به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد هشتگرد

درس ریاضی عمومی

(ویژه ی دانشجویان رشته ی حسابداری)

مدرس: استاد کبری رمضانی

نیمسال دوم ۱۴۰۰–۱۳۹۹

k_ramezani63@yahoo.com

سرفصل ها:

۱- تابع

۲- حد و پیوستگی

۳- مشتق و کاربردهای آن

۴- انتگرال

فصل ۱ – تابع

فصل ۱ – تابع

۱-۱ مفاهیم اولیه:

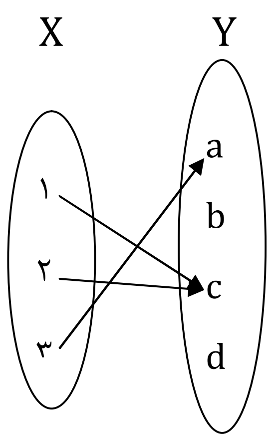
تعریف رابطه: هر مجموعه که عناصر آن زوج مرتب باشد را رابطه گویند. مانند $A = \{(۱,۲), (a,۵)\}$

تعریف تابع: فرض کنیم X و Y دو مجموعه باشند، در اینصورت تابع f رابطه ای است دو تایی (زوج مرتب) که به هر عضو مجموعه X چون x، یک و فقط یک عضو از مجموعه Y را چون $f(x)$ نسبت می دهد. (به عبارت دیگر تابع رابطه ای است که اگر مولفه های اول مساوی بودند، مولفه های دوم نیز مساوی باشند.)

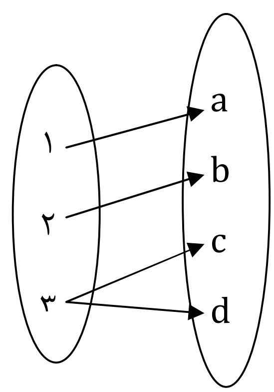
$f: X \to Y$

$y = f(x)$ ضابطه تابع

مثال:



تابع هست



تابع نیست

$f_۱ = \{(۱,a), (۲,b), (۳,c), (۴,d)\}$ تابع هست

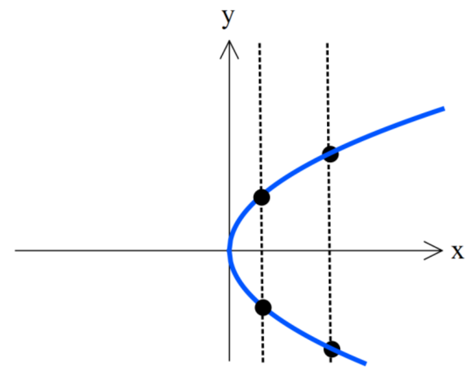
$f_۲ = \{(۲,۱), (۳,۱), (۲,۲), (۴,۱)\}$ تابع نیست (زیرا دو زوج مرتب با مولفه های اول مساوی دارد که مولفه های دومشان مساوی نیستند)

$f_۳ = \{(۱,۲), (۲,۱), (۱,۲), (۳,۲), (۴,۱)\}$ تابع هست

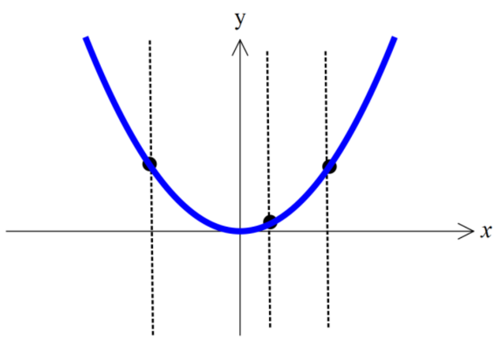
تشخیص تابع از روی نمودار: اگر نمودار بدهند و بپرسند آیا نمودار تابع هست یا خیر؟

روش کار: خطوطی موازی محور y ها ترسیم می کنیم. هر یک از این خطوط موازی با محور yها نمودار تایع را حداکثر باید در یک نقطه قطع نماید.

مثال:



نمودار تابع نیست



نمودار تابع هست

۱-۲ دامنه توابع:

تعریف دامنه: به مجموعه مقادیری که تابع مورد نظر به ازای آن مقادیر تعریف شده باشد، دامنه گویند. به عبارت دیگر دامنه تابع مجموعه مقادیری است که متغیر مستقل x می تواند داشته باشد و آن را با نماد $\mathrm{D_f}$ نشان می دهند.

تعیین دامنه:

۱- توابع چند جمله ای: چون چند جمله ای ها همواره با معنی هستند پس دامنه آنها همیشه برابر با $\mathbb{R}$ است.

مثال:

$$۱)\ y = \frac{۱}{۵}x^{۲} - ۱ \quad \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$
$$۲)\ y = ۲x^{۳} + ۵x + ۴ \quad \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۲- توابع کسری: برای تعیین دامنه توابع کسری باید اشتراک دامنه صورت و دامنه مخرج به جز ریشه های مخرج را بدست آورد. زیرا یک کسر زمانی با معنی است که مخرج آن مخالف صفر باشد، پس:

$$D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

نکته: زمانی که صورت و مخرج کسر عبارتهای چند جمله ای باشد، فقط کافیست ریشه های مخرج را بدست آوریم. در چنین حالتی دامنه به صورت زیر خواهد بود:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال:

$$۱)\ f(x) = \frac{۱}{۲x - ۱} \rightarrow ۲x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\frac{۱}{۲}\}$$

$$۲)\ f(x) = \frac{۳x - ۱}{۲x + ۶} \rightarrow ۲x + ۶ = ۰ \rightarrow ۲x = -۶ \rightarrow x = -۳ \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-۳\}$$

$$۳)\ f(x) = \frac{۳x + ۵}{x^۲ - ۶} \rightarrow x^۲ - ۶ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۶ \rightarrow x = \pm\sqrt{۶} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{۶}, +\sqrt{۶}\}$$

۳-توابع رادیکالی با فرجه فرد: در توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال با فرجه فرد در محاسبه دامنه بی تاثیر است و دامنه در کل برابر با دامنه عبارت زیر رادیکال خواهد بود. $D_f = D_{\text{عبارت زیر رادیکال}}$

مثال:

$$۱)\ f(x) = \sqrt[۵]{x^۳ - ۵x^۲ + ۳} \rightarrow D_f = D_{\text{عبارت زیر رادیکال}} = \mathbb{R}$$

$$۲)\ f(x) = \sqrt[۳]{\frac{۵x + ۸}{۲x - ۱}}$$

$$\rightarrow g = \frac{۵x + ۸}{۲x - ۱} \rightarrow ۲x - ۱ = ۰ \rightarrow ۲x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R} - \{\frac{۱}{۲}\}$$

۴-توابع رادیکالی با فرجه زوج: می دانیم در توابع رادیکالی با فرجه زوج عبارت زیر رادیکال نمی تواند عدد منفی قرار بگیرد. پس برای محاسبه دامنه باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار داده و نامعادله را حل کنیم. در ضمن اگر نامعادله درجه ۲ بود باید از طریق تعیین علامت عمل کنید.

$$D = \{x \in \mathbb{R}\ |\ \text{عبارت زیر رادیکال} \geq ۰\}$$

مثال:

$$۱)\ f(x) = \sqrt{-۲x + ۸}$$

$$-۲x + ۸ \geq ۰ \rightarrow -۲x \geq -۸ \rightarrow\rightarrow ۲x \leq ۸ \rightarrow x \leq ۴ \rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}\ |x \leq ۴\} = (-\infty, ۴]$$

$$۲)\ f(x)=\frac{۵x+۱}{\sqrt{۲x-۱}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{\text{صورت}}=\mathbb{R} \\ ۲x-۱>۰ \rightarrow ۲x>۱ \rightarrow x>\frac{۱}{۲} \rightarrow D_{\text{مخرج}}-\{\text{ریشه های مخرج}\}=(\frac{۱}{۲},+\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=D_{\text{صورت}}\cap D_{\text{مخرج}}-\{\text{ریشه های مخرج}\}=\mathbb{R}\cap\left(\frac{۱}{۲},+\infty\right)=\ (\frac{۱}{۲},+\infty)$$

$$۳)\ f(x)=\sqrt[۴]{x^۲-۱}$$

$x^۲-۱\geq ۰ \rightarrow$ چون نامعادله درجه ۲ است باید تعیین علامت کنیم که اولین گام یافتن ریشه هاست.

$$\rightarrow x^۲-۱=۰ \rightarrow x^۲-۱ \rightarrow x^۲=۱ \rightarrow x=\pm ۱$$

x		-۱		۱	
$x^۲-۱$	+	۰	-	۰	+
	ج				ج

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$۴)\ f(x)=\sqrt{x^۲+۳x+۲}$$

$x^۲+۳x+۲\geq ۰ \rightarrow$ چون نامعادله درجه ۲ است باید تعیین علامت کنیم که اولین گام یافتن ریشه هاست.

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴(۱)(۲)=۱ \rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱ \\ x_۲=\frac{-۳-۱}{۲}=-۲ \end{cases}$$

x		-۲		-۱	
$x^۲+۳x+۲$	+	۰	-	۰	+
	ج				ج

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[-۱,+\infty)$$

$$۵)\ f(x) = \frac{\sqrt{۲x - ۱}}{x - ۱}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ \geq ۰ \rightarrow ۲x \geq ۱ \rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \rightarrow D_{\text{صورت}} = \left[\frac{۱}{۲}, +\infty\right) \\ x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow D_{\text{مخرج}} - \left\{\text{ریشه های مخرج}\right\} = \mathbb{R} - \{۱\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = D_{\text{صورت}} \cap D_{\text{مخرج}} - \{\text{ریشه های مخرج}\} = \left[\frac{۱}{۲}, +\infty\right) \cap (\mathbb{R} - \{۱\}) = \left[\frac{۱}{۲}, ۱\right) \cup (۱, +\infty)$$

$$۶)\ f(x) = \frac{۵x + ۸}{\sqrt{۲x - ۱} - ۱}$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{\text{صورت}} = \mathbb{R} \\ \begin{cases} ۲x - ۱ \geq ۰ \rightarrow ۲x \geq ۱ \rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \rightarrow D_۱ = \left[\frac{۱}{۲}, +\infty\right) \\ \sqrt{۲x - ۱} - ۱ = ۰ \rightarrow \sqrt{۲x - ۱} = ۱ \rightarrow ۲x - ۱ = ۱ \rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow x = ۱ \rightarrow D_۲ = \mathbb{R} - \{۱\} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{۱}{۲}, ۱\right) \cup (۱, +\infty)$$

$$۷)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{۴ - x^۲}}$$

$$\frac{x}{۴ - x^۲} \geq ۰ \rightarrow \text{تعیین ریشه ها} \rightarrow \text{تعیین علامت}$$

$$\frac{x}{۴ - x^۲} = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۴ - x^۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۴ \rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

ریشه ها		-۲		۰		+۲	
x	-		-	0	+		+
$۴ - x^۲$	-	0	+		+	0	-
$f(x) = \sqrt{\frac{x}{۴ - x^۲}}$	+	ت ن	-		+	ت ن	-

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۲) \cup [۰, ۲)$$