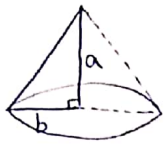


مثال ۲: یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳، ۴ و ۵ را حول ضلع قائمه بزرگتر دوران می‌دهیم. محاسبه شکل حاصل را بدست آوریم.



$$r = 4 \rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

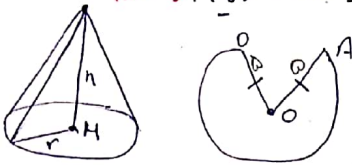
$$h = 5$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 5 = 80\pi$$

از دوران یک سیم دایره حول قطر آن، یک کره به وجود می‌آید.

مثال ۳: قطعه یک مخروط ۴ و ارتفاع آن ۳ است. گسترده مخروط را رسم کنید.

دو سیم مساحت جانبی و مساحت کل آنرا بدست آوریم. (رسم)



حجم و مساحت کره

دایره: مجموعه نقاطی از محیط است که همدان نقاط از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله است. به این اندازه ثابت: شعاع می‌گویند.

کره: مجموعه نقاطی از فضا است که همدان نقاط از یک نقطه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص است. به این اندازه ثابت، شعاع کره می‌گویند.

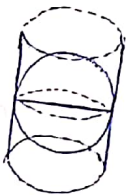
حجم کره

حجم کره این، شعاع R از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

* در شکل زیر کره را طوری درون استوانه قرار دادیم که کره کلاً از بالا و پایین و اطراف آن به استوانه عماس شده است.

در این حالت می‌توانیم کره را استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره صورت.



شعاع دایره استوانه برابر R و ارتفاع آن $2R$ است.

$$V_{\text{کره}} = V_{\text{استوانه}} - 2 \times V_{\text{شبه کره}} = \pi R^2 \times 2R - 2 \times \left(\frac{1}{2} \pi R^2 \times R \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

مثال: حجم کره را بدست آوریم که:

الف) شعاع آن ۴ باشد

$$R = 4 \rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \times 4^3 = 288\pi$$

$$R = 3 \rightarrow V = 36\pi$$

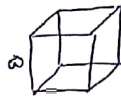
مساحت جانبی: $2\pi Rh$

کره: $4\pi R^2$

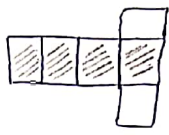
سطح

برای بدست آوردن مساحت جانبی و مساحت کل هر شکل می‌توان از رسم گسترده آن بر روی محور و محاسبه مساحت هر یک از سطوح استفاده کرد.

مثال ۱: با توجه به گسترده هر یک از حجم‌های زیر مساحت گسترده را بدست آوریم.



مساحت دور تا دور شکل = مساحت جانبی



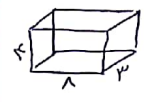
دور تا دور مربع مستطی نقاط زیرشده

$$= 4 \times S_{\text{مربع}} = 4 \times 5 \times 5$$

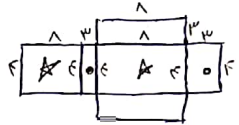
$$= 4 \times 5 \times 5 = 100$$

مساحت دور تا دور = مساحت جانبی + مساحت کل

$$4 \times 5^2 + 2 \times 5^2 = 6 \times 5^2$$



مساحت جانبی = $2 \times S_{\text{مستطیل}} + 2 \times S_{\text{مستطیل}}$

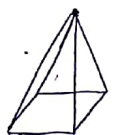


$S_{\text{مستطیل}} = 8 \times 4 = 32$

$S_{\text{مستطیل}} = 3 \times 8 = 24$

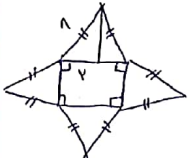
مساحت جانبی = $2 \times 32 + 2 \times 24 = 112$

مساحت کل = مساحت جانبی + مساحت دایره =



مساحت جانبی = $4 \times S_{\text{مثلث}} = 16 \sqrt{4}$

$S_{\text{مثلث}} = \frac{8 \times \sqrt{4}}{2} = 4\sqrt{4}$



$h^2 = r^2 + h^2 \rightarrow \sqrt{4}$

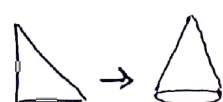
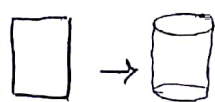
$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{مربع}}$

حجم‌های حاصل از دوران شکل‌های هندسی

از دوران مستطیل حول اضلاع آن استوانه بدست می‌آید.

از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول هر یک از اضلاع قائمه یک مخروط بدست می‌آید.

$V_{\text{استوانه}} = S_{\text{مربع}} \times h$



$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} S_{\text{مربع}} \times h$

مثال ۱ در کروی که به شعاع a منتهی به سطح کروی به سطح کل را بدست آوریم.

$$\frac{V_{کروی}}{S_{کروی}} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = a$$

مثال ۱ الف) مساحت جانبی کروی که به شعاع ۳ را بدست آوریم.

ب) مساحت جانبی استوانه محوطه بر کروی را بدست آوریم.

مثال ۱ مساحت سطح کروی برابر 100π است. شعاع و حجم کروی را بدست آوریم.

$$S = 4\pi r^2 \rightarrow 100\pi = 4\pi r^2$$

$$r^2 = 25 \rightarrow r = 5$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

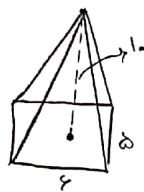
مثال ۱ شعاع کروی توپ که برابر ۳ است. مساحت سطح و حجم آنرا بدست آوریم.

$$S = S_{شعاع} + S_{دایره} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 = 3\pi r^2 \rightarrow S = 27\pi$$

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 = 18\pi$$



مثال ۱ قاعده یک هرم، مربعی است به ابعاد ۶ و ۵ سانتی متر. ارتفاع این هرم ۱ سانتی متر است. حجم این هرم؟

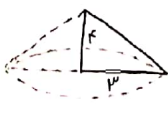


$$V_{هرم} = \frac{1}{3} \times S_{قاعده} \times h \rightarrow V_{هرم} = 10 \text{ cm}^3$$

$$S_{قاعده} = 5 \times 6$$

مثال ۱ مثلث قائم الزامی که به اضلاع قائم ۳ و ۴ سانتی متر را محل ضلع ۵ سانتی متر دوران داده ایم.

الف) این شکل حاصل از دوران چیست؟ ب) حجم آن چقدر است؟



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi$$

مساحت جانبی مخروط همان هرم است. با قاعده دایره شکل

$$V_{مخروط} = \frac{1}{3} S_{قاعده} \times h$$