



به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد هشتگرد

# درس ریاضی عمومی

(ویژه ی دانشجویان رشته ی حسابداری)

مدرس: استاد کبری رمضانی

نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۳۹۹

k\_ramezani63@yahoo.com

## سرفصل ها:

### ۱- تابع

۶	.....	مفاهیم اولیه
۶	.....	- تعریف رابطه
۶	.....	- تعریف تابع
۶	.....	- تشخیص تابع از روی نمودار
۷	.....	دامنه ی توابع
۷	.....	- تعریف دامنه
۷	.....	- تعیین دامنه ی توابع چند جمله ای
۷	.....	- تعیین دامنه ی توابع کسری
۸	.....	- تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه فرد
۸	.....	- تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه زوج
۱۵	.....	- تعیین دامنه ی توابع لگاریتمی
۱۵	.....	- تعیین دامنه ی توابع مثلثاتی
۱۶	.....	- تعیین دامنه ی توابع جزءصحيح
۱۶	.....	- تعیین دامنه ی توابع قدرمطلقى
۱۷	.....	تابع پوشا
۱۷	.....	- تعریف برد تابع
۱۷	.....	- تعریف تابع پوشا
۱۷	.....	تابع یک به یک
۱۸	.....	تابع معکوس پذیر
۲۰	.....	تابع زوج و فرد
۲۰	.....	- تعریف تابع زوج
۲۰	.....	- تعریف تابع فرد
۲۱	.....	ترکیب توابع
۲۲	.....	اعمال جبری روی توابع
۲۴	.....	انواع تابع
۲۴	.....	- تابع چند جمله ای
۲۴	.....	- رسم خط
۲۴	.....	- رسم سهمی
۲۵	.....	- تابع قدرمطلق
۲۵	.....	- ویژگی های تابع قدرمطلق
۲۶	.....	- تابع جزءصحيح
۲۶	.....	- رسم تابع جزءصحيح
۲۷	.....	تمرینات

## ۲- حد و پیوستگی

۲۹	..... مفهوم حد
۳۰	..... حد تابع در یک نقطه
۳۱	..... حد راست تابع در یک نقطه
۳۱	..... حد چپ تابع در یک نقطه
۳۳	..... قضایای حد
۳۴	..... قضیه فشردگی
۳۵	..... حالات مبهم
۳۵	..... - رفع ابهام حالت $x \rightarrow a$ وقتی $x \rightarrow a$
۳۵	..... - روش حذف عامل صفر کننده یا عامل مبهم
۴۰	..... - استفاده از روابط هم ارزی
۴۱	..... - رفع ابهام حالت $\infty - \infty$
۴۱	..... - حد بینهایت (حد نامتناهی)
۴۲	..... - حد در بینهایت
۴۲	..... - رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$
۴۳	..... پیوستگی
۴۶	..... تمرینات

## ۳- مشتق و کاربردهای آن

۴۸	..... تعریف مشتق تابع در یک نقطه
۴۸	..... مشتق چپ و مشتق راست
۵۱	..... تابع مشتق
۵۱	..... قوانین مشتق
۵۴	..... مشتق مراتب بالاتر
۵۵	..... مشتق تابع ضمنی
۵۶	..... دیفرانسیل تابع
۵۶	..... کاربردهای مشتق
۵۶	..... - توابع صعودی و نزولی
۵۸	..... - اکسترمم های نسبی و مطلق
۵۹	..... - نقاط بحرانی
۶۰	..... - تعیین اکسترمم های نسبی یک تابع
۶۰	..... - آزمون مشتق اول
۶۲	..... - آزمون مشتق دوم
۶۳	..... - تعیین اکسترمم های مطلق یک تابع
۶۳	..... - تقعر و تحدب
۶۵	..... - نقاط عطف
۶۵	..... قاعده هوییتال

۶۵	.....	$\frac{1}{x}$	- صورت مبهم
۶۷	.....	$\frac{\infty}{\infty}$	- صورت مبهم
۶۷	.....	$0 \times \infty$	- صورت مبهم
۶۸	.....		تمرینات

#### ۴- انتگرال

۷۱	.....	انتگرال نامعین
۷۲	.....	انتگرال معین
۷۲	.....	خواص انتگرال گیری
۷۳	.....	فرمول های پایه انتگرال گیری
۷۷	.....	روش تغییر متغیر (جانشینی)
۷۹	.....	روش جزء به جزء
۸۱	.....	تمرینات

## فصل ۱ – تابع

## فصل ۱ - تابع

## ۱-۱ مفاهیم اولیه:

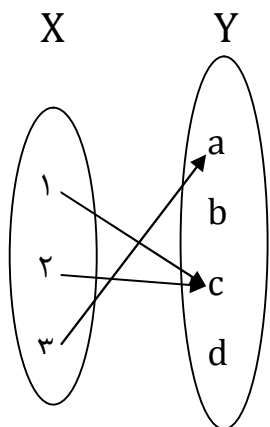
**تعریف رابطه:** هر مجموعه که عناصر آن زوج مرتب باشد را رابطه گویند. مانند  $A = \{(1,2), (a,5)\}$

**تعریف تابع:** فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو مجموعه باشند، در اینصورت تابع  $f$  رابطه ای است دو تایی (زوج مرتب) که به هر عضو مجموعه  $X$  چون  $x$ ، یک و فقط یک عضو از مجموعه  $Y$  را چون  $f(x)$  نسبت می دهد. (به عبارت دیگر تابع رابطه ای است که اگر مولفه های اول مساوی بودند، مولفه های دوم نیز مساوی باشند).

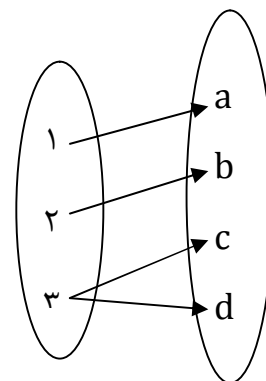
$$f: X \rightarrow Y$$

$$y = f(x) \text{ ضابطه تابع}$$

مثال:



تابع هست



تابع نیست

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\} \text{ تابع هست}$$

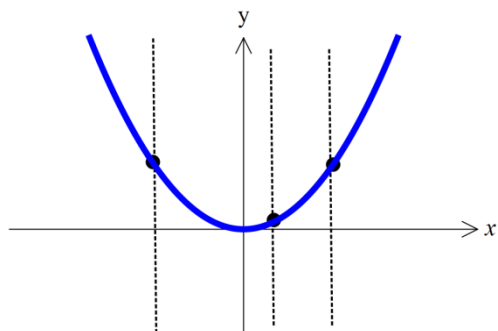
$$f_2 = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (4, 1)\} \text{ تابع نیست (زیرا دو زوج مرتب با مولفه های اول مساوی دارد که مولفه های دومشان مساوی نیستند)}$$

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\} \text{ تابع هست}$$

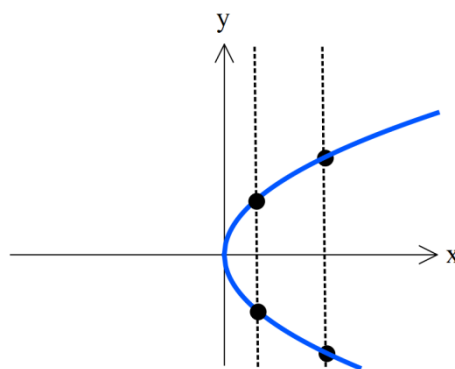
**تشخیص تابع از روی نمودار:** اگر نمودار بدهند و بپرسند آیا نمودار تابع هست یا خیر؟

روش کار: خطوطی موازی محور  $Y$  ها ترسیم می کنیم. هر یک از این خطوط موازی با محور  $Y$  نمودار تابع را حداکثر باید در یک نقطه قطع نماید.

مثال:



نمودار تابع هست



نمودار تابع نیست

**۱-۲ دامنه توابع:**

**تعریف دامنه:** به مجموعه مقادیری که تابع مورد نظر به ازای آن مقادیر تعریف شده باشد، دامنه گویند. به عبارت دیگر دامنه تابع مجموعه مقادیری است که متغیر مستقل  $x$  می تواند داشته باشد و آن را با نماد  $D_f$  نشان می دهند.

**تعیین دامنه:**

**۱- توابع چند جمله ای:** چون چند جمله ای ها همواره با معنی هستند پس دامنه آنها همیشه برابر با  $\mathbb{R}$  است.

مثال:

$$۱) y = \frac{1}{5}x^2 - ۱ \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$۲) y = ۲x^3 + ۵x + ۴ \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

**۲- توابع کسری:** برای تعیین دامنه توابع کسری باید اشتراک دامنه صورت و دامنه مخرج به جز ریشه های مخرج را بدست آورد. زیرا یک کسر زمانی با معنی است که مخرج آن مخالف صفر باشد، پس:

$$D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

**نکته:** زمانی که صورت و مخرج کسر عبارتهای چند جمله ای باشد، فقط کافیست ریشه های مخرج را بدست آوریم. در چنین حالتی دامنه به صورت زیر خواهد بود:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال:

$$۱) f(x) = \frac{1}{2x-1} \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$۲) f(x) = \frac{3x-1}{2x+6} \rightarrow 2x+6 = 0 \rightarrow 2x = -6 \rightarrow x = -3 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$۳) f(x) = \frac{3x+5}{x^2-6} \rightarrow x^2-6 = 0 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{6}, +\sqrt{6}\}$$

**۳- توابع رادیکالی با فرجه فرد:** در توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال با فرجه فرد در محاسبه دامنه بی تاثیر

است و دامنه در کل برابر با دامنه عبارت زیر رادیکال خواهد بود. عبارت زیر رادیکال  $D_f = D$

مثال:

$$۱) f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 5x^2 + 3} \rightarrow D_f = D_{\text{عبارت زیر رادیکال}} = \mathbb{R}$$

$$۲) f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x+8}{2x-1}}$$

$$\rightarrow g = \frac{5x+8}{2x-1} \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

**۴- توابع رادیکالی با فرجه زوج:** می دانیم در توابع رادیکالی با فرجه زوج عبارت زیر رادیکال نمی تواند عدد

منفی قرار بگیرد. پس برای محاسبه دامنه باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار داده و نامعادله را حل کنیم. در ضمن اگر نامعادله درجه ۲ بود باید از طریق تعیین علامت عمل کنید.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{عبارت زیر رادیکال} \geq 0\}$$

مثال:

$$۱) f(x) = \sqrt{-2x+8}$$

$$-2x+8 \geq 0 \rightarrow -2x \geq -8 \rightarrow 2x \leq 8 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\} = (-\infty, 4]$$



$$۲) f(x) = \frac{\Delta x + 1}{\sqrt{2x - 1}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{\text{صورت}} = \mathbb{R} \\ 2x - 1 > 0 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\} = \mathbb{R} \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$۳) f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$$

چون نامعادله درجه ۲ است باید تعیین علامت کنیم که اولین گام یافتن ریشه هاست.  $x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

x	-	1	1	+
$x^2 - 1$	+	0	-	0
	+	0	-	+
	ج	ج	ج	ج

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$۴) f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$

چون نامعادله درجه ۲ است باید تعیین علامت کنیم که اولین گام یافتن ریشه هاست.  $x^2 + 3x + 2 \geq 0 \rightarrow$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(2) = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases}$$

x	-	-2	-1	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0
	+	0	-	+
	ج	ج	ج	ج

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$$

$$۵) f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow D_{\text{صورت}} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{1\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

$$۶) f(x) = \frac{5x+8}{\sqrt{2x-1}-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{\text{صورت}} = \mathbb{R} \\ \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow D_1 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \sqrt{2x-1}-1 = 0 \rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \rightarrow 2x-1 = 1 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow D_2 = \mathbb{R} - \{1\} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

$$۷) f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$$

$$\frac{x}{4-x^2} \geq 0 \rightarrow \text{تعیین علامت} \rightarrow \text{تعیین ریشه ها}$$

$$\frac{x}{4-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

ریشه ها	-۲	۰	+۲
x	-	0	+
4-x <sup>2</sup>	-	+	-
f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}	+	-	-

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup [0, 2)$$