می‌شود».

ب) ثابت کنید «ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود».

پ) ثابت کنید «تقسیم هر عدد گویا بر هر عدد گویای ناصفر، عددی گویا می‌شود».

۴ — ثابت کنید که:

الف) جمع دو عدد گویا و گنگ، عددی گنگ می‌شود.

ب) تفریق هر دو عدد گویا و گنگ از هم، عددی گنگ می‌شود.

پ) تقسیم هر عدد گویا بر عددی گنگ، عددی گنگ می‌شود.

۵− این ادعا نادرست است: «ضرب عددی گویا در عددی گنگ، عددی گنگ می‌شود».

اشکال اثبات زیر برای این ادعا را بیابید.

می‌خواهیم ثابت کنیم که ضرب عدد گویای r در عدد گنگ s، عددی گویا نمی‌شود. برای این‌کار این‌طور می‌نویسیم:

اگر rs برابر عدد گویای t شود، در این صورت داریم:

$$rs = t \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{t}{r}$$

اما طرف راست تساوی از تقسیم دو عدد گویا به‌دست می‌آید. حاصل این تقسیم عددی گویا می‌شود؛ اما طرف سمت چپ تساوی عددی گنگ است. $\perp$

بنابراین حاصل‌ضرب عددی گویا در عددی گنگ، عددی گنگ می‌شود.

۶− الف) ثابت کنید همه‌ی اعداد زیر گنگ هستند.

$$۳ - \sqrt{۲} \qquad \sqrt{۲} - ۳ \qquad ۳\sqrt{۲} \qquad \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

ب) ثابت کنید عدد زیر گنگ است.

$$\cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \sqrt{۲}}}}}$$

۷− در هر مورد، بررسی کنید که به چه نتیجه‌ای می‌رسید.

الف) جمع دو عدد گنگ

ب) ضرب دو عدد گنگ

پ) تقسیم دو عدد گنگ

۸− فرض کنید که $a = ۱ + \sqrt{۲}$. ثابت کنید که

الف) $a^۲$ گنگ می‌شود.

ب) آیا $a^۳$ هم گنگ می‌شود؟

۹− الف) آیا اگر x عددی گنگ باشد، $x^۲$ هم گنگ می‌شود؟

ب) x^3 چطور؟

۱۰ــ ثابت کنید که هر دو عدد داده شده، گنگ هستند.

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}} \qquad \sqrt{1+\sqrt{3}}$$

۱۱ــ ثابت کنید

الف) اگر x^2 عددی گنگ باشد، x گنگ بوده است.

ب) اگر x عدد گنگ مثبتی باشد، $\sqrt{x}$ گنگ خواهد شد.

۱۲ــ ثابت کنید

الف) اگر x^3 عددی گنگ باشد، x گنگ بوده است.

ب) از بخش «الف» مسأله‌های ۱۱ و ۱۲ چه حدسی می‌زنید؟

۱۳ــ درست یا غلط؟

الف) مثلثی قائم‌الزاویه وجود دارد که طول سه ضلعش گویاست و با این همه طول ارتفاع وارد بر وترش گنگ است.

ب) مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی وجود ندارد که طول هر سه ضلعش گویا باشد.

۱۴ــ مکعب مستطیلی با سه ضلع نابرابر داریم. کدام حالت غیر ممکن است؟

الف) طول اضلاع و مساحت هر وجه گنگ باشند در حالی که حجم گویا باشد.

ب) طول اضلاع گنگ باشد در حالی که مساحت هر وجه و حجم گویا باشند.

نمایش اعشاری اعداد گنگ

۱ــ دیدیم که «اگر در نمایش اعشاری عددی دوره‌ی گردش وجود داشته باشد، آن عدد گویاست». از این واقعیت کدام نتیجه را می‌توان گرفت؟

الف) عددی که گنگ است در نمایش اعشاری‌اش، دوره‌ی گردش جود ندارد.

ب) اگر در نمایش اعشاری عددی دوره‌ی گردش نباشد، آن عدد گنگ است.

۲ــ به عدد زیر دقت کنید. برای به‌دست آوردن ادامه‌ی ارقام اعشار هر بار یکی به تعداد دسته ارقام صفر می‌افزاییم و سپس یک رقم «یک» می‌گذاریم و ... .

$$0/101001000100001\ldots$$

الف) با ادامه دادن ارقام اعشاری، نشان دهید که دوره‌ی گردش این عدد نمی‌تواند پنج رقمی باشد.

ب) با ادامه دادن ارقام اعشاری، نشان دهید که دوره‌ی گردش این عدد نمی‌تواند ده رقمی باشد.

پ) آیا دوره‌ی گردش این عدد می‌تواند صد رقمی باشد؟

۳ـ الف) چگونه می‌توان نشان داد که عدد بالا هیچ دوره‌ی گردشی نمی‌تواند داشته باشد؟

برای دیدن اثبات این ادعا در وب‌گاه به «بی دوره‌ی گردش» مراجعه کنید.

ب) از «الف» نتیجه بگیرید که عدد بالا گنگ است.

۴ـ به پاس تلاش لیوویل[۱] است که امروزه از گنگ بودن چنین عددی آگاهیم. لیوویل خاصیتی را در بین ارقام اعشاری اعداد کشف کرد که نداشتن آن ویژگی به گنگ بودن عدد می‌انجامد.

تا پیش از تلاش لیوویل ریاضی‌دان‌ها «گنگ بودن» را معادل «بی‌نظم بودن» می‌دانستند؛ زیرا آنها ثابت کرده بودند که نمایش اعشاری یک عدد گنگ دوره‌ی گردش ندارد.

$\sqrt{۲}$ تا ۳۰ رقم اعشار : ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۰۹۵۰۴۸۸۰۱۶۸۸۷۲۴۲۰۹

$\sqrt{۳}$ تا ۳۰ رقم اعشار : ۱٫۷۳۲۰۵۰۸۰۷۵۶۸۸۷۷۲۹۳۵۲۷۴۴۶۳۴۱۵۰۵

لیوویل نشان داد که یک عدد می‌تواند نمایش اعشاری منظمی داشته باشد ولی همچنان گنگ باشد. به زبان ساده او نشان داد که نظم در ارقام اعشار تنها به معنی داشتن دوره‌ی گردش نیست.

فراموش نکنید که برای کشف هیچ وقت دیر نیست!

۵ـ به عدد زیر «عدد لیوویل» می‌گویند.

$$\alpha = \frac{1}{10^{1}} + \frac{1}{10^{1\times 2}} + \frac{1}{10^{1\times 2\times 3}} + \frac{1}{10^{1\times 2\times 3\times 4}} + \cdots$$

الف) این عدد را تا بیست و چهار رقم اعشار بنویسید.

ب) با اینکه این عدد، عددی گنگ است اما تنها ثابت کنید دوره‌ی گردش این عدد ۱۰۰۰ رقمی نمی‌تواند باشد.

۶ـ هیچ‌گاه فراموش نکنید که برای کشف هیچ وقت دیر نیست!!

در بین دو جنگ اول و دوم جهانی چمپرنون[۲] عدد زیر را ساخت:

۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲...

الف) بیست رقم بعدی عدد را بنویسید.

---

[۱] Liouville

[۲] Champernowne

ب) آیا ارقام پشت سرهمی به‌صورت زیر در این عدد ظاهر می‌شوند؟

۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰

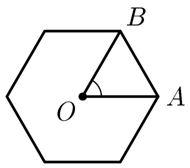
پ) این عدد چطور به نظر می‌رسد، گویا یا گنگ؟

۷− یک عدد (زیبا) بسازید. این عدد را چه می‌نامید؟

درباره‌ی پی

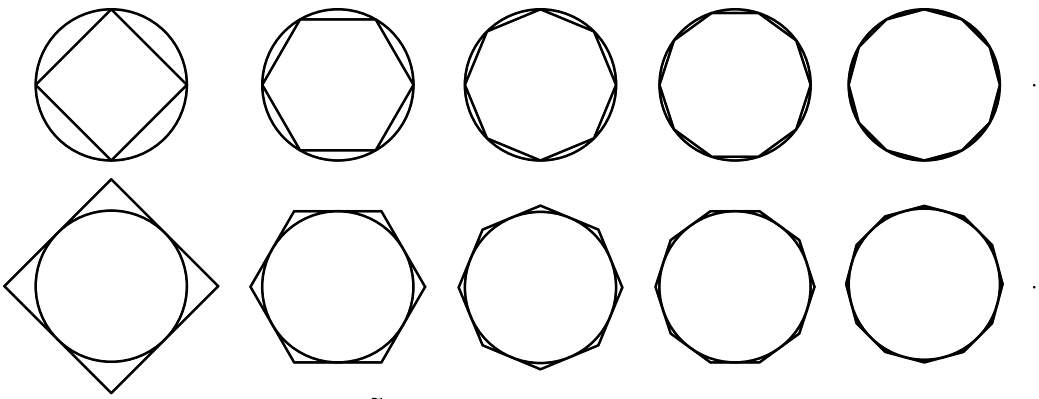
۱− فرض کنید n عدد طبیعی و زوج باشد؛

الف) اگر AB ضلعی از یک n ضلعی منتظم باشد و O مرکز تقارن آن، ثابت کنید که اندازه‌ی $\widehat{AOB}$ برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.



ب) ثابت کنید که نسبت محیط یک n ضلعی منتظم به قطرش، به بزرگی و کوچکی n ضلعی منتظم بستگی ندارد.

۲− با نگاهی به شکل‌های زیر درباره‌ی نسبت محیط یک دایره به قطرش به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟



۳− با کمک چندضلعی‌های منتظم می‌توان به محیط دایره نزدیک و نزدیک‌تر شد و از آنجا «نسبت محیط به قطر دایره» را حساب کرد و عدد تقریبی π را به‌دست آورد.

دوره‌ی اول) در ابتدای تمدن بشری، انسان با حساب کردن نسبت محیط دایره به قطر با کمک یک ریسمان به محاسبه‌ی π می‌پرداخت.

می‌خواهیم قدرت این روش را آزمایش کنیم.

الف) فرض کنیم که لیوانی استوانه‌ای شکل داریم که قطرش ۱۰۰ میلی‌متر باشد. پس از محاسبه‌ی محیط دایره‌ی لیوان با نخ باید قاعدتاً به عددی نزدیک به ۳۱۴ میلی‌متر برسیم. اگر در محاسبه‌ی قطر لیوان و همچنین در محاسبه‌ی طول نخ یک میلی‌متر خطا داشته باشیم، مقدار عدد π بین چه اعدادی تعیین می‌شود؟

ب) اگر به عنوان یک انسان دوران باستان، آزمایش «الف» را بارها تکرار می‌کردید کدام عدد را برای π برمی‌گزیدید؟

۳/۰۹ ۳/۱۰ ۳/۱۱ ۳/۱۲ ۳/۱۳ ۳/۱۴ ۳/۱۵ ۳/۱۶ ۳/۱۷ ۳/۱۸

دوره‌ی دوم) با پیشرفت تمدن‌های بشری، معماران و مهندسان از نیاز خود درباره‌ی دانستن مقدار دقیق‌تری از ارقام اعشار π خبر داند. در این زمان تعیین ارقام اعشاری π به دقت دست ساخته‌های بشر کمک می‌کرد. یکی از قدیمی‌ترین تلاش‌های بشری این دوره را می‌توان بر لوحی گلی یافت که نزدیک هفتاد سال پیش از خاک بیرون آورده شده است. این لوح که قدمت آن به هزاران سال پیش باز می‌گردد، در شوش پیدا شده است. در این لوح مقدار π به‌صورت $۳\ ۷'\ ۳۰''$ محاسبه شده است.

الف) مکان شوش را در نقشه‌ی جهان مشخص کنید.

ب) $۳\ ۷'\ ۳۰''$ را به‌صورت امروزین بازنویسی کنید.

دوره‌ی سوم) با شکل‌گیری تمدن‌ها و برطرف شدن نیاز ظاهری آنها به دانستن ارقام اعشار π، به‌دست آوردن ارقام این عدد مسابقه‌ای علمی گشت. مسابقه‌ای که حتی امروز هم ادامه دارد. در این باره غربی‌ها گاه‌شماری π را نقل می‌کنند. نکته‌ای جالب توجه در این گاه‌شماری وجود دارد:

۱۴۲۹ میلادی: غیاث الدین جمشید کاشانی، π را تا ۱۶ رقم اعشار حساب کرد.

۱۵۷۹ میلادی: ویت[۱]، π را تا ۹ رقم اعشار حساب کرد.

الف) با دقت در این دو تاریخ به چه نکته‌ای پی می‌برید؟

ب) در گاه‌شماری π رفتارهای جالب این عدد هم نقل می‌شود. برای مثال:

۱۶۵۰ میلادی: والیس[۲]، رابطه‌ی زیر را کشف کرد:

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲ \times ۲ \times ۴ \times ۴ \times ۶ \times ۶ \times ۸ \times \cdots}{۱ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵ \times ۷ \times ۷ \times \cdots}$$

۱۶۷۱ میلادی: گرگوری[۳]، رابطه‌ی زیر را کشف کرد:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots$$

با اینکه هر دو مورد داده شده زیباست ولی برای ریاضی‌دان‌ها بسیار مهم است که بدانند با کدام‌یک از این رابطه‌ها می‌توان سریع‌تر ارقام $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۴}$ را حساب کرد. حدس می‌زنید کدام‌یک؟

---

[۱] Viéte

[۲] Wallis

[۳] Gregory

پ) در گاه‌شماری π به دو کشف زیر برمی‌خوریم. جاهای خالی را با دو عدد ۱۷۶۷ و ۱۷۹۴ پر کنید.

...... میلادی: لژاندر[۴]، ثابت کرد که π^{2} گنگ است.

...... میلادی: لامبرت[۵]، ثابت کرد که π گنگ است.

ت) برای دیدن گاه‌شماری π می‌توانید با کلیدواژه‌ی «chronology of pi» به جستجوی اینترنتی بپردازید.

۴— مقدار π تا ۶۰ رقم اعشار برابر است با

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰۹۷۴۹۴۴

الف) خوارزمی در کتاب گران‌قدر «الجبر و المقابله» در باره‌ی محاسبه‌ی محیط دایره می‌نویسد:

بهترین راه این است که قطر را در $\frac{۲۲}{۷}$ ضرب کنیم. این سریع‌ترین و ساده‌ترین روش است. خدای بزرگ بهتر می‌داند.

اگر در محاسبه‌ی محیط دایره به جای π از $\frac{۲۲}{۷}$ استفاده کنیم، چند درصد خطا کرده‌ایم؟

ب) از تقسیم عدد سه‌رقمی بر عددی دو رقمی، سعی کنید تقریب بهتری (نسبت به $\frac{۲۲}{۷}$) برای π به‌دست آورید.

۵— دانش‌آموزِ سؤال ۹ صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی، درواقع شعر زیر را دیده است:

گر کسی از تو بپرسد ره آمُختن پی — پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

خِرد و بینش و آگاهی دانشمندان — ره سرمنزل توفیق بما آموزد

الف) بیت دوم این شعر بیانگر چند رقم اعشاری π است.

ب) چرا این شعر از نظر دستوری ساختار درستی ندارد؟

پ) تا کنون هیچ کسی نتوانسته است جمله‌ای (یا شعری) بسازد که ارقام اعشاری π را تا ۳۲ رقم نشان دهد. فکر می‌کنید که چرا؟

۶— الف) در وب‌گاه در «یک هدیه» هدیه‌ای در انتظار شماست. π تا چندین رقم اعشار!

ب) به دست آوردن ارقام اعشار π تا چندین هزار رقم به چه درد می‌خورد؟

---

[۴] Legendre

[۵] Lambert

اگر توانستید مستطیل‌های خالی باقی‌مانده را با ایده‌ها و دیدگاه‌های گوناگون پر کنید، یک گام به دانشمند شدن نزدیک‌تر شده‌اید. همیشه در هر کار ایده‌های متفاوتی دنبال می‌شود. دانستن این ایده‌ها یک پله رو به جلوست!

۷— چرا عدد چمپرنون معروف شده است؟

۸— نقاشی زیر اثر یک ایرانی زبان است. با پیدا کردن ترجمه‌ی انگلیسی اعداد گویا و گنگ، به مشکل بزرگ این نقاشی پی ببرید.

نمادها و زبان ریاضی

۱— خوارزمی چنین گفته است:

«مقدار یک مربع چیست که وقتی بیست و یک درهم برآن افزوده شود، ده برابر جذرِ آن مربع به‌دست آید؟ پاسخ چنین است: تعداد جذرها را نصف کن؛ این نصف، پنج است. آن را در خودش ضرب کن؛ حاصل‌ضرب، بیست و پنج است. از این عدد، بیست و یک را (که به مربع افزوده بودیم) تفریق کن؛ باقی‌مانده، چهار است. جذر آن‌را به‌دست آور؛ این جذر، دو است. این را از نصف جذرها که پنج است تفریق کن؛ باقی‌مانده، سه است. این جذرِ مربعی است که آن‌را می‌خواستی؛ و خود مربع، نه است. یا این که می‌توانی جذر را به نصف جذرها اضافه کنی؛ مجموع، هفت است. این جذرِ مربعی است که آن‌را می‌خواستی؛ و خود مربع، چهل و نه است.

الف) بدون اینکه از قلم و کاغذ استفاده کنید، متن داده شده را بفهمید.

ب) اگر در زمان خوارزمی بودید، چه راهی برای بیان ساده‌تر این متن پیشنهاد می‌کردید.

پ) خوارزمی به زبان امروزی معادله‌ی $5x^2 = 40x$ را حل کرده است. این مسأله را به زبان خوارزمی بنویسید.

۲− دو مسأله‌ی زیر را بزرگان ایران‌زمین صدها سال پیش بدون استفاده از نمادهای متغیر مطرح کرده‌اند. آنها را بفهمید و سعی کنید پاسخ آن‌ها را بیابید.

الف) (ابن‌سینا) مجذور عددی در تقسیم بر ۹، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. آن عدد در تفسیم بر ۹، چه باقی‌مانده‌ای خواهد داشت؟

ب) (شیخ بهایی) چطور عدد ۱۰ را به دو تقسیم کنیم که تفاوت آن‌ها برابر ۵ شود؟

۳− الف) در متن‌های زیر بخشی از سیر تحول نمادگذاری و ریاضی‌نویسی در دوره‌ای دویست ساله آمده است. در هر مورد تشخیص دهید که این متن‌ها بیانگر چه معادله‌ای بوده است؟

الف	$-15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
ب	$14x + 15 = 71$
پ	$x^2 + 32x = 320$
ت	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
ث	$x^6 + 8x^3 = 20$
ج	$x + x^2 = 12$
چ	$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$
ح	$x^3 + 6x = 20$
خ	$x^2 = 12x - 36$
د	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
ذ	$4x^2 - 51x - 30 = 45$
ر	$3x^2 + 4 = 2x + 4$
ز	$2xA + 2x^2 = 4335$
ژ	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$

۱	۸۷۳ ه. ش. : $Trouame\ .I.n^\circ.\ che\ gi\bar{o}to\ al\ suo\ \bar{q}drat^\circ\ facia.\ 12.$
۲	۸۹۳ ه. ش. : $4\ Se.\ -\ 51\ Pri.\ -\ 30\ N\ dit\ is\ ghelijc\ 45$
۳	۹۰۰ ه. ش. : I □ e $32C^\circ$ − 320 numeri.
۴	۹۰۴ ه. ش. : Sit I $\mathfrak{z}$ aequatus 12 $\mathfrak{A}$ − 36
۵	۹۲۴ ه. ش. : cubus $\bar{p}$ 6 rebus aqualis 20
۶	۹۳۲ ه. ش. : 2 $\mathfrak{A}$ A + 2$\mathfrak{z}$. aequata. 4335
۷	۹۳۶ ه. ش. : $14.\ \Phi.\ +\ .15.\phi\ =\ 71.\ \phi.$
۸	۹۳۸ ه. ش. : I ◊ P 6ρ P 9 [I ◊ P 3ρ P 24.
۹	۹۵۱ ه. ش. : $\overset{\overset{6}{\smile}}{\text{I}}.$ p. $\overset{\overset{3}{\smile}}{8}.$ Eguale à 20
۱۰	۹۶۴ ه. ش. : 3② + 4 eqales à 2① + 4.
۱۱	۹۷۱ ه. ش. : IQC −15 QQ +85 C −225 Q +274 N aequata. 120
۱۲	۱۰۱۱ ه. ش. : $aaa\ -\ 3\ bba\ =\ +2\ ccc.$
۱۳	۱۰۱۶ ه. ش. : $yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$
۱۴	۱۰۷۲ ه. ش. : $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

ب) درستی ادعای زیر را بررسی کنید.

«رفته‌رفته زبان نگارش ریاضی بین‌المللی‌تر می‌شود.»