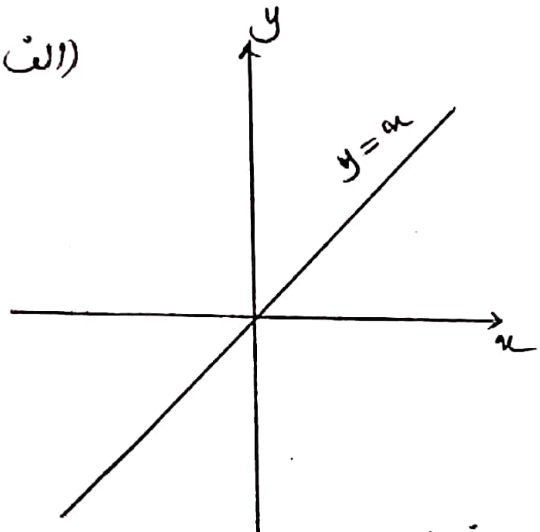
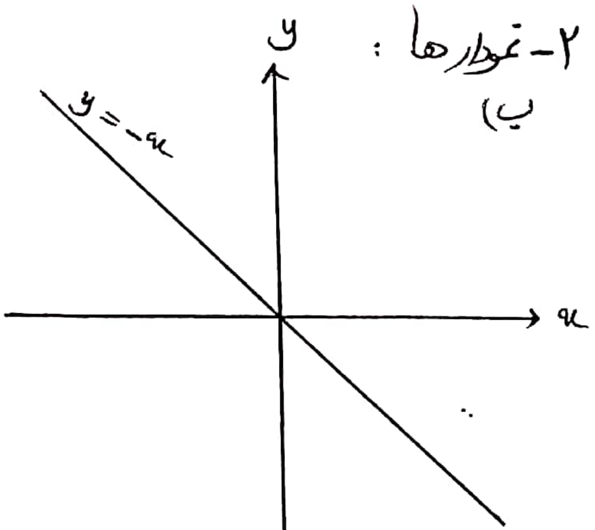
۲- نمودارها :

الف)



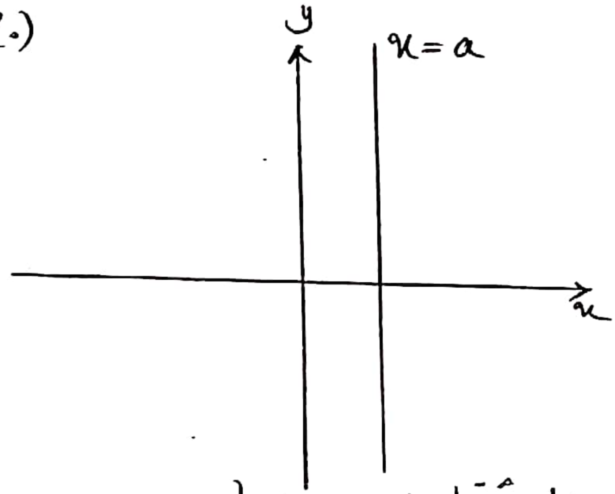
نیمساز ربع اول و سوم

ب)



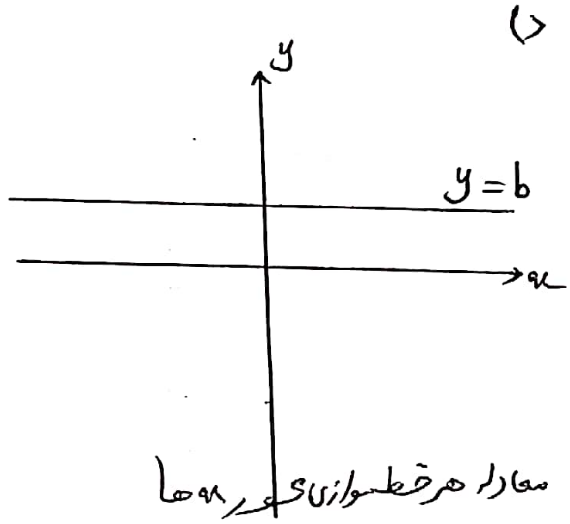
نیمساز ربع دوم و چهارم

ج)



معادله هر خط موازی محور yها

د)

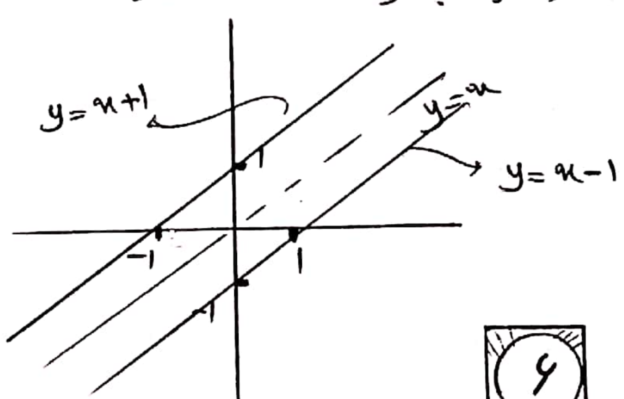


معادله هر خط موازی محور xها

نکته: نمودار $f(x) \pm a$: نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده و سپس کمک قضیه انتقال به اندازه a واحد به سمت بالا و یا پایین جابجا می‌شود.

$$\begin{cases} +a & \text{به بالا} \\ -a & \text{به پایین} \end{cases}$$

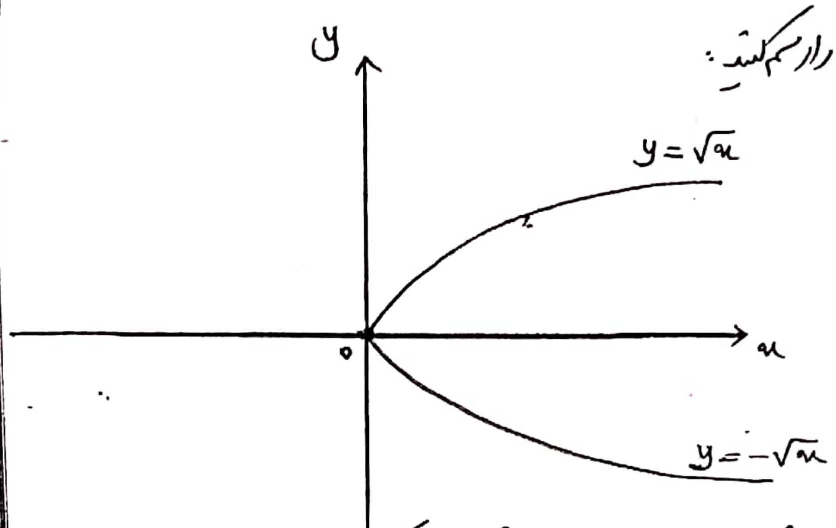
مثال ۱) $f(x)+1$ و $f(x)-1$ با شرط $f(x)=x$



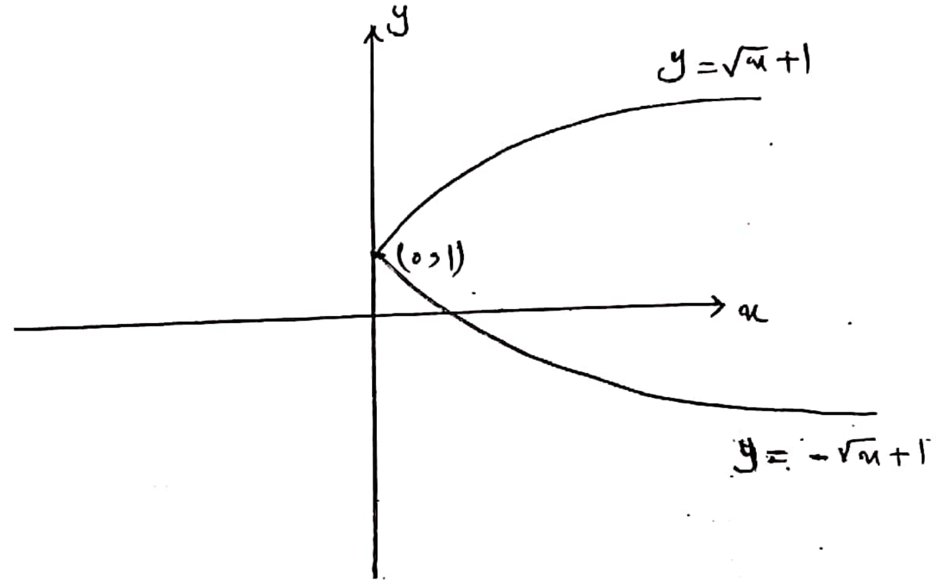
مثال ۲. نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید:

$f(x)=-\sqrt{x}$

«نسبت به محور x ها قرینه می شود»

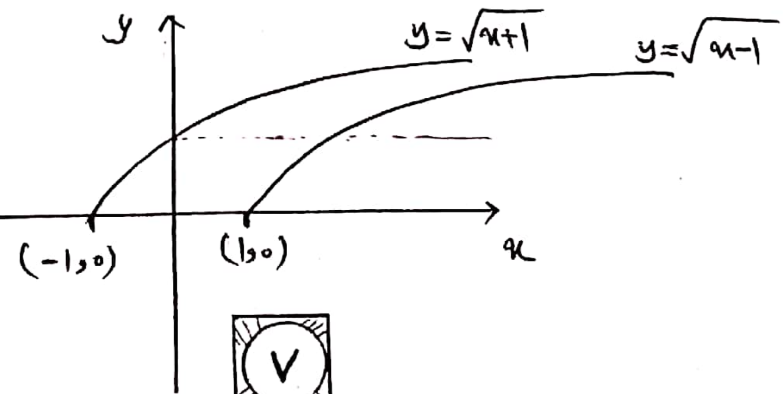


مثال ۳. نمودارهای $f(x)=\sqrt{x}+1$ و $f(x)=-\sqrt{x}+1$ را رسم کنید:

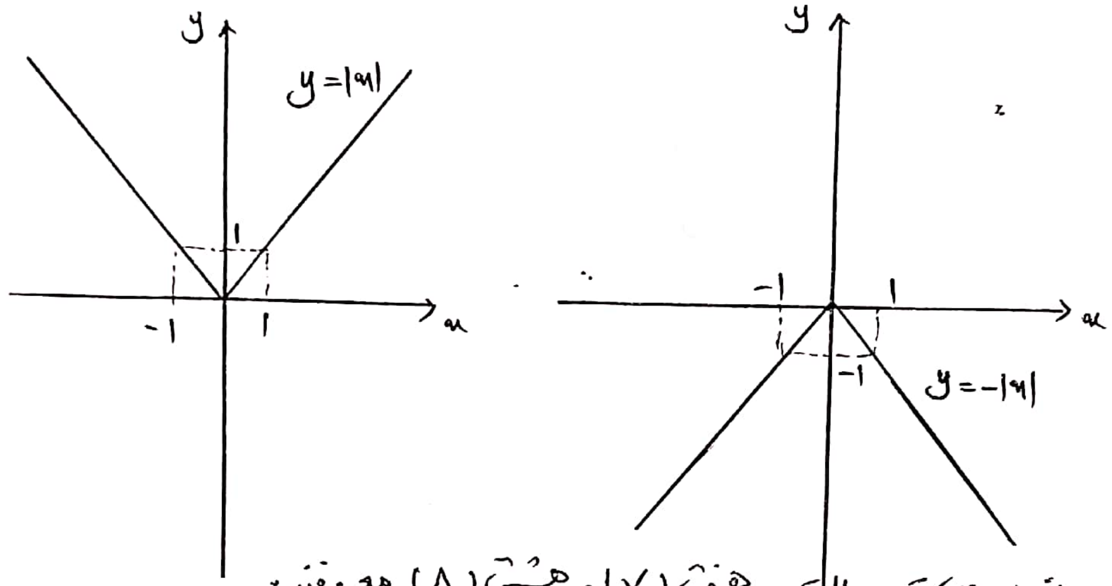


مثال ۴. نمودارهای $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $f(x)=\sqrt{x-1}$ را رسم کنید:

نکته: نمودارهای $f(x\pm a)$ ، درصورتی که a مثبت باشد به اندازه a واحد به سمت چپ و درصورتیکه a منفی باشد، به اندازه a واحد به سمت راست انتقال می یابند

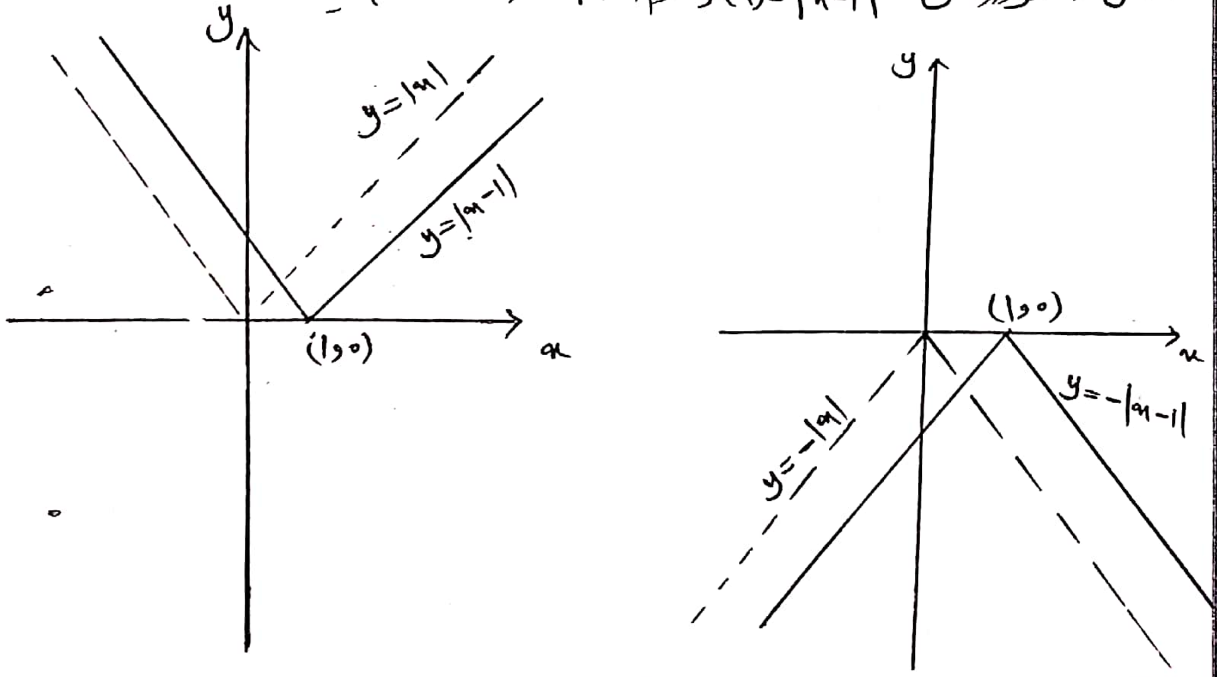


مثال ۵. نمودارهای $f(x)=|x|$ و $f(x)=-|x|$ را رسم کنید:



توجه: نمودارهای قدر مطلق به هفتی (۷) و هشتی (۸) معروفند.

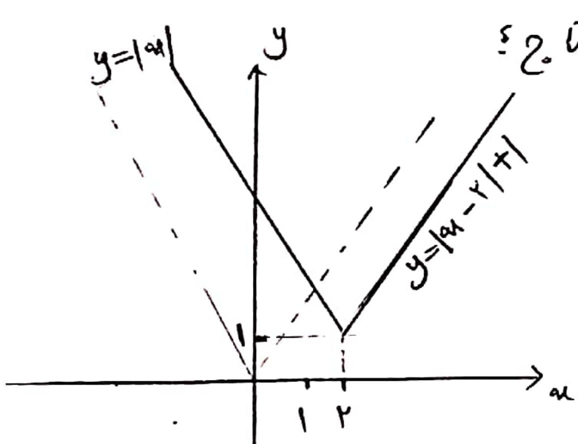
مثال ۶. نمودارهای $f(x)=|x-1|$ و $f(x)=-|x-1|$ را رسم کنید:



نکته: نمودارهای $f(x\pm a)\pm b$: نمودار $f(x)$ را رسم نموده سپس به اندازه a به سمت چپ یا راست (با توجه به علامت a) منتقل شده و سپس به اندازه b واحد به سمت بالا و یا پایین (با توجه به علامت b)، نمودار را جابجا می‌کنیم.

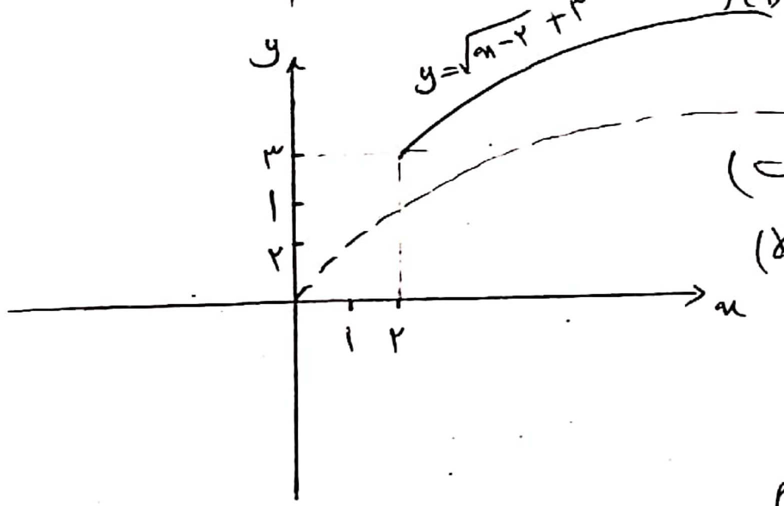
مثال ۷. مطلوبست رسم نمودارهای الف تا ج؟

الف) $f(x) = |x-2|+1$



$$\begin{cases} a=-2 & \text{(۲ واحد به سمت راست)} \\ b=+1 & \text{(۱ واحد به سمت بالا)} \end{cases}$$

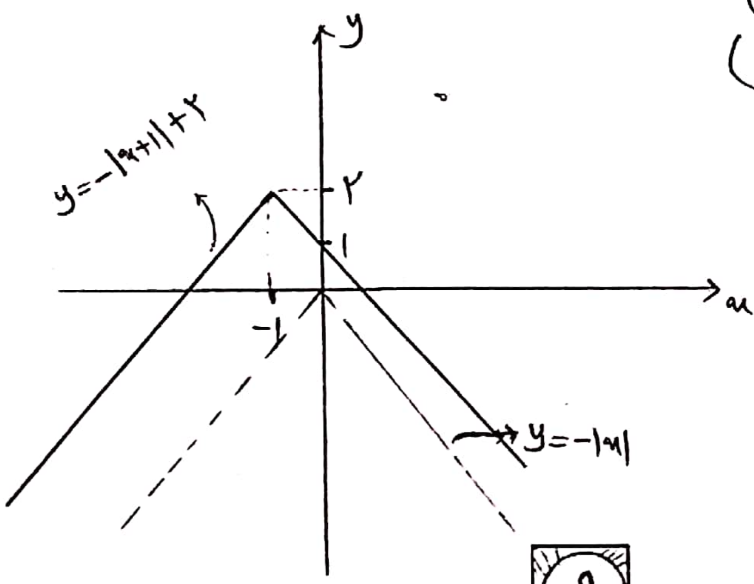
ب) $f(x)=\sqrt{x-2}+3$



$$\begin{cases} a=-2 & \text{(۲ واحد به سمت راست)} \\ b=+3 & \text{(۳ واحد به سمت بالا)} \end{cases}$$

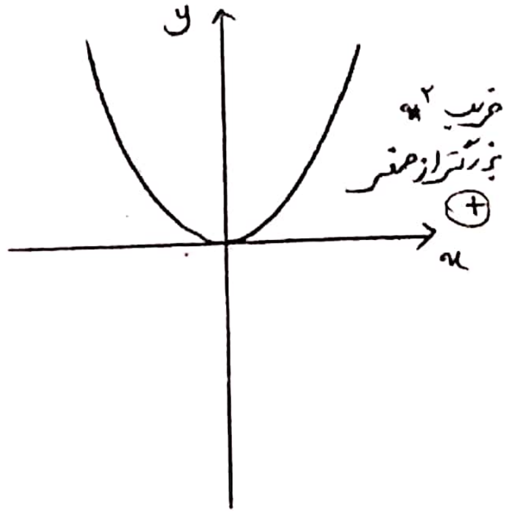
ج) $f(x)=-|x+1|+2$

$$\begin{cases} a=+1 & \text{(۱ واحد به سمت چپ)} \\ b=+2 & \text{(۲ واحد به سمت بالا)} \end{cases}$$

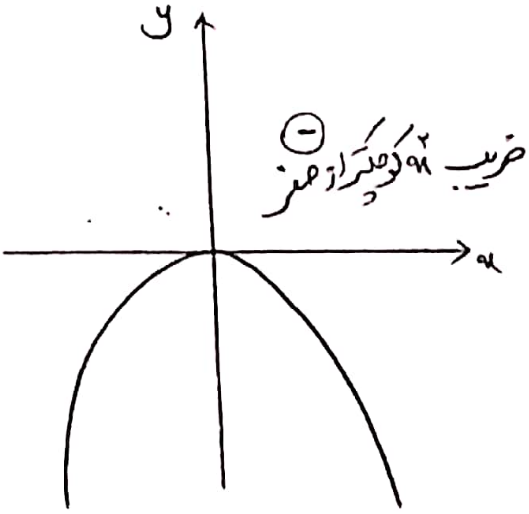


مثال ۸. مطلوبست رسم نمودارهای سهمی درجه ۲:

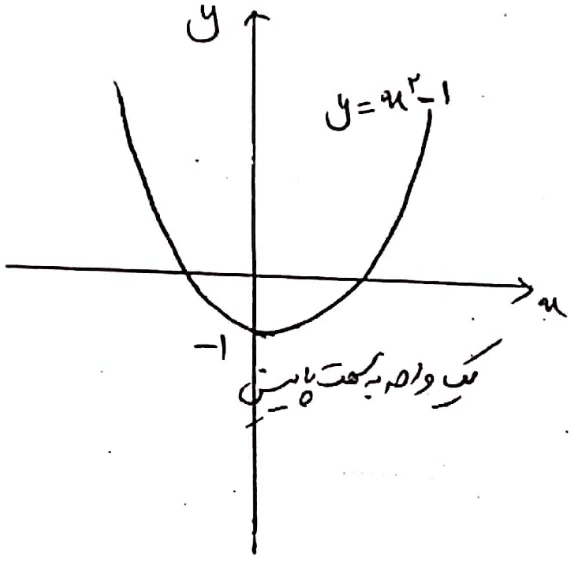
الف) $f(x)=x^2$

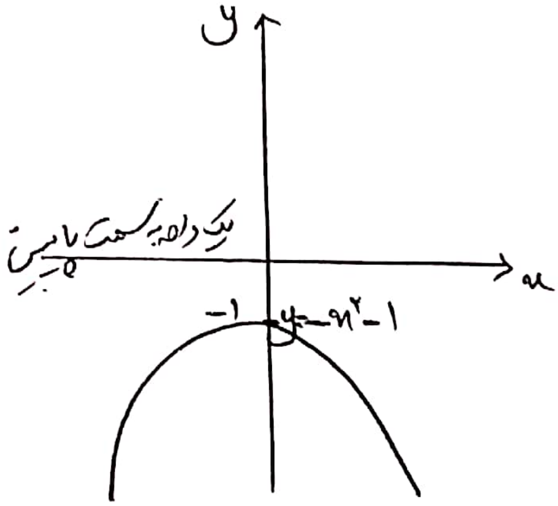


ب) $f(x)=-x^2$

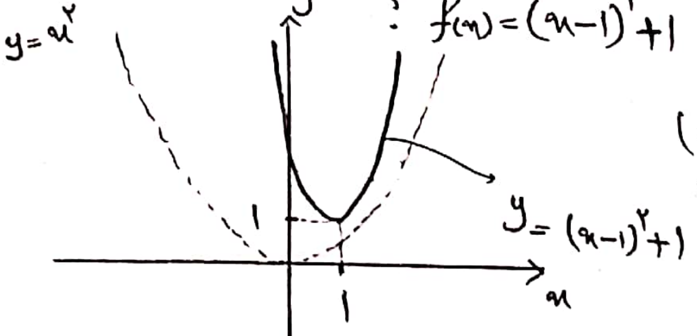


مثال ۹. مطلوبست رسم نمودارهای $f(x)=x^2-1$ و $f(x)=-x^2-1$



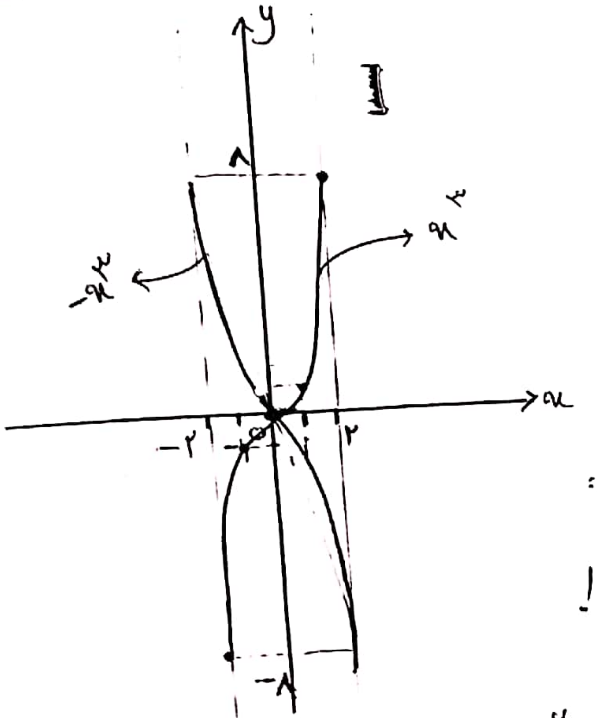


مثال ۱۰. مطلوبست رسم نمودار $f(x)=(x-1)^2+1$ ؟



$$\begin{cases} a=-1 & \text{(یک واحد به سمت راست)} \\ b=1 & \text{(یک واحد به سمت بالا)} \end{cases}$$

مثال ۱۱- مطلوب است رسم نمودارهای درجه ۳:



تابع $f(x) = x^3$ را با نقطه یابی رسم می‌کنیم:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

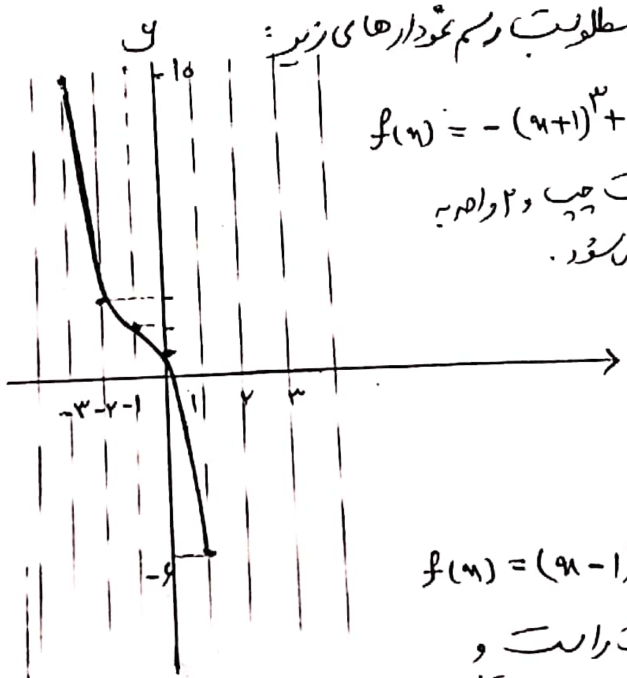
تابع $f(x) = -x^3$ نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:

* در این نمودارها هم از انتقال و هم از نقطه یابی کمک می‌گیریم!

مثال ۱۲- مطلوب است رسم نمودارهای زیر:

الف) $f(x) = -(x+1)^3+2$

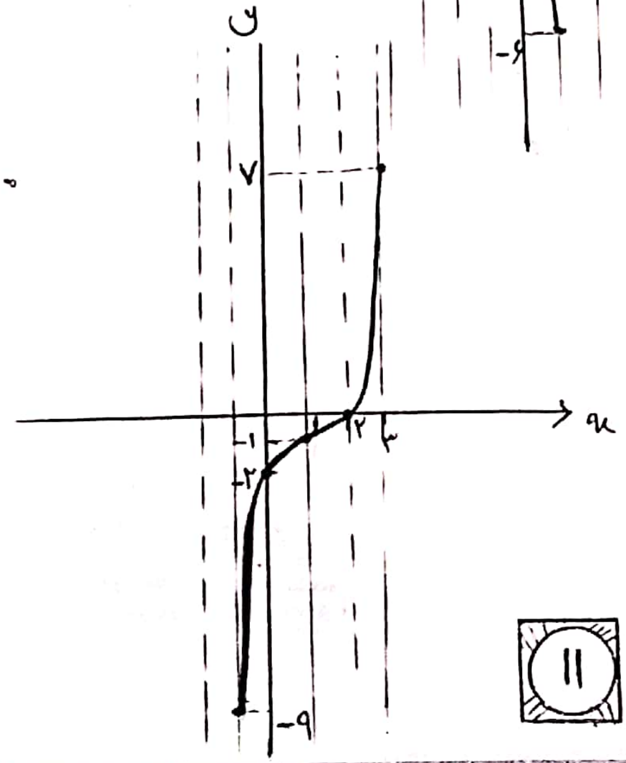
یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به بالا منتقل می‌شود.



x	0	-1	1	-2	-3
y	1	2	-6	3	10

ب) $f(x) = (x-1)^3-1$

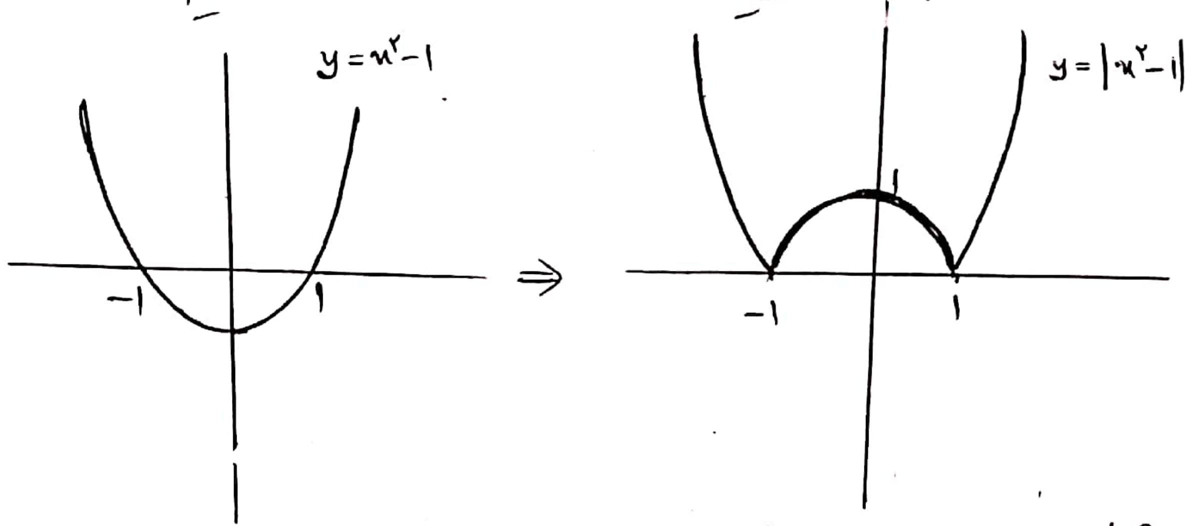
یک واحد به سمت راست و یک واحد به پایین انتقال می‌یابد



x	0	-1	1	2	3
y	-2	-9	-1	0	7

مثال ۱۳- مطلوبست رسم نمودار $f(x) = |x^2-1|$

نکته: در اینگونه نمودارها ابتدا نمودار x^2 را رسم کرده و پس x^2-1 را به کمک انتقال ترسیم می‌نمائیم و در آخر بعلت داشتن قدر مطلق؛ قسمتی از نمودار که زیر نمودار محور x ها (طولها) است را بصورت قرینه به سمت بالای نمودار x ها انتقال می‌دهیم.

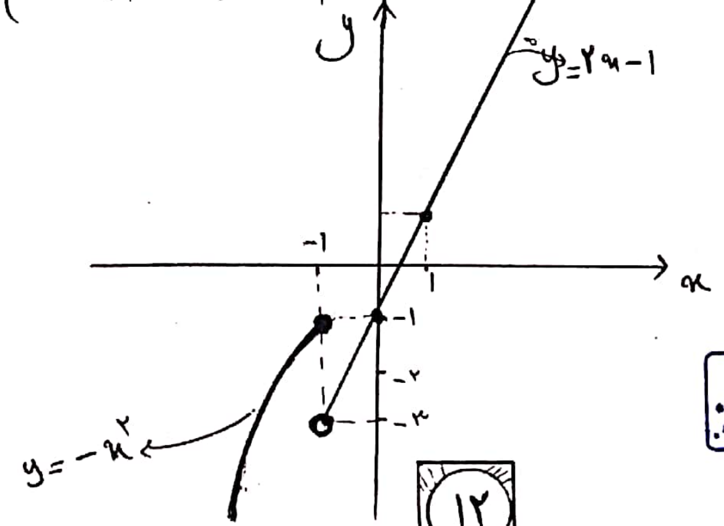


مثال ۱۴- نمودارهای چند ضابطه‌ای:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > -1 \\ -x^2 & x \leq -1 \end{cases}$$

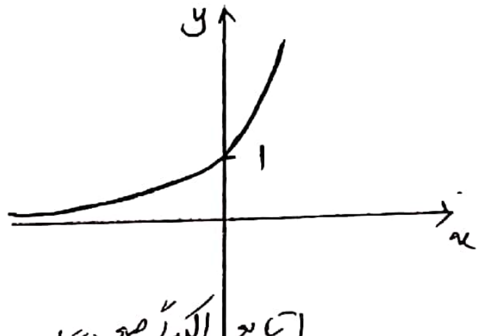
$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow \text{خط } y = 2x-1 \xRightarrow{\text{نقطه‌یابی}} \\ x < 1 \Rightarrow \text{سهمی درجه دوم} \end{cases}$$

x	y
0	-1
-1	-3
1	1



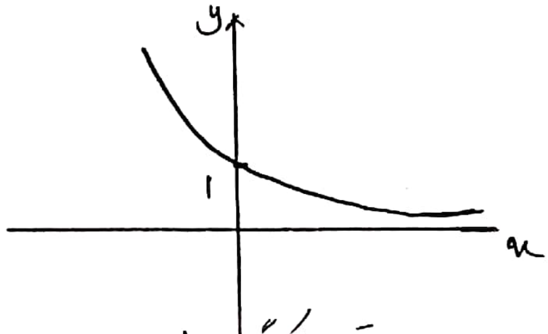
مثال ۱۵. تابع نمایی $y = a^x$

الف) $a > 1$



(تابع اکیداً صعودی)

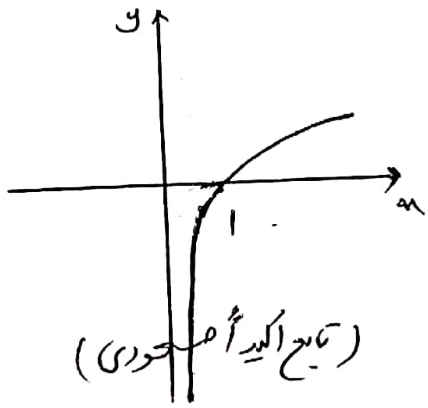
ب) $0 < a < 1$



(تابع اکیداً نزولی)

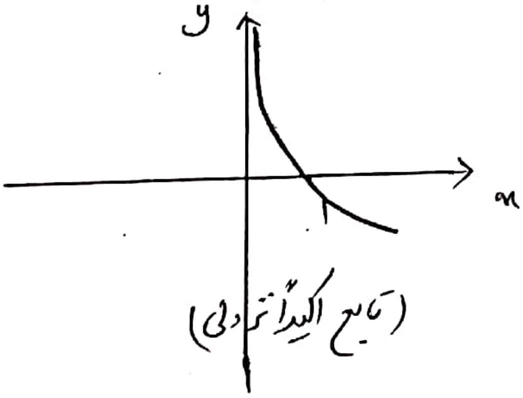
مثال ۱۶. تابع لگاریتمی $y = \log_b^x$

الف) $b > 1$



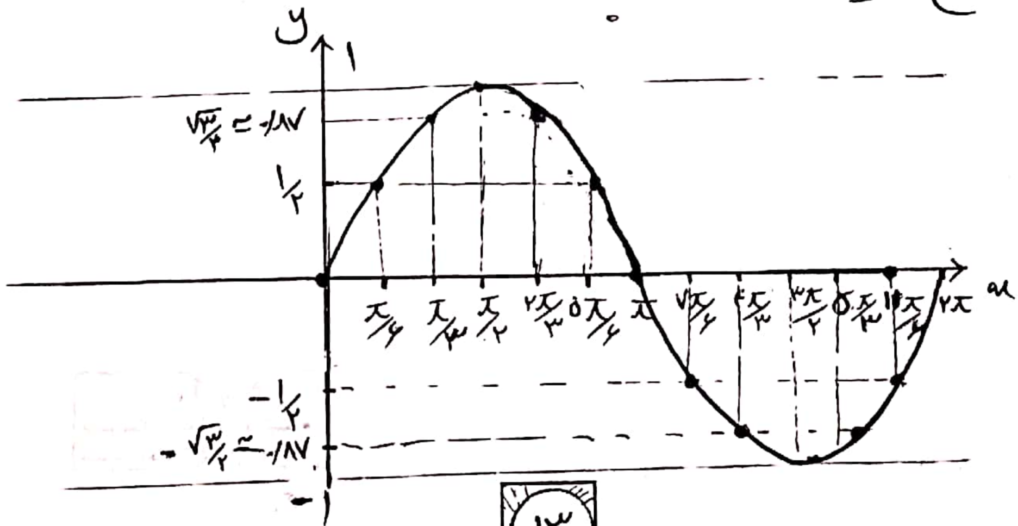
(تابع اکیداً صعودی)

ب) $0 < b < 1$

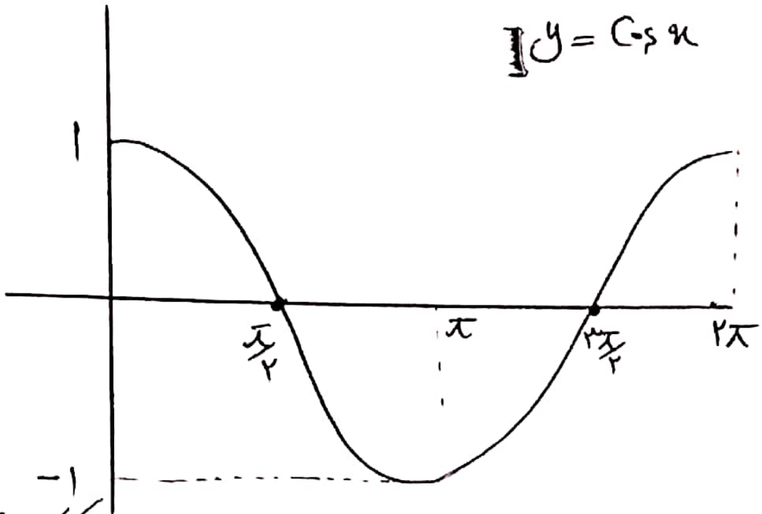


(تابع اکیداً نزولی)

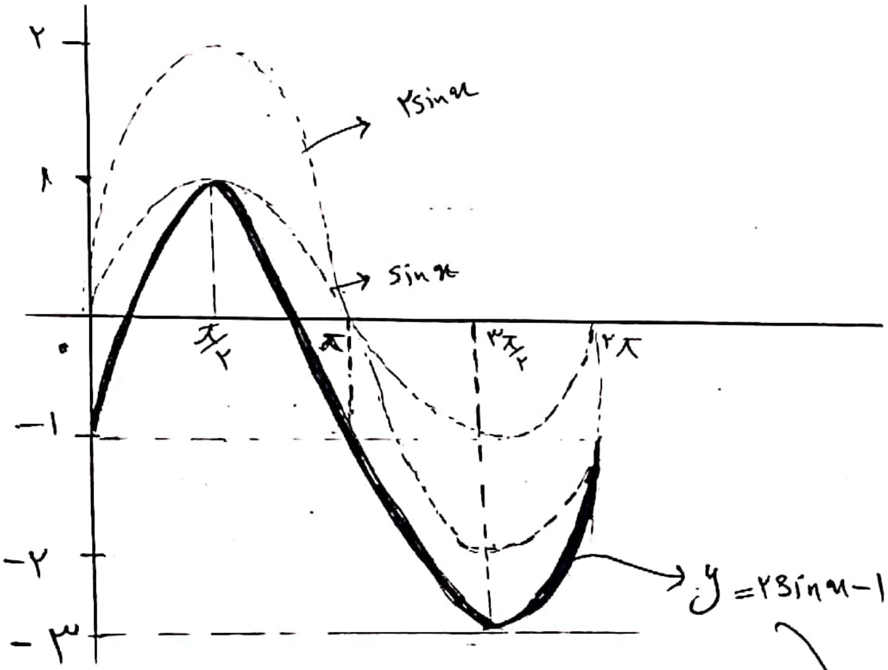
مثال ۱۷. تابع سینوسی $y = \sin x$



مثال ۱۸- تابع کسینوس $y = \cos x$



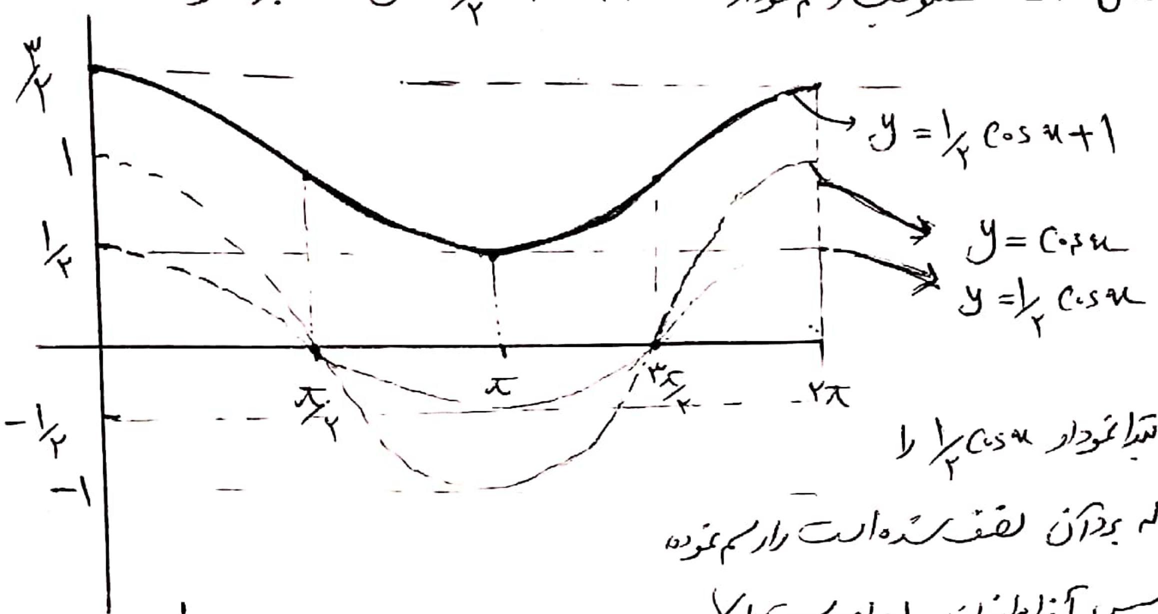
مثال ۱۹- مطلوبست رسم تابع $y = 2\sin x - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کمک انتقال؟



برد نمودار نسبت به محور y ها ۲ برابر می‌شود و سپس نمودار $2\sin x$ به اندازه ۱ واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	-1	-3	-1

مثال ۲۰- مطلوبست رسم نمودار $y=\frac{1}{2}\cos x+1$ در بازه $[0, 2\pi]$



ابتدا نمودار $\frac{1}{2}\cos x$ را که به صورت نقطه‌چین شده است را رسم نموده و پس آن را به اندازه ۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

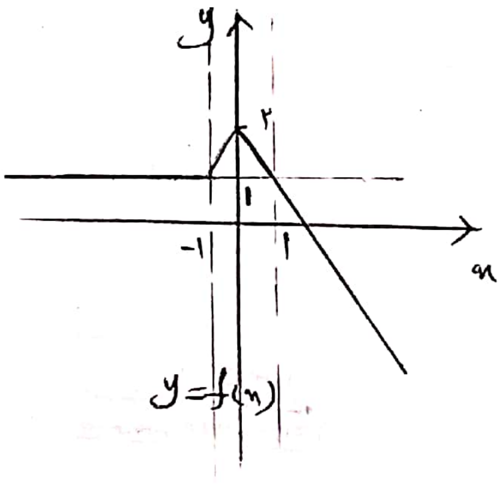
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

رسم نمودار $y=kf(x)$

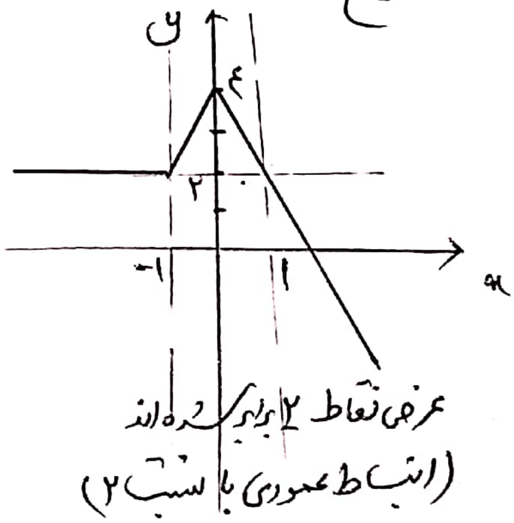
اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم برای رسم نمودار $y=kf(x)$، عرض هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.

۱- اگر $k>0$ باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم

الف) اگر $k>1$ باشد عرض نقاط تابع $kf(x)$ بزرگتر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌باشد و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور yها با نسبت k انبساط عمودی پیدا کرده است.

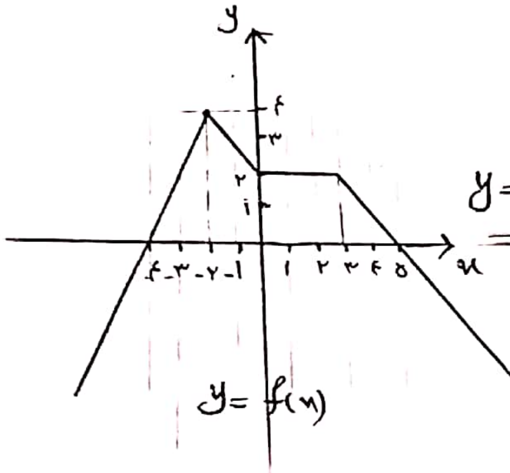


$\xrightarrow{y=2f(x)}$

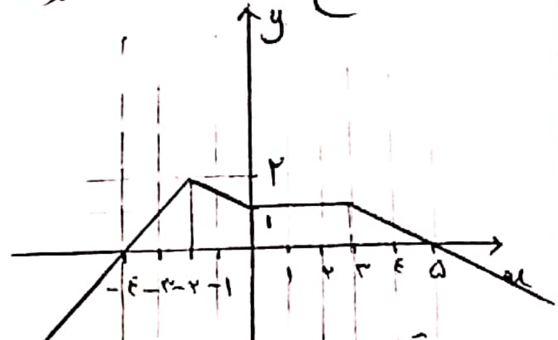


عرض نقاط ۲ برابر شده اند
(انبساط عمودی با نسبت ۲)

ب) اگر $0<k<1$ باشد عرض نقاط تابع $kf(x)$ کوچکتر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور yها انقباض عمودی یافته است.

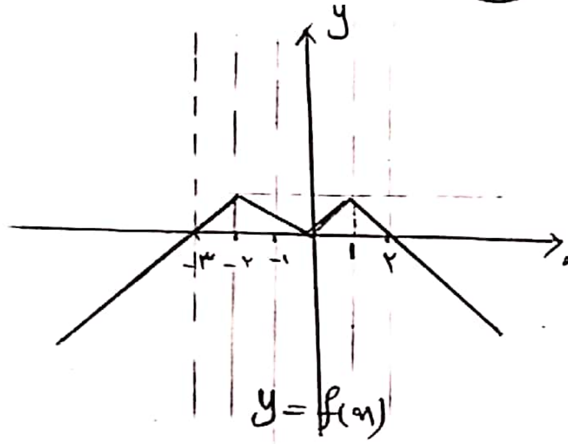


$y=\frac{1}{2}f(x)$

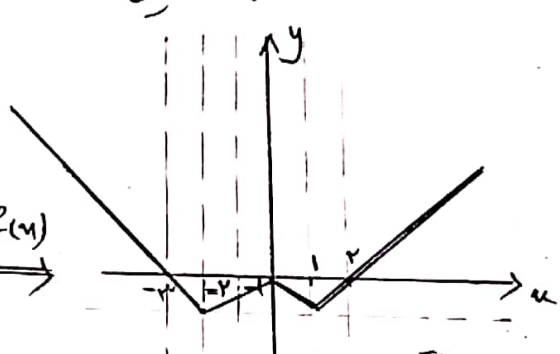


عرض نقاط $\frac{1}{2}$ برابر (نصف شده) و نمودار انقباض عمودی با نسبت $\frac{1}{2}$ دارد.

۲- اگر $k=-1$ باشد یعنی $y=-f(x)$، نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

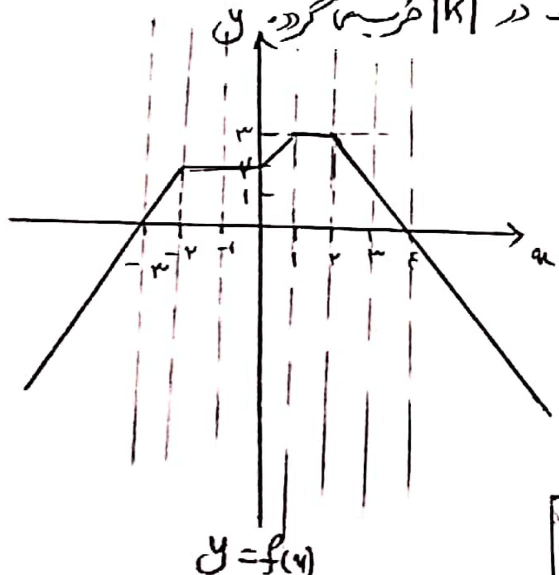


$y=-f(x)$

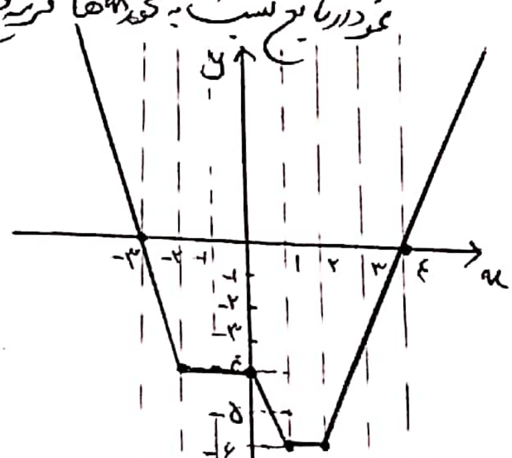


عرض نقاط در (-1) ضرب می‌شود.
(نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود)

۳) اگر $k<0$ باشد، عرض تمام نقاط k برابر می‌شود یعنی با توجه به منفی بودن k، مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه و بعد عرض نقاط در $|k|$ ضرب می‌گردد.



$y=-2f(x)$

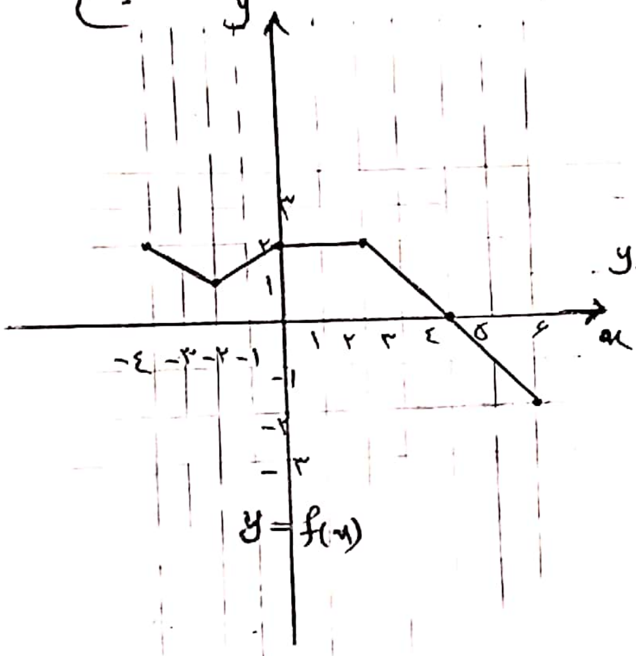


عرض تمام نقطه‌ها در (-2) ضرب می‌شود (قرینه نسبت به محور xها) سپس انبساط عمودی با نسبت 2

رسم نمودار $y=f(kx)$

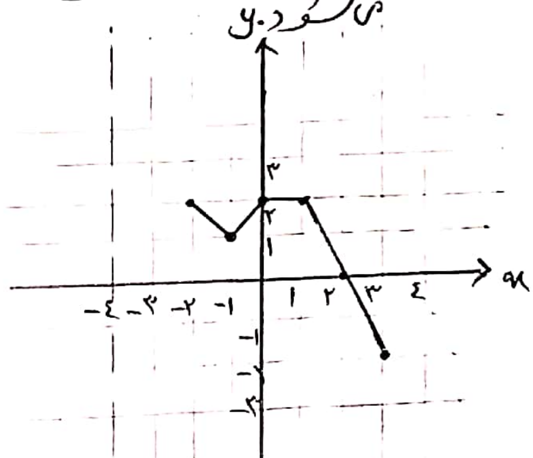
۱- نمودار تابع $y=f(kx)$ با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها بدست می‌آید. اگر $k>0$ باشد دو حالت داریم:

الف) اگر $k>1$ باشد نمودار تابع در راستای محور xها با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود یعنی طول هرکدام از نقاط تابع $y=f(kx)$ برابر $\frac{1}{k}$ طول نقطه متناظرش در نمودار تابع $y=f(x)$ می‌شود.



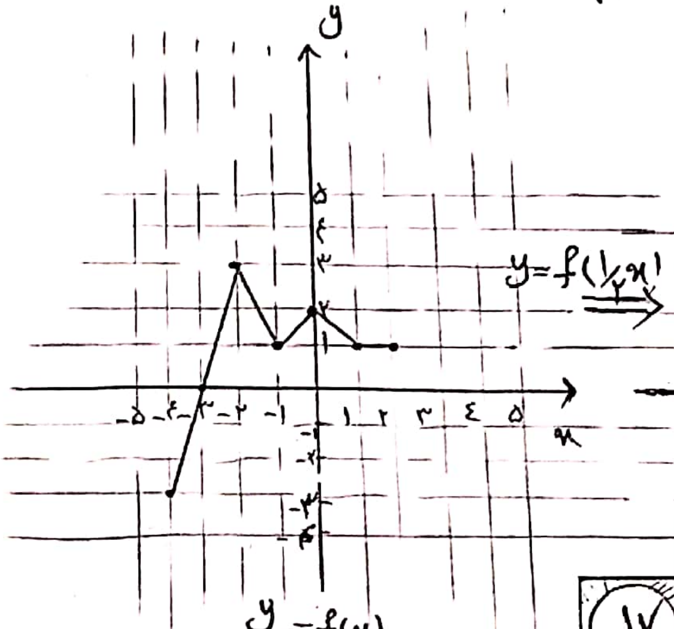
$y=f(x)$

$y=f(2x)$



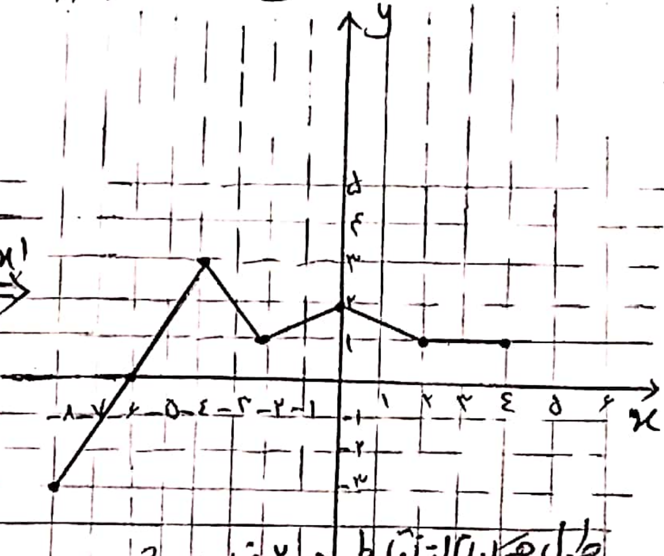
طول هرکدام از نقاط در $(\frac{1}{2})$ ضرب می‌شود
«انقباض افقی با نسبت $\frac{1}{2}$»

ب) اگر $0<k<1$ باشد نمودار تابع در راستای محور xها با نسبت $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود یعنی طول هرکدام از تابع $f(x)$ در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.



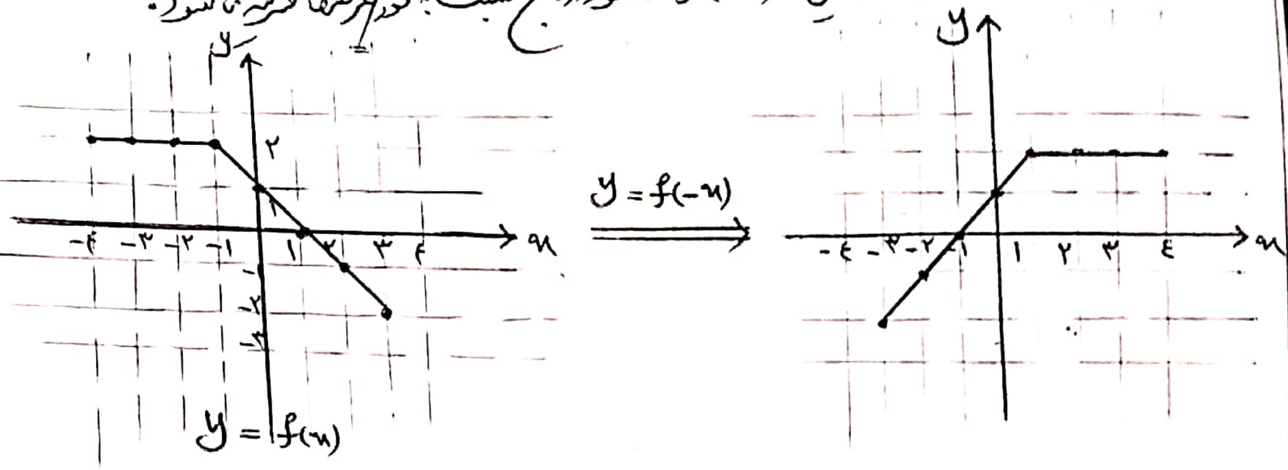
$y=f(x)$

$y=f(\frac{1}{2}x)$

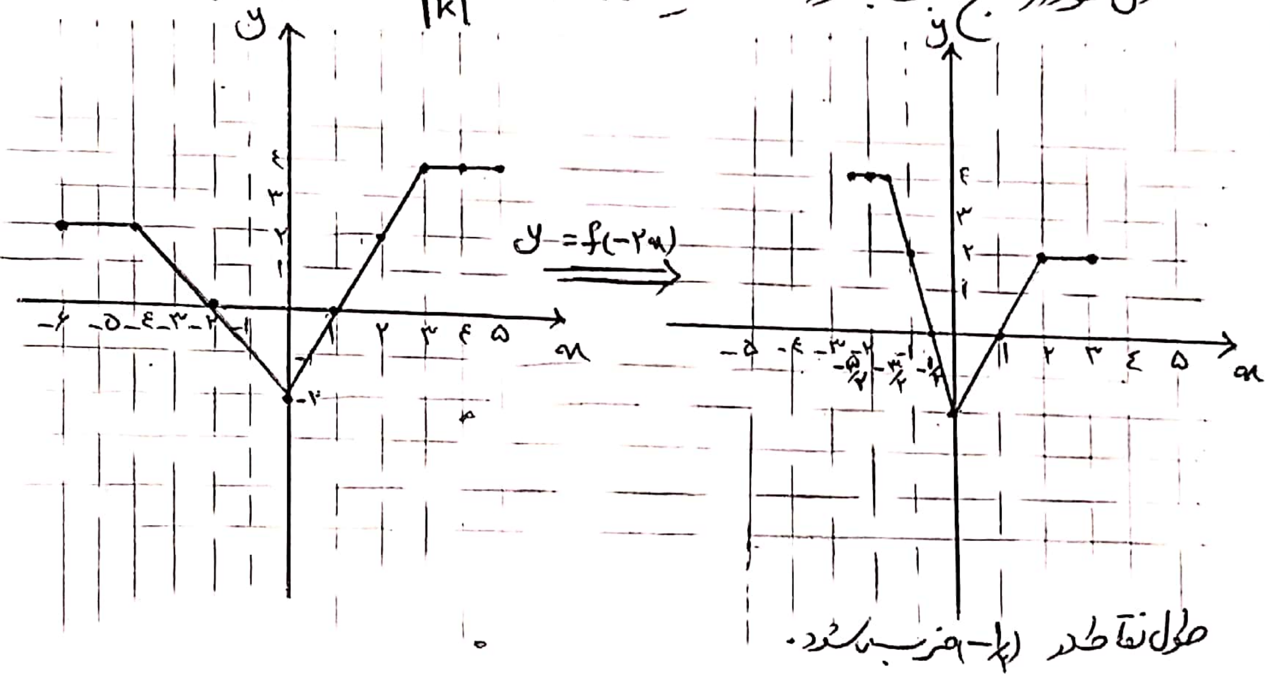


طول هرکدام از نقاط در ۲ ضرب می‌شود
(انبساط افقی با نسبت ۲)

۲- اگر $k=-1$ باشد یعنی $f(-x)$ ؛ نمودار تابع نسبت به محور yها قرینه می‌شود.



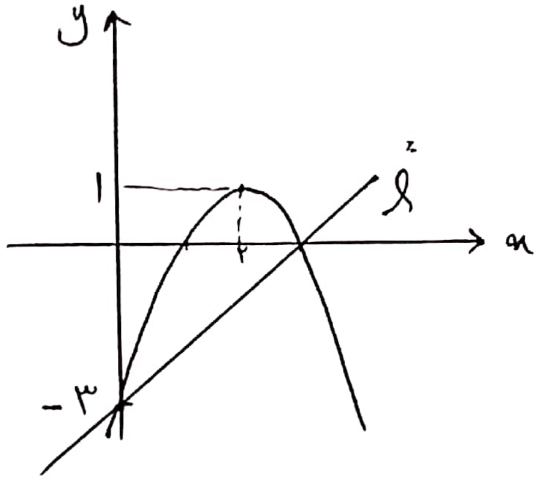
۳- اگر $k<0$ باشد، طول تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی بودن k مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور yها قرینه و بعد با نسبت $\frac{1}{|k|}$ منقبض یا منبسط می‌شود.



طول نقاط در $(-\frac{1}{2})$ ضرب می‌شود.

(قرینه نسبت به محور yها و انقباض افقی با نسبت $\frac{1}{2}$)

سؤال ۱- با توجه به شکل، محل برخورد محور تقارن سهمی و خط l چه فاصله‌ای تا مبدأ دارد؟



۱) $\sqrt{5}$

۲) $2\sqrt{5}$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۴) $3\sqrt{5}$

سهمی ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال یافته است.

رأس سهمی: $S(2,1) \xrightarrow[a<0]{\text{معادله سهمی}} y=a(x-2)^2+1$

$\xrightarrow[\text{را داخل معادله صدق بدهیم}]{(0,-3)} -3=a(0-2)^2+1 \Rightarrow -3=a(4)+1 \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

بنابراین معادله سهمی $y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3 \Rightarrow$ ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$-(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow -(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1,3$

نقاط روی خط l را بدست آوردیم $(3,0)$ و $(0,-3)$ حال معادله آن را نوشته و با معادله سهمی قطع می‌دهیم.

$m=\frac{0+3}{3-0}=\frac{3}{3}=1$

$y-0=1(x-3) \Rightarrow \boxed{y=x-3}$

معادله محور تقارن سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است.

$x=-\frac{4}{2(-1)}=\frac{4}{2}=2$

قطع می‌دهیم $\begin{cases} y=x-3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow y=-1 \Longrightarrow$ نقطه تقاطع $A\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+1^2}=\boxed{\sqrt{5}}$ گزینه «اول» جواب است.

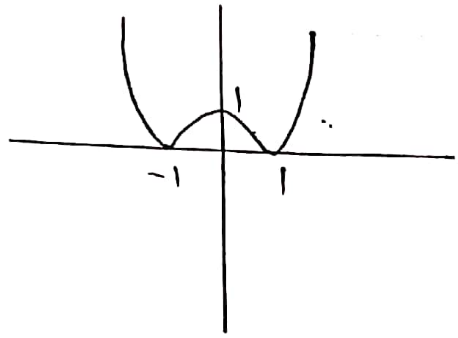
تست ۲- معادلهٔ $|x^2-1| = 2x-|x|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کافی است محل تلاقی دو نمودار $y=|x^2-1|$ و $y=2x-|x|$ را بیابیم:

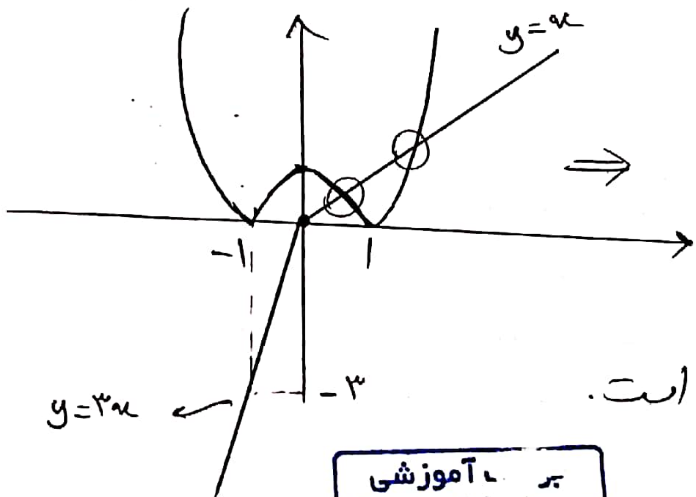
می دانیم که نمودار

$y=|x^2-1| \Rightarrow$



حال دو نمودار را روی یک دستگاه می کشیم:

$$y=2x-|x| = \begin{cases} 3x & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ در ۲ نقطه تلاقی

پس ۲ ریشه دارد

جواب گزینه ۲) است.

توابع صعودی و نزولی

- اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد می‌گوییم یکنوا است. (یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است)
- اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد می‌گوییم اکیداً یکنوا است.
- اگر تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی (یعنی در بازه‌ها صعودی و در بعضی بازه‌ها نزولی باشد) می‌گوییم غیر یکنوا (نایکنوا) است.